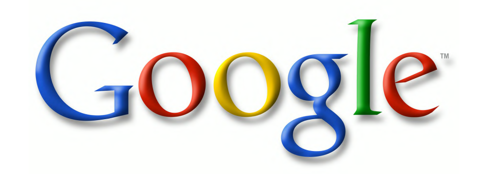




KF 24181
VE RI TAS
Harvard College Library
FROM THE FUND OF
CHARLES MINOT
(Class of 1828).
Received 7 Sept., 1886.



PHYSIKALISCHE
KRYSTALLOGRAPHIE.

PHYSIKALISCHE

KRYSTALLOGRAPHIE

UND EINLEITUNG

IN DIE

KRYSTALLOGRAPHISCHE KENNTNISS

DER

WICHTIGEREN SUBSTANZEN

VON

P. GROTH.

ZWEITE, UMGEARBEITETE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

MIT 631 HOLZSCHNITTEN IM TEXT UND EINER BUNTDRUCK-TAFEL.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1885.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Das vorliegende Lehrbuch ist besonders für Studirende der folgenden Fächer bestimmt:

1) der Chemie. Die Wichtigkeit, welche für diese Wissenschaft die Krystallographie bereits seit der Entdeckung des Gesetzes der Isomorphie besass, auf welches so zahlreiche Schlüsse über die chemische Constitution unorganischer Verbindungen aufgebaut worden sind, ist noch ausserordentlich vermehrt worden durch die in den letzten 15 Jahren erfolgte Ausdehnung des krystallographischen Studiums der organischen Verbindungen. Dieses hat gelehrt, dass kaum durch irgend eine andere Eigenschaft ein Körper mit gleicher Sicherheit erkannt werden kann, als durch seine Krystallform, daher deren Bestimmung ganz besonders bei der so oft vorkommenden Frage, ob identische oder isomere Körper vorliegen, von entscheidender Bedeutung ist. Andererseits haben die ebenfalls den letzten Jahren angehörigen Untersuchungen O. Lehmann's gezeigt, wie ausserordentlich zahlreich die Fälle sind, in denen organische Substanzen, unter ungleichen Umständen erhalten, verschiedene Schmelzpunkte zeigen, während sie doch chemisch identisch sind und nur die Fähigkeit besitzen, in mehreren »physikalisch isomeren« Modificationen aufzutreten, — so dass die Bestimmung des Schmelzpunktes ihren bisher so allgemein angenommenen Werth als Mittel zur Erkennung einer Substanz fast ganz eingebüsst hat. Aus alledem geht hervor, dass heutzutage die Bekanntschaft mit der Krystallographie für den wissenschaftlich gebildeten Chemiker unentbehrlich geworden ist, wenigstens so weit, dass er durch dieselbe in den Stand gesetzt wird, diejenigen Fälle zu erkennen, in welchen ihm eine krystallographische Untersuchung

seiner Producte von Nutzen sein kann, und in denen es nothwendig ist, sich der Unterstützung durch einen eigentlichen Krystallographen zu bedienen. Es ist ein Hauptziel des Verfassers gewesen, es nicht nur den Chemikern zu ermöglichen, die hierzu erforderlichen Kenntnisse aus vorliegendem Buche in ausreichendem Maasse zu schöpfen, sondern auch Diejenigen unter ihnen, welche dasselbe recht genau durchstudiren, sogar in den Stand zu setzen, einfachere krystallographische Bestimmungen, wie sie zu chemischen Zwecken gewöhnlich vorkommen, selbst auszuführen. Wünschenswerth wäre es allerdings in hohem Grade, wenn an mehreren Universitäten, an denen sich eine grössere Zahl Chemie Studirender befindet, nicht bloss ausführlichere Vorlesungen über physikalische und chemische Krystallographie, sondern auch eigene praktische Curse eingerichtet würden (wie es in München der Fall ist), in denen diejenigen, welche sich die im vorliegenden Buche niedergelegten Vorkenntnisse erworben haben, systematische Anleitung zur Ausführung krystallographischer Messungen, optischer Untersuchungen u. s. w. erhielten.

2) Eine zweite Kategorie Studirender, für welche das vorliegende Buch bestimmt ist, bilden diejenigen der Physik. Die Lehrbücher und Vorlesungen über diese Wissenschaft behandeln, wie es bei der grossen Ausdehnung des Gebietes nicht anders sein kann, die physikalischen Eigenschaften der Krystalle meist nur in abgekürzter Weise, während die Kenntniss derselben und ihres Zusammenhanges mit der Krystallform doch für die Physiker wichtig und interessant genug ist, um eine nähere Beschäftigung mit denselben zu rechtfertigen. Dass hierbei zum Zwecke einer zusammenhängenden Darstellung auch manche Dinge aufgenommen werden mussten, welche ebenso ausführlich in jedem Lehrbuche der Physik zu finden sind, versteht sich von selbst, doch möchte es für angehende Physiker nicht überflüssig sein, sie hier in einem anderen Zusammenhange kennen zu lernen. Den Praktikanten physikalischer Laboratorien wird vielleicht die in der III. Abtheilung enthaltene ausführliche Anleitung zu krystall-optischen Arbeiten nicht unwillkommen sein.

3) Das Studium der Geologie muss, wenn es nicht in einseitiger Weise nur einen Theil derselben umfassen soll, gegründet werden auf wenigstens allgemeine Kenntnisse der Physik und Chemie und besonders auf eingehende Beschäftigung mit den mineralogischen Wissenschaften. Namentlich derjenige Theil der Geologie, welcher sich mit den Gesteinen

beschäftigt, die Petrographie, erfordert als Vorbedingung das Studium der Krystalloptik und der Krystallographie. Durch Aufnahme der mikroskopischen Untersuchungsmethoden hat der Verfasser speciell auch diesem Bedürfnisse Rechnung zu tragen gesucht und Alles dasjenige in den Kreis der Betrachtung gezogen, was zum Vorstudium der mikroskopischen Physiographie der gesteinsbildenden Mineralien unerlässlich erscheint.

Was endlich diejenigen betrifft, welche sich speciell der Mineralogie widmen wollen, so soll Diesen das vorliegende Werk nur zur Einführung in die Krystallographie dienen. Wenn dasselbe auch für die gewöhnlich vorkommenden Fälle alles Nöthige enthält, so ist es doch wünschenswerth, dass die zukünftigen Mineralogen sich weitergehende Kenntnisse in der Physik und Mathematik verschaffen, als sie hier vorausgesetzt werden, um auch schwierigere krystallographische Werke, auf welche an mehreren Stellen hingewiesen wird, zum Gegenstande ihres Studiums machen zu können.

Die allgemeine Anordnung des Stoffes ist die gleiche geblieben, wie in der ersten Auflage.

Die I. Abtheilung bildet die Beschreibung der physikalischen Eigenschaften der Krystalle, in welcher z. B. die Abschnitte über die Einwirkung mechanischer Kräfte und die Capitel über die optische Elasticität eine wesentlich andere und, wie der Verfasser glaubt, übersichtlichere Gestalt gewonnen haben. Eine mathematisch strenge Behandlung des Gegenstandes, besonders der Theorie der optisch zweiaxigen Medien, war durch die Bestimmung des Buches für Anfänger ausgeschlossen. Zur Erleichterung des Verständnisses hat der Verfasser die Elasticitätsfläche, deren Radien $= \sqrt{e}$, als Ellipsoid bezeichnet, was sie streng genommen nicht ist (es ist eine Fläche 4. Ordnung, und das eigentlich als »Elasticitätsfläche« zu bezeichnende Gebilde, dessen Radien proportional e, eine solche 6. Grades), und hat als »Wellenfläche« dasjenige Gebilde behandelt, welches in der theoretischen Physik jetzt als »Strahlenfläche« bezeichnet wird. Da in den Krystallen die Axenverhältnisse aller dieser Flächen so wenig von der Einheit abweichen, dass die erwähnte Substitution in jedem Falle, in welchem es sich nicht um sehr genaue Rechnung handelt, eine hinreichende Annäherung an die

Wahrheit darstellt, und da die substituirten Flächen mit den anderen gewisse Schnitte und Eigenschaften in aller Strenge gemeinsam haben, so zog der Verfasser diese Substitution, welche übrigens auch in grösseren physikalischen Lehrbüchern noch adoptirt ist, aus pädagogischen Gründen vor. Durch die in Folge dessen erzielte Vereinfachung der Betrachtung und dadurch, dass in allen optischen Erörterungen die Verhältnisse des »Strahles« (welcher ja eigentlich etwas Fingirtes darstellt) zu Grunde gelegt wurden, glaubt der Verfasser es nämlich erreicht zu haben, dass auch Anfänger, welche nur über die elementarsten mathematischen Kenntnisse verfügen, ein Verständniss der optischen Erscheinungen der Krystalle, soweit es für die krystallographische Praxis unentbehrlich ist, aus dem Buche gewinnen können, und dieser Vortheil dürfte eine kleine Abweichung von mathematischer Strenge wohl aufwiegen. Bei den Erwägungen über diese Fragen hatte der Verfasser sich vielfacher belehrender Hülfe seines früheren Strassburger Collegen Prof. Dr. Braun (jetzt in Tübingen) zu erfreuen; und Prof. Dr. Kundt in Strassburg hatte die Gefälligkeit, den Abschnitt über die electrischen Eigenschaften einer Revision zu unterwerfen. Beiden Herren Collegen sagt der Verfasser auch an dieser Stelle seinen besten Dank. — Das Interesse, welches die optischen Anomalien der Krystalle in neuerer Zeit, namentlich durch die wichtigen Forschungen Mallards, erlangt haben, liess es gerechtfertigt erscheinen, die Einwirkung von Druck und Spannung auf die optischen Eigenschaften der festen Körper etwas eingehender zu behandeln, da es dem Verfasser wahrscheinlich dünkt, dass ein Theil jener Erscheinungen auf derartige Einflüsse zurückzuführen ist. Wenn auch diese Frage in ihrer Allgemeinheit noch nicht beantwortet werden konnte, so dürfte doch eine Auseinandersetzung der Gründe, welche für die eine oder die andere Erklärungsweise sprechen, auch in einem elementaren Lehrbuche nicht ganz fehlen.

Die II. Abtheilung, die Betrachtung der geometrischen Eigenschaften der Krystalle, hat geringere Aenderungen gegen die erste Auflage erfahren. Auch hier waren es pädagogische Gründe, welche den Verfasser hinderten, die in neuester Zeit in mehreren Werken adoptirte Definition der Krystallsysteme durch die »Axen und Centren der Symmetrie« zu Grunde zu legen, mit welcher der für den Anfänger das Verständniss so wesentlich erleichternde Zusammenhang der geometrischen und physikalischen Symmetrieebene verloren geht. Entsprechend der seit

Gründung der »Zeitschrift für Krystallographie« immer allgemeiner werdenden Annahme der Miller'schen Bezeichnungsweise, musste diese mehr als in der ersten Auflage in den Vordergrund treten; dieselbe ist selbstverständlich consequent in der Art angewendet, wie sie durch jene Zeitschrift eingeführt worden ist. Der Berechnung wurde die stereographische Projection zu Grunde gelegt und letztere daher bereits im allgemeinen Theile erläutert. Denjenigen Studirenden, welche vorläufig nicht bis zu den Berechnungsmethoden vorschreiten wollen, räth der Verfasser, den allgemeinen Theil § 39—48 nur cursorisch zu lesen, um sich eine allgemeine Kenntniss der krystallographischen Grundbegriffe zu verschaffen, und dann sofort zum Studium der einzelnen Krystallsysteme überzugehen, in deren Behandlung die Abschnitte über Projection und Berechnung so eingefügt sind, dass das Uebrige auch ohne sie als selbständiges Ganze studirt werden kann. Bei den einzelnen Abtheilungen der Krystalle sind wie früher die wichtigsten dahin gehörigen Substanzen als Beispiele erwähnt mit Angabe ihrer Krystallformen und physikalischen Eigenschaften, welche letztere so vollständig als möglich aufgenommen wurden. Die Anzahl dieser Beispiele ist gegen die erste Auflage nicht erheblich vermehrt, weil sonst das Werk allzu umfangreich geworden wäre, und weil der Verfasser hofft, demselben baldigst die Ausarbeitung eines vollständigen Handbuches der chemischen Krystallographie folgen zu lassen, in welchem die Resultate der krystallographischen und physikalischen Untersuchungen aller krystallisirter Substanzen zusammengestellt werden sollen. Die allgemeinen Grundbegriffe der chemischen Krystallographie, wie sie zum Verständniss der chemischen Beziehungen zwischen den in das vorliegende Buch aufgenommenen, wichtigeren Substanzen nöthig sind, findet man in der Einleitung zu des Verfassers »Tabellarische Uebersicht der Mineralien nach ihren krystallographisch-chemischen Beziehungen«, Braunschweig 1882.

Eine gänzliche Neubearbeitung erforderte die III. Abtheilung, die Beschreibung der Apparate und Methoden zu krystallographisch-physikalischen Untersuchungen, weil auf diesem Gebiete die Fortschritte der letzten Jahre so ausserordentlich grosse gewesen sind, wie in keiner früheren Periode. Die Präcisionstechnik, auf krystallographischem Gebiete in Deutschland in erster Linie repräsentirt durch die Werkstätte von R. Fuess in Berlin, liefert jetzt so vervollkommnete Instrumente, dass die Untersuchung der Krystalle nach den verschiedensten

Richtungen hin in früher ungeahnter Weise erweitert und erleichtert worden ist. Auch bei Abfassung dieses Abschnittes wurde darauf Rücksicht genommen, dass der Anfänger durch das Selbststudium desselben in den Stand gesetzt werde, die Apparate und ihren Gebrauch kennen zu lernen. Die Darstellung wurde zu möglichster Erleichterung des Verständnisses unterstützt durch zahlreiche, in den Text aufgenommene Abbildungen, welche an Stelle der beiden lithographirten Tafeln der ersten Auflage getreten sind.

Die Bunttafel der letzteren wurde unverändert beibehalten.

Der Erfolg, dessen sich die erste Auflage dieses Buches zu erfreuen hatte, lässt den Verfasser hoffen, dass derselbe auch dieser neuen Bearbeitung, bei welcher er bestrebt war, manche Mängel der ersten zu beseitigen, nicht ganz fehlen werde.

München, Ostern 1885.

P. Groth.

Inhaltsverzeichniss.

I. Abtheilung.

Die physikalischen Eigenschaften der Krystalle.

B. Krystalle mit einer Hauptaxe.

(Optisch einaxige Krystalle.)

II. Das hexagonale Krystallsystem.

III. Das tetragonale Krystallsystem.

Die physikalischen Eigenschaften der hexagonalen und tetragonalen Krystalle.

C. Krystalle ohne Hauptaxe.

(Optisch zweiaxige Krystalle.)

IV. Das rhombische Krystallsystem.

Seite

C. Mikroskope und mikroskopische Messapparate.

D. Schneide- und Schleifapparate.

E. Darstellung der Resultate krystallographischer Untersuchungen.

Anhang I.

Anhang II.

I. ABTHEILUNG.

DIE PHYSIKALISCHEN EIGENSCHAFTEN DER KRYSTALLE.

§. 1. **Definition der physikalischen Krystallographie.** Die Mineralogie ist die Kenntniss der physikalischen Eigenschaften der in der Natur vorkommenden festen Substanzen; sie ist ein Theil der descriptiven Chemie, d. h. der Kenntniss der physikalischen Eigenschaften aller Körper, auch der künstlich dargestellten. Die Methoden, welche dieselbe zur Erforschung jener Eigenschaften benutzt, sind selbstverständlich physikalische; demnach ist die Physik eine ihrer wichtigsten Hülfswissenschaften. Da allen festen Körpern von bestimmter chemischer Zusammensetzung die Fähigkeit zukommt, in bestimmten, ebenflächig begrenzten Formen (krystallisirt) aufzutreten, — da ferner die Krystallform eines Stoffes diejenige seiner Eigenschaften ist, durch welche er im Allgemeinen am sichersten wieder erkannt werden kann, — so ist diejenige geometrische Disciplin, welche sich mit den regelmässigen Formen der festen Körper beschäftigt, die Krystallographie, eine nicht minder unentbehrliche Hülfswissenschaft der Mineralogie, als die Physik.

Physik und Krystallographie treten nun in eine weitere Beziehung zu einander dadurch, dass die äusseren Formen der Krystalle in einem streng gesetzmässigen Zusammenhang stehen mit den physikalischen Eigenschaften ihrer Masse, so zwar, dass in denjenigen Richtungen eines Krystalls, nach welcher seine geometrische Form eine gleichartige ist, auch seine physikalischen Eigenschaften (z. B. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes) übereinstimmen, während krystallographisch ungleichwerthige Richtungen sich im Allgemeinen auch in physikalischer Beziehung unterscheiden. Durch diesen letzteren Umstand bieten die Krystalle besonders complicirte physikalische Probleme dar, deren Lösung der Gegenstand zahlloser theoretischer und experimenteller Untersuchungen von Seiten vieler der bedeutendsten Physiker gewesen ist. In Folge dessen sind die physikalischen, ganz besonders aber die optischen Eigenschaften der Krystalle, sowie auch die Gesetze des Zusammenhanges, in welchem jene Eigenschaften mit den Krystallformen stehen, bereits so weit bekannt, dass sie dazu benutzt werden können, die Krystallform in solchen Fällen zu bestimmen, in denen die rein geometrische Bestimmung besonders erschwert oder ganz unmöglich gemacht ist. So kann man z. B. sehr häufig mit Hülfe der optischen Eigenschaften an einem höchstens 1 Quadratmillimeter grossen durchsichtigen Splitter eines Krystalles, an welchem keine Spur der äusseren Form

mehr erhalten ist, mit Sicherheit bestimmen, welcher Abtheilung von Krystallformen der ganze Krystall angehörte. Es leuchtet hiernach ein, wie grosse praktische Wichtigkeit für die Krystallographie die genaue Kenntniss des gesetzmässigen Zusammenhanges zwischen Krystallform und physikalischen Eigenschaften besitzt. Nicht minder wichtig ist aber diese Kenntniss in theoretischer Beziehung für die Krystallographie, indem nämlich deren Gesetze sich meist als natürliche Consequenzen der physikalischen Eigenschaften der Krystalle ergeben. Es ist demnach die Behandlung der geometrischen Eigenschaften der Krystalle nicht mehr zu trennen von der ihrer physikalischen, und beide in ihrem gesetzmässigen Zusammenhange darzustellen, ist der Gegenstand der physikalischen Krystallographie.

Die Einwirkung mechanischer Kräfte auf die Krystalle.

§. 2. **Dichte, Elasticität.** Die allgemeine Eigenschaft der Zusammendrückbarkeit der festen Körper zeigt, dass dieselben gedacht werden müssen als zusammengesetzt aus, von einander abstehenden, kleinsten Theilchen, Molekülen, deren Abstand der Gleichgewichtslage der zwischen ihnen existirenden anziehenden und abstossenden Kräfte entspricht. Dieser Abstand ist bei einem und demselben Körper abhängig von der Temperatur desselben; eine Aenderung der letzteren (ebenso wie ein auf den Körper ausgeübter Druck oder Zug) bewirkt somit eine Aenderung der Dichte, wenn wir unter »Dichte eines Körpers« verstehen: die in der Volumeneinheit desselben enthaltene Masse. Die physikalischen Eigenschaften der Krystalle führen auf die Annahme, dass die Moleküle derselben in regelmässiger Weise netzförmig angeordnet sind; alsdann müssen nothwendiger Weise die Abstände der Theilchen nach verschiedenen Richtungen verschieden sein. Betrachten wir z. B. mehrere benachbarte Massentheilchen in einer Ebene, welche so geordnet sind, wie in Fig. 1, so ist der Abstand der Theilchen in der Richtung *ae* ein anderer, als in der Richtung *ab*.

Fig. 1.

Diejenigen Abstände der Moleküle von einander, in welchen ihre gegenseitige Anziehung und Abstossung sich das Gleichgewicht halten, sind unter bestimmten Verhältnissen nur ganz bestimmte. Versucht man, diese Abstände zu erweitern (den Körper auszudehnen), so tritt ein Widerstand desselben auf, demzufolge die Theilchen ihre frühere Lage, der ganze Körper seine frühere Gestalt wieder anzunehmen bestrebt sind. Bei grösseren Abständen der Theilchen, als sie dem Gleichgewicht von Anziehung und Abstossung entsprechen, ist also die erstere Kraft die überwiegende. Ein gleicher Widerstand zeigt sich, wenn man versucht, die Moleküle einander zu nähern; in diesem Falle müssen also die abstossenden Kräfte die anziehenden überwiegen. Beide Arten der

zwischen den kleinsten Theilchen wirkenden Kräfte müssen sich also mit den Abständen jener nach verschiedenen Gesetzen ändern.

Die allgemeine Eigenschaft der Körper, einer Aenderung ihrer Dichte, d. h. der Abstände ihrer Moleküle, einen Widerstand entgegenzusetzen, nennt man ihre Elasticität. Die Erfahrung lehrt, dass, wenn ein stabförmiger Körper durch ein Gewicht dilatirt oder comprimirt wird, die eingetretene Verlängerung oder Verkürzung proportional ist dem die Veränderung bewirkenden Gewichte und der Länge des Körpers, umgekehrt proportional seinem Querschnitt, und ausserdem abhängt von der Beschaffenheit der Substanz des Stabes selbst. Diese letztere Abhängigkeit wird ausgedrückt durch das Verhältniss eines Gewichtes P zu der Verlängerung δ, welche ein Stab der betreffenden Substanz von der Einheit der Länge und der Einheit des Querschnittes durch Anhängen desselben Gewichtes erfährt. Diese Verlängerung ändert sich aber nur innerhalb einer gewissen Grenze mit dem wirkenden Gewichte diesem proportional, innerhalb dieser bleibt also das Verhältniss beider

$$e = \frac{P}{\delta}$$

constant (das Gewicht $2P$ giebt die Verlängerung 2δ, das Verhältniss $\frac{2P}{2\delta}$ ist aber gleich $\frac{P}{\delta}$ u. s. f.) für eine und dieselbe Substanz und heisst deren Elasticitätscoëfficient oder Elasticitätsmodulus*). Dieser ist also das Maass des Widerstandes, welchen die betreffende Substanz einer Aenderung des Abstandes ihrer kleinsten Theilchen entgegensetzt.

Da die Grenze, innerhalb deren jene Proportionalität besteht, im Allgemeinen eine sehr enge ist, so handelt es sich bei der Bestimmung der Grösse des Elasticitätscoëfficienten um die Messung sehr kleiner Verlängerungen, hervorgebracht durch sehr kleine Gewichte. Um trotzdem den Quotienten dieser kleinen Grössen mit möglichster Genauigkeit zu erhalten, bestimmt man die Verlängerung indirect durch die Biegung, welche ein dünnes Stäbchen des Körpers erfährt. Zu diesem Zwecke wird ein solches mit seinen beiden Enden auf zwei horizontale Schneiden von bekanntem Abstande aufgelegt und in der Mitte von oben her mittelst einer dritten Schneide, welche, wie diejenige einer Wageschale auf dem Lager, so auf dem Stäbchen balancirt, mit einem bestimmten Gewichte belastet. Der zwischen den beiden Schneiden, auf denen das Stäbchen ruht, befindliche Theil desselben wird dadurch gebogen, und aus der Grösse dieser Biegung in der Mitte und den Dimensionen des Stäbchens lässt sich die Verlängerung, welche dasselbe hierbei in seiner Längsrichtung erfahren hat, berechnen. Es leuchtet nun ein, dass einer ziemlich beträchtlichen Senkung

*) Setzt man $\delta = 1$, so wird $e = P$, d. h. der Elasticitätscoëfficient ist gleich demjenigen Gewichte, welches die Länge des Körpers verdoppeln würde, wenn auch dann noch die Verlängerung proportional dem Gewichte bliebe.

der Mitte, welche man mittelst eines verstellbaren Mikroskops zu messen im Stande ist, eine äusserst kleine Verlängerung des Stäbchens entspricht.

Bestimmen wir nun in der angegebenen Weise die Elasticitätscoëfficienten verschiedener, aus einem nicht krystallisirten, sogenannten amorphen Körper, z. B. einem Stück Glas, geschnittener Stäbe, so finden wir, dass diese, in welcher Richtung sie auch aus jenem Körper geschnitten worden seien, stets denselben Werth liefern. Die Elasticität der amorphen Körper ist daher von der Richtung unabhängig.

Ganz andere Resultate liefert dagegen die Untersuchung eines Krystalls bezüglich seiner Elasticitätsverhältnisse. Schneiden wir aus einem solchen theils in gleicher, theils in verschiedener Richtung Stäbe, so finden wir, dass zwar diejenigen von gleicher Orientirung stets denselben Elasticitätscoëfficienten liefern, die in abweichender Richtung aus dem Krystalle geschnittenen jedoch, bei gleichen Dimensionen und gleicher Belastung, eine andere Biegung erfahren. Die Elasticität ändert sich also in den Krystallen mit der Richtung, und zwar findet diese Aenderung in verschiedenen Krystallen nach verschiedenen Gesetzen statt.

Obgleich bisher nur ein kleiner Theil derselben in dieser Beziehung vollständig geprüft ist, kann man doch aus den Resultaten dieser Untersuchungen und aus der Analogie mit den übrigen physikalischen Eigenschaften der Krystalle schliessen, dass dieselben bezüglich ihrer Elasticitätsverhältnisse in drei Klassen zerfallen:

1) in solche, deren Elasticitätscoëfficient in drei aufeinander senkrechten Richtungen gleich gross ist, während sein Werth sich mit der Neigung gegen diese Richtungen in regelmässiger Weise ändert;

2) in solche, deren Elasticitätscoëfficient innerhalb einer Ebene des Krystalls in zwei aufeinander senkrechten oder in drei, 60° mit einander bildenden Richtungen den gleichen Werth annimmt, in der zu jener Ebene normalen Richtung dagegen einen anderen, maximalen oder minimalen Werth besitzt;

3) in solche, deren Elasticitätscoëfficient in drei zu einander senkrechten Richtungen verschieden ist und mit dem Wechsel der Richtung, von irgend einer jener drei ausgehend, sich jedesmal nach einem andern Gesetze ändert.

Denken wir uns durch einen Punkt zahlreiche gerade Linien gezogen, welche verschiedene Richtungen im Krystall repräsentiren sollen, tragen wir auf jeder derselben vom gemeinsamen Schnittpunkte aus die Grössen der Biegung auf, welche ein parallel dieser Richtung aus dem Krystall geschnittenes Stäbchen von bestimmten Dimensionen durch eine bestimmte Belastung erfährt, und denken wir uns endlich alle Endpunkte dieser Strecken durch eine geschlossene krumme Oberfläche verbunden, so erhalten wir die sogenannte Elasticitätsfläche des betreffenden Krystalls. Die Gestalt dieser Flächen ist eine verschiedene für verschiedene krystallisirte Substanzen, dieselben besitzen aber innerhalb jeder der drei ge-

nannten Abtheilungen der Krystalle gewisse gemeinsame Eigenschaften, welche sich direct aus deren Elasticitätsverhältnissen ergeben. Die Elasticitätsfläche eines Krystalls der ersten Klasse besitzt drei zu einander senkrechte, gleich grosse Durchmesser, welche entweder je einem Maximum oder einem Minimum der Elasticität entsprechen; die Elasticitätsfläche eines Krystalls der zweiten Klasse hat in einer Ebene zwei oder drei gleiche Maximal- oder Minimal-Durchmesser, in der zu dieser Ebene normalen Richtung ein davon verschiedenes Minimum oder Maximum und dem entsprechenden Durchmesser: bei der Elasticitätsfläche eines Krystalls der dritten Klasse endlich sind alle drei auf einander senkrechten Durchmesser verschieden und daher keine gleichen Maximal- oder Minimaldurchmesser vorhanden.

Da die Elasticität nun gewissermaassen die Fundamentaleigenschaft eines Körpers ist, mit welcher alle übrigen physikalischen Eigenschaften desselben im Zusammenhange stehen, so können wir einen Krystall am besten definiren: als einen festen Körper, dessen Elasticität nach allen parallelen Richtungen gleich, nach verschiedenen dagegen verschieden ist. Diese Definition sagt zugleich aus, dass der Krystall in physikalischer Beziehung noch ein solcher ist, wenn auch seine äussere Form verändert, z. B. durch Zerbrechen, Abschleifen etc. ihm eine andere gegeben worden ist.

Das beschriebene Verhalten der Krystalle steht nun mit der S. 4 gemachten Annahme einer regelmässigen Lagerung der Theilchen in denselben in vollkommenem Einklang, denn wenn in einem Krystall die Entfernung der Moleküle, d. i. die Gleichgewichtslage zwischen anziehenden und abstossenden Kräften, nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene ist, so muss dies auch der Fall sein mit den anziehenden und abstossenden Kräften selbst und demzufolge mit dem Widerstand, welchen der Krystall einer Dehnung oder Zusammendrückung entgegensetzt. Da die Erfahrung ferner lehrt, dass die Elasticität in allen parallelen Richtungen eines Krystalls gleich gross ist, so folgt daraus, dass die Abstände der Theilchen auf parallelen Geraden gleich gross sein müssen, und auch dies stimmt mit der Annahme einer regelmässigen Lagerung der Krystallmoleküle überein.

Die in Fig. 1 dargestellte Anordnung entspricht offenbar der Molekularstructur eines Krystalls, dessen Elasticität in zwei auf einander senkrechten Richtungen gleich gross ist.

Amorphe Körper, wie Glas, entstehen bei dem Uebergang aus dem flüssigen in den festen Zustand nur dann, wenn dieser Uebergang schnell und unvermittelt eintritt. Findet derselbe langsam und allmählich statt, so lagern sich die Theilchen regelmässig an einander, es entsteht ein krystallisirter Körper. Hiernach müssen wir annehmen, dass in einem amorphen Medium die Theilchen unregelmässig gelagert sind, und dem widerspricht die Thatsache, dass in solchen die Elasticität an allen Stellen und in allen Richtungen gleich gross gefunden wird, keineswegs — denn bei einer unregelmässigen Lagerung der Moleküle werden zwar in unendlich kleinen Strecken die Abstände der Theilchen und somit die Elasticitäts-

verhältnisse verschieden sein, in den der Beobachtung unterworfenen endlichen Strecken aber wird nur die mittlere Elasticität des ganzen Körpers gemessen werden, und diese ist natürlich von der Richtung unabhängig.

Wie bereits erwähnt, findet die Proportionalität, auf welcher die Messung des Elasticitätsmodulus beruht, nämlich die zwischen der Grösse des Gewichtes und der durch dasselbe hervorgebrachten Aenderung des Abstandes der Theilchen, nur bis zu einer, meist sehr engen Grenze statt. Ueberschreitet man diese, so sind die Verlängerungen nicht mehr genau den sie hervorbringenden Gewichten proportional, und jenseits einer weiteren, im Allgemeinen von der vorigen wenig verschiedenen Grenze, der Elasticitätsgrenze, kehren die Theilchen nicht mehr mit dem Aufhören der Dehnung des Körpers in ihre frühere Gleichgewichtslage zurück, sondern nehmen neue an; es entstehen dauernde Formänderungen des Körpers. Die Weite der Elasticitätsgrenze ist eine sehr verschiedene für verschiedene Körper (Kautschuk, Blei). Daraus, dass der Widerstand eines Krystalls gegen mechanische Kräfte, welche die Abstände seiner Theilchen zu ändern bestrebt sind, in verschiedener Richtung ein verschiedener ist, folgt ferner, dass auch die Elasticitätsgrenze der Krystalle von der Richtung abhängig ist.

Unterwerfen wir durch Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze einen Körper dauernden Formänderungen, so findet die hierdurch bewirkte Annahme neuer Gleichgewichtslagen der Moleküle wieder nur bis zu einer bestimmten Grenze, der Festigkeitsgrenze, statt; jenseits derselben entsteht eine dauernde Trennung der Theilchen des Körpers von einander. Den Widerstand, welchen derselbe dieser Trennung entgegensetzt, nennt man seine Cohäsion.

§. 3. **Cohäsion, Härte.** Ebenso, wie die Elasticitätsverhältnisse, ist auch die Cohäsion der Theilchen eines Krystalls mit der Richtung wechselnd, und diese Eigenschaft ist sehr leicht an einem solchen zu erkennen. Nach derjenigen Richtung nämlich, oder, wenn deren mehrere vorhanden sind, nach den Richtungen, in welchen die Cohäsion ihr Minimum erreicht, findet am leichtesten eine Trennung der Theilchen statt, und zwar geschieht diese Trennung in allen parallelen Geraden gleich leicht, so dass, wenn durch Zug in jener Richtung der Krystall zerrissen wird, senkrecht zu derselben eine ebene Trennungsfläche entsteht, welche um so leichter und vollkommener darzustellen ist, je mehr die Cohäsion senkrecht dazu abweicht von derjenigen in andern Richtungen. Diese Eigenschaft, nach ebenen, durch die Molekularstructur bestimmten Flächen mehr oder weniger leicht getrennt werden zu können, eine Eigenschaft, welche sonach nur die Krystalle besitzen können, heisst Spaltbarkeit. Man stellt eine Spaltungsfläche gewöhnlich in der Weise dar, dass man in der Richtung derselben ein Messer auf den Krystall aufsetzt und auf dasselbe einen kurzen Schlag mit einem kleinen Hammer ausführt. Die als Maass der Cohäsion zu betrachtende Zugfestigkeit, d. h. das Gewicht, welches nöthig ist, um Prismen,

in bestimmten Richtungen aus dem Krystall geschnitten, zu zerreissen, ist bei den am vollkommensten spaltbaren Krystallen in differirenden Richtungen ausserordentlich verschieden; so ist jenes Gewicht z. B. bei dem Steinsalz, senkrecht zur Spaltbarkeit, also im Minimum, weniger als $^1/_3$ von der Zugfestigkeit desselben Stoffes in derjenigen Richtung, in welcher sie ihr Maximum erreicht.

Ausser den Spaltungsflächen existiren in den Krystallen noch andere Ebenen, ausgezeichnet dadurch, dass parallel denselben ein Gleiten der Theilchen an einander mit besonderer Leichtigkeit stattfinden kann, so dass, wenn der Krystall z. B. gepresst wird, die Theilchen desselben sich längs einer solchen Ebene gegen einander verschieben, zuweilen sogar eine vollständige Trennung nach derselben stattfindet. Diese Ebenen wurden von Reusch, welcher zuerst auf ihre Existenz hinwies, Gleitflächen genannt. Sie entstehen bei gewissen Krystallen als Trennungsflächen, wenn man auf deren Oberfläche die Spitze eines Stahlconus (besonders eignet sich hierzu der Körner der Metallarbeiter) aufsetzt und durch einen kurzen Schlag mit einem Hämmerchen eintreibt. Man erhält durch diese sogenannte Körnerprobe in einer oder mehreren Richtungen geradlinige Sprünge, von der Schlagstelle ausstrahlend, welche gewöhnlich den Gleit-, nicht den Spaltungsflächen entsprechen (das Nähere darüber folgt bei Besprechung der einzelnen, in dieser Beziehung besonders studirten Körper: Steinsalz, Kalkspath, Gyps).

Endlich zeigt sich die Verschiedenheit der Cohäsion mit der Richtung im Krystall auch durch die Härte, d. h. den Widerstand, welchen seine Oberfläche dem Ritzen durch einen härteren Körper entgegensetzt. Diese ergiebt sich nämlich verschieden in verschiedenen Richtungen bei allen Krystallen, und zwar um so mehr, je verschiedener die Cohäsion in verschiedenen Richtungen ist, d. h. je vollkommnere Spaltbarkeit der Krystall besitzt. Wird eine Fläche desselben, zu welcher normal eine oder mehrere Spaltungsebenen existiren, nach verschiedenen Richtungen geritzt, so ergiebt sich die Härte am geringsten beim Ritzen parallel einer solchen Spaltungsebene. Exner (»Untersuchungen über die Härte an Krystallflächen, Wien 1873«) hat dies durch eine grosse Reihe von Messungen nachgewiesen. Dieselben sind so angestellt, dass eine ebene Krystallfläche unter einer darauf ruhenden, mit Gewichten belasteten Spitze fortgezogen wurde (der Krystall lag zu diesem Zwecke auf einem kleinen Wagen) und man das niedrigste Gewicht bestimmte, welches eben noch die Spitze den Krystall ritzen liess. Nimmt man die Härte diesen Gewichten proportional und trägt sie von einem Punkte aus auf den Richtungen des Ritzens auf, so geben die Endpunkte dieser Radien die Härtecurve*) der betreffenden Krystallfläche.

*) Stehen z. B. senkrecht zu der untersuchten Fläche zwei, einander unter 90° schneidende, gleich vollkommene Spaltungsebenen, so hat die Härtecurve die Gestalt einer vierseitigen Rosette, welche in den Richtungen der Spaltungsflächen vier Minima, unter 45° dazwischen vier Maxima besitzt.

Der zu diesen Versuchen benutzte und seinem Princip nach soeben erläuterte Apparat wurde zuerst von Seebeck construirt und wird »Sklerometer« genannt. Derselbe gestattet zwar die relative Härte verschiedener Richtungen auf einer und derselben Krystallfläche mit einiger Genauigkeit zu bestimmen, aber nicht die Härte verschiedener Flächen eines Krystalls und diejenige verschiedener krystallisirter Substanzen mit einander zu vergleichen. Um dies zu ermöglichen, d. h. um absolute Härtebestimmungen auszuführen, construirte neuerdings Pfaff einen anderen Apparat, welcher darauf beruht, dass durch einen Diamantsplitter von bestimmter Gestalt, welchen man mit constanter Belastung 100—500 Mal in derselben Richtung über eine Krystallfläche wegführt, um so mehr Substanz von derselben abgehobelt wird (die Quantität wird durch den stattgehabten Gewichtsverlust des Krystalls bestimmt), je geringer die Härte derselben. Auf diesem Wege bestätigt es sich, dass nicht nur die verschiedenen Richtungen innerhalb einer Fläche, sondern auch verschiedene Flächen eines Krystalls eine oft sehr grosse Differenz der Härte zeigen. Gleichheit der Härte besitzen die Krystalle nur in krystallographisch gleichwerthigen Richtungen.

§. 4. **Aetzfiguren.** Mit der Abhängigkeit der Cohäsion von der Richtung in den Krystallen hängt es ferner zusammen, dass dieselben auch der Auflösung nach verschiedenen Richtungen einen ungleichen Widerstand entgegensetzen. Lässt man auf eine Fläche eines in Wasser löslichen Krystalls, z. B. von Steinsalz, einen senkrechten (am besten aufwärts gerichteten) dünnen Wasserstrahl einwirken, so entsteht auf der Krystallfläche nicht eine kreisförmige, sondern eine eckige Vertiefung (Lösungsfigur) von bestimmter Gestalt und Orientirung, eine Thatsache, welche beweist, dass die durch das Lösungsmittel bewirkte Trennung der Theilchen nach gewissen Richtungen im Krystall leichter stattfindet, also rascher vorschreitet, als nach anderen. Wird der ganze Krystall in das Lösungsmittel eingetaucht, so beginnt die Auflösung gleichzeitig an vielen, regellos vertheilten Punkten und schreitet von jedem derselben aus nach verschiedenen Richtungen verschieden schnell fort, und so entstehen regelmässig begrenzte Vertiefungen, welche man »Aetzfiguren« nennt. Dieselben sind besonders dann scharf begrenzt, wenn sie durch eine sehr langsame Wirkung des Lösungsmittels hervorgebracht werden; da bei fortgesetzter Einwirkung des letzteren immer neue entstehen, und die früheren, grösser werdend, in einander verfliessen, so ist es im Allgemeinen vortheilhaft, den Process zu einer Zeit zu unterbrechen, in welcher die einzelnen Figuren nur geringe Dimensionen erreicht haben, daher zu ihrer Beobachtung häufig das Mikroskop erforderlich ist.

Vergleicht man nun die so auf einer Fläche eines Krystalls entstandenen Aetzfiguren, so erkennt man, dass dieselben sämmtlich von gleicher Gestalt und Orientirung sind. Auf krystallographisch gleichwerthigen Flächen erhält man ferner übereinstimmende, auf ungleichwerthigen Flächen desselben Krystalls dagegen verschieden gestaltete Figuren. Bei allen Körpern

ferner, welche überhaupt deutliche und scharf begrenzte Aetzfiguren liefern, stehen dieselben ihrer Form und Stellung nach in Uebereinstimmung mit der Symmetrie der Flächen, auf denen sie erscheinen, so dass sie in solchen Fällen als ein nicht unwesentliches Hülfsmittel zur Controle bei der Bestimmung der Symmetrieverhältnisse der Krystalle dienen können.

Wie die Erfahrung gelehrt hat, hängt aber die Gestalt der Aetzfiguren auf einer bestimmten Fläche eines Krystalls nicht allein von der Natur des letzteren ab, sondern auch von der des angewandten Lösungsmittels, da eine andere Flüssigkeit bei gewissen Krystallen anders gestaltete Aetzfiguren hervorbringt, für welche jedoch ebenfalls die angeführten allgemeinen Gesetzmässigkeiten gelten.

Dass eine krystallisirte Substanz nach verschiedenen Richtungen nicht gleich stark von einem Lösungsmittel angegriffen wird, geht auch in sehr instructiver Weise aus dem Versuche Lavizzari's hervor, welcher eine Kugel von Kalkspath in concentrirter Salpetersäure sich auflösen liess und beobachtete, dass dieselbe nicht ringsum gleichmässig an Durchmesser abnahm, sondern sich allmählich in eine hexagonale Pyramide verwandelte. Wie ausserordentlich verschieden schnell die Auflösung ungleichartiger Flächen desselben Krystalls vor sich geht, wies derselbe Beobachter auch dadurch nach, dass er die aus dem Kalkspath entweichende Kohlensäure in jedem Falle getrennt ihrer Menge nach bestimmte und fand, dass gewisse Flächen unter denselben Umständen die siebenfache Kohlensäuremenge lieferten, als andere.

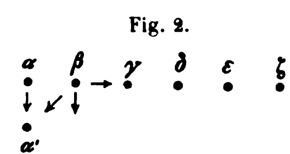
Gesetze der Schwingungsbewegungen.

§. 5. **Begriff der Schwingungsbewegung.** Die physikalischen Einwirkungen auf die Körper bestehen im Allgemeinen in Bewegungen derselben oder ihrer Moleküle. Wird ein einzelnes Theilchen, in Folge der anziehenden Kräfte von anderen festgehalten, durch einen Impuls aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, so bewegt es sich in Folge jenes Impulses mit einer l ... nten Geschwindigkeit, welche indess, da die anziehenden Kräfte der ... n Theilchen fortdauernd auf dasselbe wirken, immer mehr abnimmt und in einem gewissen Abstand gleich Null wird, worauf das Theilchen, ... nunmehr die anziehenden Kräfte immer stärker überwiegen, mit bel... nigter Geschwindigkeit in seine ursprüngliche Ruhelage zurückkehrt. ... gt das Theilchen, da die Beschleunigung auf dem Rückwege ganz ... wirkt wurde, als die Verzögerung auf dem Hinwege, mit der... Geschwindigkeit an, als diejenige war, mit welcher es sich davon ... hatte, verhält sich also ebenso, als ob es einen Impuls von der... schaffenheit, aber von der entgegengesetzten Richtung, empfangen ... e, d. h. es bewegt sich ganz ebenso, wie vorhin, nach der entgegen... ten Seite von der Ruhelage mit abnehmender Geschwindigkeit, zu-

rück mit zunehmender, u. s. f. Eine solche hin- und hergehende Bewegung nennt man eine Schwingung. Ihre Weite, also der während derselben von dem Theilchen zurückgelegte Weg, heisst die Maximalamplitude oder schlechtweg die Amplitude der Schwingung; der Schwingungszustand des Theilchens in einem bestimmten Moment, gegeben durch den Abstand von der Ruhelage, durch die Geschwindigkeit und die Richtung der Bewegung, heisst die Phase; endlich die Zeit, welche zur Ausführung einer ganzen Schwingung, d. h. bis zur nächsten Wiederkehr derselben Phase vergeht, die Schwingungsdauer. Die Amplitude hängt ab von der Anfangsgeschwindigkeit, mit welcher das Theilchen aus der Ruhelage entfernt wird, und ist dieser Geschwindigkeit proportional. Da nämlich die im Folgenden zu betrachtenden Schwingungen so kleine Amplituden besitzen, dass dieselben innerhalb derjenigen Grenzen fallen, in welchen eine Proportionalität zwischen Verschiebung und Kraft stattfindet, so wird ein Theilchen, welches doppelt so weit aus seiner Gleichgewichtslage entfernt ist, mit doppelter Kraft nach dieser zurückgezogen, d. h. es muss demselben durch den ersten Impuls die doppelte Anfangsgeschwindigkeit verliehen werden, um die Amplitude zu verdoppeln. Da demnach die Amplitude mit der Anfangsgeschwindigkeit proportional wächst, so wird bei dem angezogenen Beispiel der doppelte Weg mit der doppelten Geschwindigkeit, also in derselben Zeit zurückgelegt werden, d. h. die Dauer einer Schwingung bleibt immer constant, wie gross auch Anfangsgeschwindigkeit und Amplitude seien.

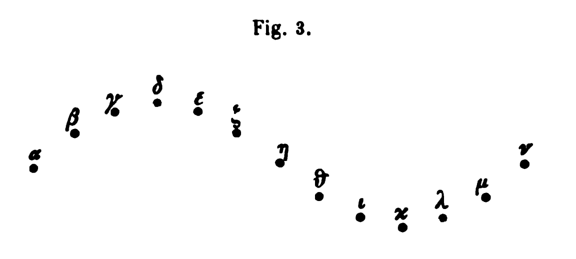
Befindet sich eine geradlinige Reihe von kleinsten Theilchen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ (Fig. 2), welche wir als materielle Punkte betrachten wollen, in Ruhe, so halten sich alle zwischen ihnen wirkenden anziehenden und abstossenden Kräfte das Gleichgewicht. Wird α durch einen Impuls aus seiner Ruhelage seitlich entfernt, so ist dieses Gleichgewicht gestört, es überwiegt die Anziehung zwischen α und β die Abstossung; die Theilchen müssen streben, sich einander zu nähern; α wird in seiner neuen Stellung α' nicht nur von β zurückgezogen, sondern dieses wird auch nach α' hingezogen werden, und zwar um so mehr, je grösser der Widerstand gegen eine Aenderung des Abstandes der Theilchen, d. h. je grösser die Elasticität der Punktreihe ist. Gegen die Bewegung von β nach α' hin wirkt aber die Anziehung von γ, so dass β, vermöge dieser beiden Anziehungen von α' und von γ, eine mittlere Bewegungsrichtung, nämlich die parallel $\alpha\alpha'$, einschlägt. In derselben Weise wird hierauf das Theilchen γ durch die Bewegung von β veranlasst, sich nach derselben Richtung hin zu bewegen, u. s. f. alle folgenden. Wenn die Bewegung sich bis zu einem bestimmten Theilchen ν Fig. 3, welches eben seine Bewegung beginnt, fortgepflanzt hat, so bildet in diesem Moment die vorher geradlinige Punktreihe eine Welle, bestehend aus einem Wellenberg und einem gleich langen Wellenthal.

Fig. 2.



Eine derartige Bewegung nennt man eine Wellenbewegung; den Abstand $\alpha\nu$, bis zu welchem sich dieselbe fortgepflanzt hat, während das erste Theilchen eine ganze Schwingung ausführte, eine Wellenlänge, und bezeichnet sie mit λ. Diese Grösse ist offenbar proportional sowohl der Geschwindigkeit, mit der sich die Bewegung fortpflanzt, als auch der Schwingungsdauer, denn wenn eine Wellenbewegung dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber die doppelte Schwingungsdauer hätte, so müsste sich dieselbe doppelt so weit fortgepflanzt haben, während das erste Theilchen eine ganze Schwingung vollführt: ebenso müsste aber λ doppelt so gross werden, wenn bei gleicher Schwingungsdauer die Fortpflanzung der Bewegung doppelt so schnell vor sich ginge. Innerhalb einer Wellenlänge sind alle Phasen der Bewegung neben einander vorhanden, welche ein und dasselbe Theilchen während der Dauer einer Schwingung nach einander besitzt. Alle Punkte, welche um eine halbe Wellenlänge von einander abstehen, befinden sich in entgegengesetztem Schwingungszustand, ihre Phasendifferenz ist gleich $\frac{1}{2}\lambda$.

Fig. 3.

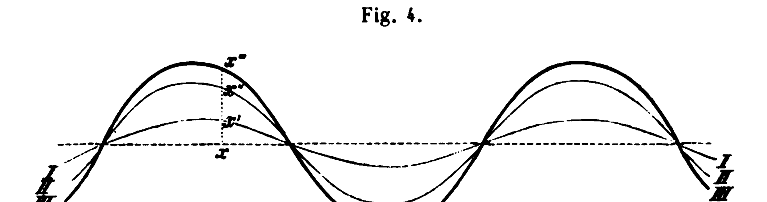


Hat sich die Bewegung durch eine grössere Reihe von Punkten fortgepflanzt, so bilden diese nunmehr einen Wellenzug, der in eine Anzahl Wellenlängen getheilt erscheint, welche gleich lang sind, wenn die Verhältnisse auf der ganzen Punktreihe, also auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, dieselben bleiben. Die Bahn, in welcher sich die einzelnen Theilchen bewegen, hängt ab von der Richtung, in der das erste aus seiner Ruhelage entfernt wurde. Ist diese Richtung, bei geradliniger Bewegung, parallel der Punktreihe, so werden sich die Theilchen abwechselnd nähern und entfernen; dann nennt man die Schwingung longitudinale. Bildet die Schwingungsrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung einen Winkel (in dem obigen Beispiel einen rechten), so heissen die Schwingungen transversale.

§. 6. Interferenz der Wellenbewegungen. Wenn ein Theilchen von zwei Wellenbewegungen, welche die gleiche Schwingungsdauer besitzen, zugleich ergriffen wird, so führt es eine Bewegung aus, welche nach dem Gesetz des Parallelogramms der Kräfte aus den einzelnen Bewegungen sich zusammensetzt; es gelangt also nach einer bestimmten Zeit an einen Punkt, wohin es die einzelnen Kräfte gebracht haben würden, wenn sie nach einander ebenso lange gewirkt hätten. Die Zusammensetzung zweier solcher Partialbewegungen zu einer resultirenden nennt man Interferenz der Wellenbewegungen. Der einfachste Fall der Interferenz besteht darin, dass die sich zusammensetzenden (interferirenden) Wellen sich in derselben Richtung fortpflanzen, und ihre Schwingungen senkrecht dazu und in derselben

Ebene stattfinden. Gehen die Wellenbewegungen von verschiedenen Punkten der Reihe aus, so ist die Phase, mit der sie an einem Punkte zur Interferenz gelangen, im Allgemeinen verschieden. Sind die Ausgangspunkte der Bewegung aber genau ein Vielfaches einer ganzen Wellenlänge von einander entfernt, so interferiren die Wellenzüge an jedem Punkte mit gleicher Phase. Bezeichnet in Fig. 4 *I* den Zustand, in welchem die Punktreihe in einem bestimmten Augenblicke sich befinden würde, wenn die

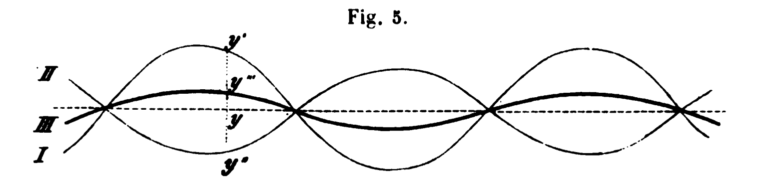
Fig. 4.



erste der interferirenden Wellenbewegungen allein vorhanden wäre, *II* denjenigen, wenn die zweite allein wirkte, so ist *III* der Zustand der Punktreihe in Folge der aus beiden resultirenden Wellenbewegung, denn irgend ein Punkt x würde vermöge der ersten Theilbewegung sich bis x', vermöge der zweiten bis x'' bewegt haben, also muss er sich nunmehr in einem Abstande xx''' von der Ruhelage befinden, welcher gleich ist der Summe der durch die einzelnen Bewegungen hervorgebrachten Abstände xx' und xx''. Es resultirt aus der Interferenz also eine Wellenbewegung von derselben Phase, deren Amplitude die Summe der Schwingungsweiten der sich zusammensetzenden Bewegungen ist.

Kommen zwei interferirende Wellenbewegungen von zwei Punkten her, welche einen Abstand von $\frac{1}{2}\lambda$ oder einem ungeraden Vielfachen dieser Grösse haben, so wirken sie auf jedes von ihnen gleichzeitig ergriffene Theilchen in entgegengesetztem Sinne; der Punkt y in Fig. 5 z. B. würde durch die

Fig. 5.

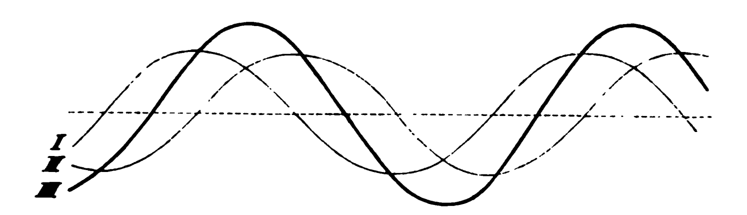


Bewegung *I* allein nach oben bis y' getrieben worden sein, dagegen bis y'' nach unten, wenn *II* allein gewirkt hätte, folglich muss sein Abstand yy''' von der Ruhelage nach Einwirkung der Partialbewegungen die Differenz beider Abstände sein. Es resultirt also aus der Interferenz zweier Wellenbewegungen von $\frac{1}{2}\lambda$ Phasendifferenz eine einzige Wellenbewegung (*III* in Fig. 5), deren Phase gleich derjenigen der stärkeren der beiden sich zusammensetzenden Wellenbewegungen, und deren Amplitude gleich der

Differenz der Schwingungsweiten derselben ist. In dem besonderen Falle, dass die beiden interferirenden Wellenbewegungen gleiche Amplituden haben, ist diejenige der resultirenden = 0, d. h. die beiden Bewegungen vernichten sich gegenseitig vollständig.

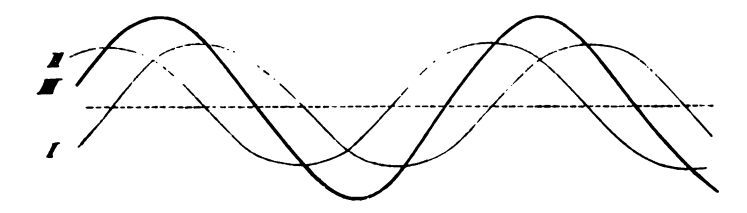
Ist die Phasendifferenz eine andere, als 0 oder $\frac{1}{2}\lambda$, so resultirt durch Interferenz eine Wellenbewegung von anderer Phase und anderer Amplitude.

Fig. 6.



Ist z. B. die Verschiedenheit des Schwingungszustandes = $\frac{1}{4}\lambda$, so ist die resultirende Bewegung gegen beide Wellenzüge (wenn sie gleiche Amplitude besitzen) um $\frac{1}{8}\lambda$ verschoben, wie aus Fig. 6 leicht ersichtlich. In der entgegengesetzten Richtung um ebenso viel verschoben ist die durch Interferenz entstehende Welle, wenn die beiden Wellenzüge eine Phasendifferenz von $\frac{3}{4}\lambda$ besitzen, s. Fig. 7.

Fig. 7.



Die Intensität der durch Interferenz erzeugten Wellenbewegungen kann also die verschiedensten Werthe haben, zwischen Null und der Summe der Intensitäten der interferirenden Bewegungen, je nach der Phasendifferenz derselben.

§. 7. **Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegungen.** Gehen wir nunmehr von der Betrachtung einer Punktreihe zu der eines Körpers über, d. h. eines mit Massentheilchen erfüllten Raumes, wobei die Theilchen sich in ihren Gleichgewichtslagen befinden, so wird deren Gleichgewicht gestört werden, sobald eines der Theilchen aus seiner Ruhelage entfernt wird. Wir können das ganze den Raum erfüllende Punktsystem betrachten als zusammengesetzt aus einzelnen Punktreihen, welche radienförmig von jenem, aus seiner Gleichgewichtslage entfernten Theilchen ausgehen. Da dasselbe allen jenen Punktreihen zugleich angehört, so muss,

wenn es in oscillirende Bewegung versetzt wird, diese auch auf allen Punktreihen sich fortpflanzen. Die Geschwindigkeit, mit welcher dies erfolgt, wird offenbar abhängen zunächst von der Elasticität e, d. h. von dem Widerstande, den die Theilchen einer jeden Punktreihe einer Verschiebung, d. i. Veränderung ihres Abstandes, entgegensetzen, ausserdem aber auch von der in Bewegung zu setzenden Masse, und zwar wird sie mit der grösseren Dichtigkeit d (= Masse in der Volumeneinheit, s. S. 4) abnehmen. Die Mechanik lehrt nun, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einer Wellenbewegung in einem Medium, dessen Elasticität in der Richtung der Verschiebung der Theilchen $= e$ und dessen Dichte $= d$, beträgt (wenn beide Zahlen auf dieselbe Einheit bezogen angegeben werden):

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Ist die Dichtigkeit eines Körpers an allen Stellen die gleiche und die Elasticität innerhalb jeder einzelnen Punktreihe constant, so ist es auch $\sqrt{\frac{e}{d}}$, d. h. eine Wellenbewegung pflanzt sich in jeder Richtung in dem Medium mit constanter Geschwindigkeit fort. Die oscillirende Bewegung in einem solchen System kann also unmittelbar betrachtet werden, wie die Schwingungen in einzelnen Punktreihen. Ein solches Medium nennt man ein homogenes. Unter den homogenen Substanzen sind zweierlei zu unterscheiden:

1. Isotrope, d. h. solche, in denen die Elasticität e nicht nur auf jeder Punktreihe einen constanten Werth besitzt, sondern auch die gleiche ist für alle Punktreihen; in diesen Medien pflanzt sich demnach eine Wellenbewegung nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fort.

2. Anisotrope oder heterotrope, d. s. solche, in denen die Elasticität zwar innerhalb einer Punktreihe ihre Constanz bewahrt, in verschiedenen Reihen von abweichender Richtung jedoch einen andern Werth besitzt, so dass die Geschwindigkeit einer Wellenbewegung sich ändert mit der Richtung, in welcher sie sich in dem Körper fortpflanzt.

Da nun nach S. 6 die Elasticität nur bei den amorphen Körpern von der Richtung unabhängig ist, so können auch nur diese isotrop sein. In den Theilchen eines derartigen Mediums, z. B. in Glas, pflanzt sich somit eine Wellenbewegung nach allen Richtungen gleich schnell fort.

Die krystallisirten Medien dagegen sind sämmtlich anisotrop, da in allen Krystallen die Elasticität mit der Richtung sich ändert, in Folge dessen auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung eine verschiedene ist in verschiedenen Richtungen.

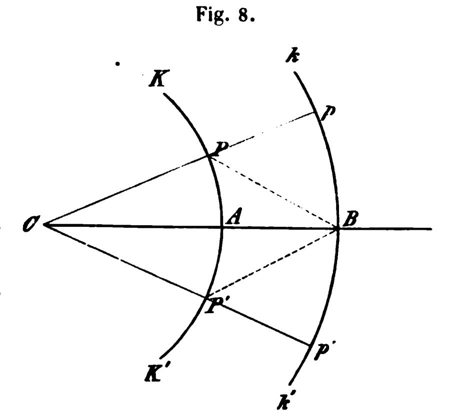
Der experimentelle Beweis dafür, dass selbst diejenigen Krystalle, welche die einfachste und regelmässigste Art der Lagerung der Theilchen besitzen, nämlich die gleiche nach drei auf einander senkrechten Richtungen, doch in den dazwischen liegenden eine Wellenbewegung mit anderer Geschwindigkeit fortpflanzen, wurde geliefert durch die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit im Steinsalz in zwei 45° mit einander bildenden Rich-

tungen (Groth) und indirect durch die Verschiedenheit der Klangfiguren, welche Platten von gleichen Dimensionen, nach verschiedenen Ebenen aus Krystallen geschnitten, lieferten (Savart).

§. 8. Ausbreitung der Wellenbewegung in einem homogenen isotropen Medium. Wellenfläche. Beginnt in einem isotropen Medium an irgend einer Stelle eine Wellenbewegung von bestimmter Schwingungsdauer, so werden, da sich dieselbe nach allen Richtungen gleich schnell fortpflanzt, nach Ablauf einer ganzen Schwingungsdauer T alle Punkte, welche von jener Stelle um eine Wellenlänge λ abstehen, d. h. alle Punkte einer Kugeloberfläche vom Radius λ, gleichzeitig ihre Bewegung beginnen. Nach der Zeit $2T$ werden dies alle auf einer Kugelfläche mit dem Radius 2λ thun, während die vorigen in demselben Moment ihre zweite Schwingung beginnen, u. s. f. Wie sich eine Punktreihe durch die Schwingungsbewegung in eine Anzahl gleicher Wellenlängen theilt, so theilt sich dadurch ein schwingendes Punktsystem in eine Anzahl Kugelschalen, deren Abstand $= \lambda$ ist, in welchen alle gleichweit von der Grenze zweier Schalen nach derselben Seite abstehenden Punkte gleiche Oscillationsphase haben. Tragen wir vom Ausgangspunkt der Bewegung aus nach allen Seiten Längen ab, welche der Wellenlänge proportional sind, so bilden deren Endpunkte eine Oberfläche, welche man die Wellenfläche der von dem ersten Punkte ausgehenden Bewegung nennt. Dieselbe enthält alle Punkte, welche gleichzeitig ihre Bewegung beginnen.

In isotropen Körpern sind nach dem Gesagten die Wellenflächen stets kugelförmig; in anisotropen dagegen können sie dies nicht sein, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und daher auch die ihr proportionale Wellenlänge nach verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe besitzen; ihre Gestalt wird davon abhängen, nach welchen Gesetzen sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung mit der Richtung in dem Medium ändert.

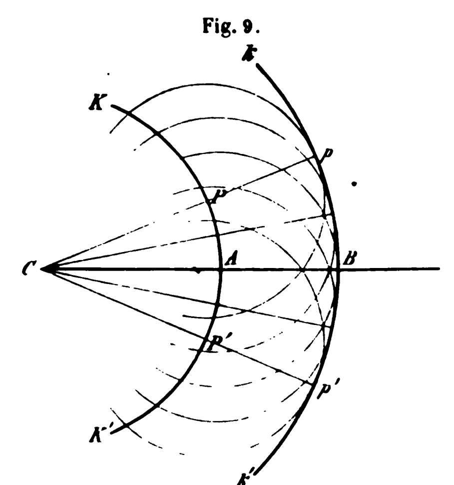
Fig. 8.



Betrachten wir zunächst nur den einfacheren Fall der isotropen Körper, so wird in einem solchen eine Wellenbewegung, welche von dem Punkte C Fig. 8 ausgegangen ist, nach einer bestimmten Zeit auf der Oberfläche einer Kugel KK' angelangt sein. Jeder Punkt derselben, z. B. P, beginnt in diesem Augenblicke seine Bewegung, und da derselbe, ebenso wie der Punkt A, gleichzeitig auf allen möglichen von ihm ausgehenden Punktreihen liegt, so muss er in allen diesen das Gleichgewicht stören, d. h. es muss von ihm nach allen Seiten eine gleiche Wellenbewegung ausgehen. Da also jeder bewegte Punkt eines solchen

Systems selbst wieder Mittelpunkt einer neuen Wellenfläche ist, so wird nach dem Punkte B auf einer Kugelfläche kk', deren Punkte später ihre Bewegung beginnen, nicht nur Bewegung von A aus gelangen, sondern auch von allen andern Punkten der ersten Kugelfläche KK'. Um die Wirkung, welche diese sämmtlichen Bewegungen auf diejenige des Punktes B hervorbringen, zu beurtheilen, muss man die Entfernung der Punkte, von denen sie ausgehen, von B in Rücksicht ziehen. Betrachtet man die Kugel KK' von B aus, und denkt sich auf derselben Kreise von verschiedenem Durchmesser um den Punkt A (wie die Breitengrade um den Nord- oder Südpol der Erde) gezogen, so stehen alle Punkte eines solchen Kreises offenbar gleich weit von B ab, die verschiedenen Kreise dagegen besitzen verschiedene Entfernung von B. Zu jedem Kreise denke man sich ferner denjenigen construirt, dessen Entfernung von B genau um $\frac{1}{2}\lambda$ grösser ist; die beiden Bewegungen, welche je von einem Punkte des einen und dem entsprechenden des andern ausgehend in B zusammenkommen, werden sich durch Interferenz vollständig vernichten und in B gar keine Bewegung hervorbringen. Vergleicht man nun die Wirkung aller dieser kreisförmigen Zonen der Kugelfläche KK' auf den Punkt B, mit Berücksichtigung ihres Flächeninhaltes, so findet man als Gesammtresultat, dass die Wirkungen aller Theile derselben durch diejenigen anderer völlig vernichtet werden, mit Ausnahme der Bewegung, welche vom Punkte A ausgeht.*) Nach B gelangt also nur diejenige Schwingungsbewegung, welche von A ausging, diese allein setzt B in Bewegung. Da das Gleiche für jeden Punkt gilt, so wird nicht nur von der Bewegung, welche von A ausgehend sich in einer bestimmten Zeit bis zur Kugeloberfläche kk' fortgepflanzt haben müsste, bloss die Bewegung in B eine Wirkung ausüben, sondern auch von P wird nur nach p, statt nach allen Seiten, von P' aus nur nach p' Bewegung mitgetheilt u. s. f. Wenn also auch jeder Punkt einer Wellenfläche Mittelpunkt einer neuen Wellenfläche ist, so gelangt seine Bewegung doch nur an denjenigen Punkt der letzteren, in welchem diese berührt wird von derjenigen Oberfläche, welche alle diese Wellenoberflächen der einzelnen Punkte umhüllt. Diese umhüllende Wellenfläche ist in Fig. 9 die Kugeloberfläche kk', die Wellenfläche in dem späteren Moment. Die soeben beschriebene Construction, die Huyghens'sche genannt, wird

Fig. 9.



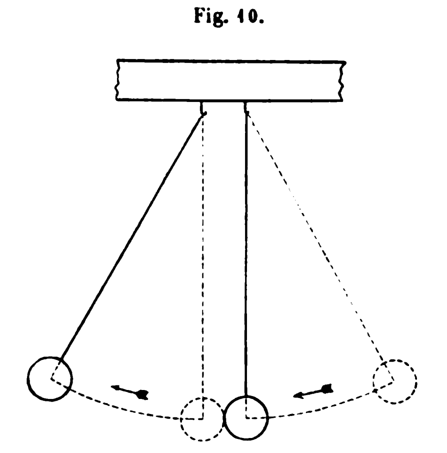
*) Ein ausführlicher Beweis hierfür findet sich z. B. in Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphysik in dem Abschnitte von der Wellenbewegung.

weiterhin noch mehrfach benutzt werden, um die Wellenflächen und damit die Lage der Strahlen, d. h. der Verbindungsgeraden der Centren der einzelnen Wellenflächen mit den Punkten, in welchen sie von der umhüllenden Fläche tangirt werden (*AB*, *Pp*, *P'p'* Fig. 9.), zu finden.

§. 9. **Reflexion und Brechung der Wellen.** Nicht homogen oder heterogen nennen wir ein Medium, wenn dasselbe an verschiedenen Stellen verschiedene Dichtigkeit besitzt, und daher eine Wellenbewegung sich in demselben in einer bestimmten Richtung nicht mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzen kann. Wir können einen solchen Körper als aus verschiedenen homogenen Medien zusammengesetzt betrachten (aus um so zahlreicheren, je rascher die Dichtigkeit sich in demselben ändert) und eine darin sich fortpflanzende Wellenbewegung auf eine solche in einem homogenen Medium zurückführen, sobald wir wissen werden, welche Aenderung eine derartige Bewegung beim Uebergang aus einem Medium in ein anderes erfährt.

Da eine Wellenbewegung in der Fortpflanzung eines Stosses besteht, so kann man sich eine Vorstellung verschaffen von den Vorgängen bei einem solchen Uebergang aus einem Medium in ein zweites von anderer Dichtigkeit durch diejenigen Erscheinungen, welche bei der Fortpflanzung eines directen Stosses zwischen zwei elastischen Körpern von endlicher Grösse und von verschiedener Dichtigkeit stattfinden. Diese Erscheinungen beobachtet man mittelst des sogenannten ballistischen Pendels (Fig. 10), bestehend aus zwei neben einander aufgehängten elastischen Kugeln, von denen man die eine gegen die andere fallen lässt. Bestehen dieselben aus der gleichen Substanz und sind sie von gleicher Grösse, so überträgt beim Anprall die fallende Kugel ihre ganze Bewegung an die zweite, welche sich nun so fortbewegt, wie es die erste gethan hätte, wenn kein Widerstand vorhanden gewesen wäre (s. Fig. 10). Ist dagegen die fallende Kugel dichter, d. h. besitzt sie in dem gleichen Volumen eine grössere Masse, als die andere, so verleiht sie nicht nur dieser dieselbe Bewegung, wie im ersten Falle, sondern sie bewegt sich auch selbst noch in gleicher Richtung über die Ruhelage hinaus. Ist endlich die erste Kugel weniger dicht, so bewegt sie zwar die zweite, erhält aber selbst beim Zusammenstoss eine rückwärts gerichtete Bewegung.

Fig. 10.



Uebertragen wir nunmehr diese Vorstellungen auf die Fortpflanzung von Vibrationen an der Grenze zweier Medien, in welchen der Werth von $\sqrt{\frac{e}{d}}$

ein verschiedener ist, so wird sich die Bewegung in dem zweiten Medium, entsprechend dem Werthe von $\sqrt{\frac{e}{d}}$, fortpflanzen, zugleich aber auch im ersten eine Bewegung übrig bleiben.

Ist das zweite Medium z. B. weniger dicht, und ein Punkt des ersten an der Grenze beider hat in einem gegebenen Momente eine bestimmte Bewegung, so wird ein Theil derselben genügen, dem benachbarten Punkte des zweiten Mittels die gleiche Bewegung zu ertheilen, da dessen Massentheilchen ja mit geringerer Kraft in die Ruhelage zurückgezogen werden. Der an der Grenze befindliche Punkt des ersten Mediums überträgt also an den nächsten Punkt des zweiten nicht seine ganze Bewegung, sondern behält einen Theil derselben, d. h. er verhält sich ebenso, als ob er die Bewegung ganz übertragen, selbst aber einen Impuls in derselben Richtung empfangen hätte. Die Folge davon, dass der Punkt des ersten Mittels sich mit unverändertem Schwingungszustand weiter bewegt, ist, dass von ihm ausgehend in demselben Medium sich eine Wellenbewegung rückwärts fortpflanzt, welche an einem bestimmten Punkte genau dieselbe Phase besitzt, als ob sie sich um ebenso viel, als dieser letztere Punkt von der Grenze absteht, jenseits derselben fortgepflanzt hätte.

Ist dagegen das zweite Medium das dichtere, dessen Theilchen mit grösserer Kraft in die Ruhelage zurückgezogen werden, so wirken diese auch mit einer solchen Kraft auf ein an der Grenze befindliches Theilchen des ersteren Mittels, seiner Bewegung entgegen, dass dasselbe nicht nur seine ganze Bewegung auf die Massentheilchen des zweiten Mediums überträgt, sondern selbst noch einen seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzten Impuls erhält. In Folge dessen wird es zum Mittelpunkt einer neuen Wellenbewegung von genau entgegengesetzter Phase, welche sich demgemäss im ersten Medium fortpflanzt.

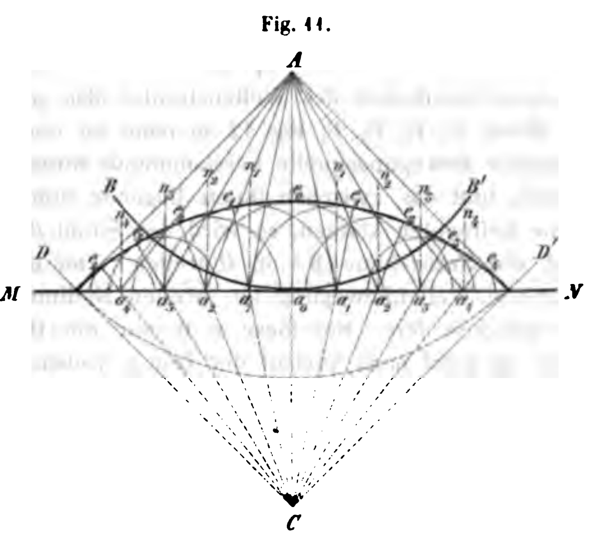
Sobald also der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ in zwei Substanzen einen verschiedenen Werth besitzt, demnach eine Wellenbewegung sich in denselben mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzt, wird dieselbe an der Grenze in zwei zerlegt, von denen die eine rückwärts in das erste Mittel zurückgeworfen (reflectirt) wird, die andere in das zweite eindringt.

In dem einfachsten Falle, dass beide Körper isotrop sind, giebt uns die Huyghens'sche Construction das Mittel, die Richtung sowohl der reflectirten, als der eindringenden Welle zu bestimmen:

1) Richtung der reflectirten Welle: Sei MN Fig. 11 der Durchschnitt der Grenzfläche (also einer Ebene) zwischen den beiden Medien mit der Ebene der Zeichnung, und gehe die Wellenbewegung von dem Punkte A aus. Nach einer bestimmten Zeit wird sie sich bis zur Kugeloberfläche BB', welche die Grenzfläche in a_0 berührt, fortgepflanzt haben. Von diesem Augenblick ab giebt der Wellenstrahl Aa_0 Anlass zu einer reflectirten Bewegung, welche nach Verlauf der Zeit t auf irgend einem Punkte der

Kugeloberfläche angelangt ist, welche mit dem Radius $a_0 e_0$ um a_0 beschrieben ist, soweit sie noch in das erste Medium fällt. Dies Letztere ist der Fall mit der Hälfte dieser, der Wellenfläche des reflectirten Strahls. Der Strahl $A a_1$ trifft die Grenzfläche MN erst in einem etwas späteren Augenblicke, und nach der Zeit t wird somit die aus diesem entstandene reflectirte Welle um so viel weniger weit sich rückwärts in das erste Medium fortgepflanzt haben, als die Strecke betrug, welche sie von Beginn der Zeit t an noch zurückzulegen hatte, um an die Grenzfläche zu gelangen. Die Wellenfläche des an a_1 reflectirten Strahls wird demnach die mit dem Radius $a_1 e_1$ um a_1 beschriebene Halbkugel sein. Der Strahl $A a_2$ trifft die Grenze noch später, der davon reflectirte Antheil der Bewegung wird sich also in derselben Zeit bis zu irgend einem Punkte der noch kleineren Halbkugel um a_2 fortgepflanzt haben, u. s. f. Die gemeinschaftliche Wellenfläche aller der von A ausgehenden Strahlen ist nach der Huyghens'schen Construction die Oberfläche, welche alle einzelnen Wellenflächen umhüllt; diese Oberfläche ist, wenn man die durch Fig. 11 erläuterte Vorstellung von der Ebene auf den Raum überträgt, offenbar eine Kugelfläche, deren Radius $= A a_0 + a_0 e_0 = C e_0$, d. h. genau so gross ist, wie der Halbmesser derjenigen Kugel $D D'$, bis zu deren Oberfläche die Bewegung nach der Zeit t gelangt wäre, wenn das untere Medium sich nicht von dem obern unterschiede. Die Richtung der reflectirten Strahlen selbst erhalten wir nunmehr, wenn wir die Centren aller einzelnen Wellenflächen geradlinig verbinden mit den Punkten, in welchen dieselben von der umhüllenden Fläche berührt werden. Der Strahl $A a_0$ wird also in der Richtung $a_0 e_0$, der Strahl $A a_1$ in $a_1 e_1$, $A a_2$ in $a_2 e_2$ u. s. f. reflectirt. Diese Richtungen treffen die kleinen Kreise in Punkten, in welchen der umhüllende Kreis die Richtung einer Tangente besitzt, also stehen sie dort normal zu diesem, sie schneiden sich, rückwärts verlängert, alle in dessen Mittelpunkt C, der auf der Geraden $A a_0$ genau so weit von MN entfernt ist, wie A. Die von der Grenzfläche der beiden Medien zurückgeworfenen Strahlen divergiren demnach, wenn diese eine Ebene ist, ebenso, als ob sie von dem Punkte C ausgingen. Wie aus Fig. 11 leicht zu ersehen, wird

Fig. 11.



der Winkel, welchen der ankommende und der reflectirte Strahl mit einander bilden, genau halbirt durch die Normale ($a_1 n_1$, $a_2 n_2$, u. s. f.) auf der Trennungsfläche MN.

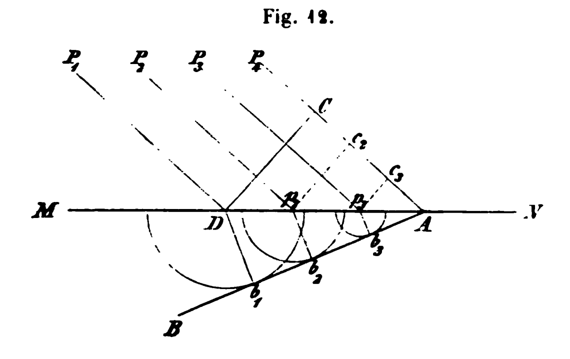
Hierdurch ist das **Gesetz der Reflexion der Wellen an ebenen Grenzflächen verschiedener Mittel** bestimmt. Es lautet: Eine Wellenbewegung, welche unter irgend einem Winkel auf die Trennungsebene zweier Medien auffällt, wird so reflectirt, dass der zurückgeworfene und der einfallende Wellenstrahl in einer Ebene (der sogen. Einfallsebene) liegen mit der Normalen zur Trennungsfläche, und beide mit dieser gleiche Winkel einschliessen.

Den Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Normalen zur Grenzfläche (dem Einfallslothe) bildet, nennt man den Einfallswinkel, denjenigen zwischen dem reflectirten Strahl und dem Einfallslothe den Reflexionswinkel, so dass der zweite Theil des Reflexionsgesetzes auch so lautet: Einfallswinkel und Reflexionswinkel sind gleich.

2) Richtung der in das zweite Medium eindringenden Welle (Brechungsgesetz): Ist dieses zweite Mittel das dichtere, so ist für dasselbe der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ kleiner, als für das erste, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Wellenstrahles also geringer, als im ersten.

Seien P_1, P_2, P_3, P_4 Fig. 12 so nahe an einander liegende und aus so entfernter Bewegungsquelle herstammende Strahlen, dass wir sie als genau parallel, und das zwischen ihnen liegende Stück CD der Wellenfläche als Ebene betrachten können, so wird der Strahl P_1 in einem bestimmten Moment die Grenzebene MN in D treffen. Von da ab pflanzt sich die eindringende Wellenbewegung im zweiten Medium, aber mit geringerer Geschwindigkeit fort. Sei diese z. B. nur die Hälfte derjenigen im ersten Mittel, so wird nach Verlauf der Zeit t, welche der Strahl P_4 nöthig hat, um die Strecke CA zu durchlaufen, P_1 nur so weit in den zweiten Körper eingedrungen sein, als die Hälfte der Strecke CA beträgt. P_1 wird alsdann in irgend einem Punkte der um D mit dem Radius $Db_1 = \frac{1}{2} CA$ beschriebenen Halbkugel angelangt sein. Der zweite Strahl P_2 trifft die Grenzfläche MN etwas später, nämlich in dem Augenblicke, wo P_4 in Punkt c_2 angelangt ist; bis zum Ablauf der Zeit t bewegt sich P_4 im ersten Medium um die Strecke c_2A vorwärts; der Strahl P_2, während derselben Zeit im zweiten Medium befindlich, kann nur eine halb so grosse Strecke zurücklegen; er wird also am

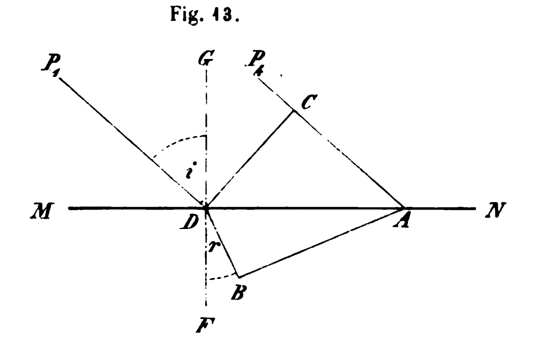
Fig. 12.



Schlusse der Zeit t sich an einem Punkte der Halbkugel befinden, welche mit dem Radius $p_2 b_2 = \frac{1}{2} c_2 A$ um p_2 construirt ist. In gleicher Weise wird nach Verlauf von t die Wellenfläche der von p_3 aus sich in das zweite Mittel fortpflanzenden Strahlen die Oberfläche einer Halbkugel um p_3 mit dem Radius $p_3 b_3 = \frac{1}{2} c_3 A$ sein; endlich wird zu derselben Zeit diejenige des Strahles P_4 der Punkt A selbst sein. Die allgemeine Wellenfläche aller zwischen P_1 und P_4 gelegenen Strahlen im dichteren Medium ist die Fläche, welche alle ihre Wellenflächen in demselben tangirt. Diese ist die durch ihren Durchschnitt AB in Fig. 12 dargestellte Ebene: wir würden dieselbe auch gefunden haben, wenn wir nur von einem Strahl, z. B. P_1, die Wellenfläche construirt und von A aus die Tangente an dieselbe gezogen hätten. Die im ersten Mittel ebene Wellenfläche CD ist also auch im zweiten noch eben, hat aber eine andere Richtung. Das Letztere gilt natürlich auch von den Strahlen, den Geraden zwischen den Punkten D, p_2, p_3 u. s. f. mit den Tangirungspunkten b_1, b_2, b_3 etc.

Aus der Huyghens'schen Construction ersehen wir demnach zunächst, dass die in das zweite Medium eindringende Wellenbewegung zwar in der Ebene, in welcher der einfallende Strahl und die Normale zur Grenzfläche GF Fig. 13 liegen, d. i. in der Einfallsebene, bleibt, aus seiner Richtung aber abgelenkt, gebrochen wird. Wir können nun aus dieser Construction auch das Gesetz ableiten, nach welchem diese Brechung vor sich geht.

Fig. 13.



Die Längen CA und DB verhalten sich nach Construction, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung im ersten zu der im zweiten Medium (in unserem Beispiel wie 2:1); nennen wir die erstere v, die zweite v', so ist

$$\frac{AC}{BD} = \frac{v}{v'}.$$

Nun ist aber der Einfallswinkel $i = P_1DG = ADC$, der Winkel BDF, welchen der gebrochene Strahl mit dem Einfallsloth bildet, der Brechungswinkel r genannt, $= \measuredangle\, DAB$. In den beiden rechtwinkeligen Dreiecken ACD und ABD ist:

$$\frac{AC}{AD} = \sin ADC = \sin i$$

$$\frac{BD}{AD} = \sin BAD = \sin r.$$

Diese beiden Ausdrücke, in einander dividirt, geben:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

und, da AC und BD sich verhalten, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten,

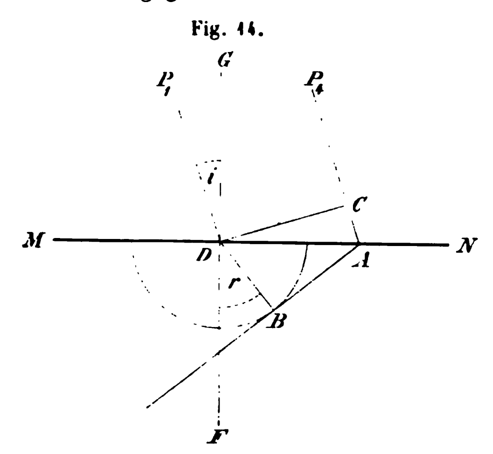
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}.$$

Darnach kann der Einfallswinkel jeder beliebige sein, stets muss sich sein Sinus zu demjenigen des Brechungswinkels verhalten, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten zu der im zweiten Medium. Dieses Verhältniss $\frac{v}{v'}$, der Brechungsexponent, Brechungsindex oder Brechungsquotient genannt und im Folgenden mit n bezeichnet, gestattet also, wenn es durch Bestimmung der Richtungen eines beliebig einfallenden und des zugehörigen gebrochenen Strahles einmal für zwei isotrope Medien gefunden worden ist, zu jedem in anderer Richtung auf die Grenzfläche derselben beiden Körper auffallenden Strahle die Richtung des zugehörigen gebrochenen zu berechnen.

In dem bisher betrachteten Falle war das zweite Medium das dichtere, also $v > v'$, demnach der Brechungsexponent $\frac{v}{v'} > 1$. In diesem Falle ist für jeden Einfallswinkel der Brechungswinkel kleiner, als jener; der Strahl wird dem Einfallsloth zugebrochen.

Ist dagegen das erste Medium das dichtere, so ist $v' > v$, also $n < 1$, und, wie aus der ganz analogen Construction Fig. 14, welche daher einer besonderen Erläuterung nicht bedarf, hervorgeht, wird der abgelenkte Strahl vom Einfallslothe abgebrochen. Da demnach hier der Brechungswinkel grösser als der Einfallswinkel, so muss es einen der letzteren geben, für den der erstere = 90° ist, d. h. der Strahl nicht mehr in das zweite Medium eindringen kann. Da

Fig. 14.



$$\frac{\sin i}{\sin r} = n, \quad (n < 1)$$

ist $\sin r$ d. i. $\frac{\sin i}{n} = 1 = \sin 90^\circ$ für den Fall, dass $\sin i = n$. Der Strahl, dessen Einfallswinkel so gross ist, dass sein Sinus genau gleich dem Brechungsexponent ist, wird so gebrochen, dass er sich parallel der Grenzfläche fortpflanzt, also nicht in das zweite Medium eindringt. Ebenso wenig kann dies gemäss dem Brechungsgesetz ein Strahl, dessen Einfallswinkel noch grösser ist, denn dann wird $\frac{\sin i}{n} > 1$. Dies ist aber der Werth für den Sinus des Brechungswinkels; nun existirt aber kein Winkel, dessen sin > 1, also giebt es in diesem Falle auch keinen Brechungswinkel.

Fig. 14 stellt die Brechung an der Grenze eines Mediums gegen ein weniger dichtes (das untere) dar, in welch letzterem die Geschwindigkeit die doppelte von der im oberen Mittel, der Brechungsexponent also $= \frac{1}{2}$ ist. Die Wellenfläche im zweiten findet man in vereinfachter Weise als Tangentialebene AB an die Wellenfläche des Strahles P_1 im unteren Medium, welche um D mit dem Radius $BD = 2AC$ beschrieben ist. BD ist demnach die Richtung des gebrochenen Strahles. In Fig. 15 ist i so gross, dass $\sin i$ d. i. $\sin CDA = \frac{AC}{AD} = n = \frac{1}{2}$, also $AD = 2AC$. Die Wellenfläche des Strahles P_1 muss also um D mit dem Radius AD beschrieben werden, sie geht also durch A, die Tangente auf den Kreis aus dem Punkte A hat die Richtung AB, der zugehörige gebrochene Strahl, die Gerade vom Tangirungspunkt nach der Mitte, liegt also in MN; der Brechungswinkel ist, wie bereits oben die Rechnung lehrte, $= 90°$. Fig. 16 endlich zeigt die Brechung bei noch grösserem Einfallswinkel i unter sonst gleichen Verhältnissen. Die Wellenfläche des Strahles P_1 im zweiten Medium ist die Kugelfläche, um D mit dem Radius $DB = 2AC$ beschrieben; an diese kann von A aus keine Tangentialebene gelegt werden, weil A innerhalb derselben liegt, also giebt es auch keine Wellenfläche und keinen gebrochenen Strahl im zweiten Medium.

Fig. 15.

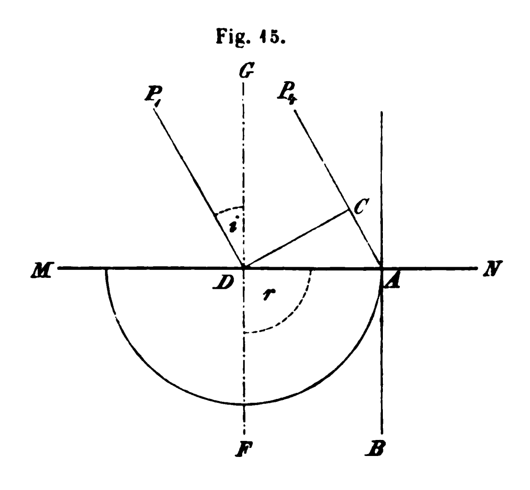
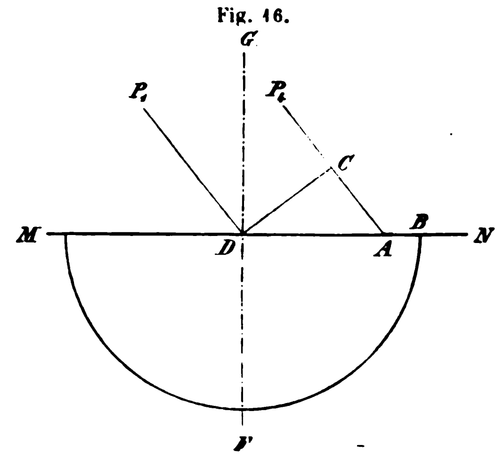


Fig. 16.



Das Brechungsgesetz lehrt folglich, dass eine Wellenbewegung an der Grenze zweier Medien stets aus ihrer Richtung abgelenkt wird; dass dieselbe, in jeder beliebigen Richtung auf die Grenze auffallend, stets in das zweite Medium eindringt, sobald ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demselben kleiner ist, als im ersten; dass dagegen im umgekehrten Falle ein Eindringen der Bewegung nur stattfinden kann, wenn der Einfallswinkel eine bestimmte Grenze nicht überschreitet; bei grösserem Einfallswinkel giebt es vielmehr zu dem einfallenden Strahl

keinen gebrochenen mehr, es findet keine Theilung der Wellenbewegung mehr in eine reflectirte und eine gebrochene statt, die ganze Bewegung wird reflectirt. Daher nennt man diese Erscheinung die totale Reflexion der Wellen, und den Einfallswinkel, von welchem ab dieselbe eintritt und dessen Werth nach Obigem unmittelbar aus dem Brechungsindex folgt, den Winkel der totalen Reflexion.

Die optischen Eigenschaften der Krystalle.

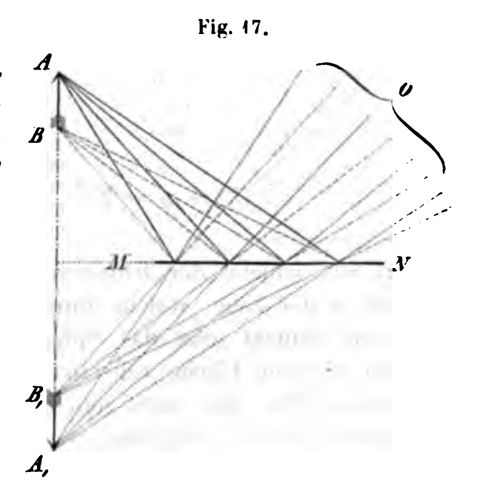
§. 10. **Undulationstheorie des Lichtes.** Die Gesetze der Wellenbewegungen finden ihre eingehendste Anwendung in der theoretischen Optik, d. h. in der hypothetischen Vorstellung, welche man sich von den Erscheinungen des Lichtes macht. Diese Vorstellung, die Undulationstheorie des Lichtes genannt und zuerst von Huyghens entwickelt, aber erst im Anfange dieses Jahrhunderts zu allgemeiner Annahme gelangt, besteht darin, dass man sich den Raum und alle darin befindlichen Körper erfüllt denkt von einem sehr feinen elastischen Fluidum, dem Aether, und annimmt, das Licht sei eine den Gesetzen der Wellenbewegungen entsprechende Vibrationsbewegung dieses Aethers. Das Leuchten ist dieser Theorie nach die Erregung von Oscillationen der zwischen den Theilchen des leuchtenden Körpers befindlichen Aethertheilchen, welche Bewegung als Welle in dem umliegenden Aether sich fortpflanzt und, als Schwingungen der in unserem Auge befindlichen Aethertheilchen auf den Sehnerv übertragen, uns den Eindruck verschafft, welchen wir »Licht« nennen. Die Intensität (Helligkeit) des auf eine Fläche auffallenden Lichtes ist abhängig von der Amplitude der Schwingungen und zwar proportional dem Quadrat derselben. Endlich wird noch die Annahme gemacht, dass die Verschiedenheit des Eindruckes, den wir vom Licht empfangen je nach seiner Farbe, abhängt von einer Verschiedenheit der Schwingungsdauer der Vibrationen des Aethers. Die Wellenlänge ist nach Früherem die Strecke, um welche sich die Bewegung während der Dauer einer Schwingung fortgepflanzt hat; für Licht einer Farbe mit grösserer Schwingungsdauer muss deshalb auch die Wellenlänge in demselben Verhältniss zunehmen, vorausgesetzt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oscillationen von verschiedener Schwingungsdauer dieselbe ist, was aber nur für die Fortpflanzung des Lichtes im leeren Raume gilt. Aendert sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, tritt z. B. das Licht in einen Körper, in dem es sich langsamer fortpflanzt, so muss auch bei gleicher Schwingungsdauer die Wellenlänge abnehmen; Licht derselben Farbe hat also in verschiedenen Medien ungleiche Wellenlänge, wenn seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit in denselben verschieden ist; nur seine Schwingungsdauer bleibt immer die gleiche, und diese ist es, welche den qualitativen Charakter der Farbe bestimmt. Dasjenige Licht, welches seine Schwingungen am lang-

samsten vollführt, die grösste Schwingungsdauer besitzt, nennen wir roth, das von kleinerer Schwingungsdauer orange, gelb, grün, blau, endlich die schnellsten Schwingungen, welche wir überhaupt noch als Licht wahrnehmen, violett.

Wir werden nunmehr sehen, dass das Licht in der That alle die Eigenschaften besitzt, welche ihm zukommen müssen, wenn es eine Wellenbewegung ist, deren allgemeine Gesetze im vorigen §. enthalten sind.

§. 11. **Reflexion des Lichtes. Reflexionsgoniometer.** Die Aethertheilchen, welche sich in einem Medium befinden, wirken offenbar nicht nur auf einander mit elastischen Kräften, sondern sie müssen auch unter dem Einfluss der Theilchen des Körpers selbst stehen, und da dies die Art der Lagerung der Aethertheilchen beeinflussen muss, so folgt daraus, dass die Dichte und Elasticität des Aethers in verschiedenen Medien verschiedene sind. Da von diesen Grössen aber die Geschwindigkeit abhängt, mit welcher sich eine Wellenbewegung fortpflanzt, so müssen die in zwei verschiedenen Körpern enthaltenen Aethermengen sich in Bezug auf die Fortpflanzung einer Wellenbewegung gerade so verhalten, wie zwei völlig verschiedene Medien. Dies ist nun dem Licht gegenüber in der That der Fall. Lassen wir Lichtstrahlen auf die Grenzfläche zweier Körper auffallen, so beobachten wir, dass, wie es bei einer Wellenbewegung der Fall sein muss, ein Theil der Bewegung reflectirt wird, und zwar, wenn die Trennungsfläche eine Ebene ist, genau nach dem Reflexionsgesetz, so dass einfallender und reflectirter Lichtstrahl in einer Ebene liegen mit der Normale zur Grenzfläche, und mit dieser Richtung gleiche Winkel einschliessen. Gehen daher von den einzelnen Punkten eines Körpers *AB* Fig. 17, z. B. von *A*, Lichtstrahlen aus und treffen diese eine ebene Oberfläche eines anderen Körpers *MN*, so werden sie, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen, genau so divergiren, als ob sie von einem Punkte *A'* kämen, welcher auf der Normale zu *MN* (oder deren Verlängerung) ebenso weit jenseits *MN* liegt, als *A* diesseits. Da unsere Sehthätigkeit so organisirt ist, dass wir das Bild eines Körpers dahin verlegen, woher die in unser Auge divergirend gelangenden Strahlen convergiren oder zu convergiren scheinen, so wird ein nach der reflectirenden (spiegelnden) Fläche in der Richtung *O*, Fig. 17, blickendes Auge *A* an der Stelle A_1, und da das Gleiche für alle Punkte des Körpers *AB* gilt, ein Bild desselben in A_1B_1 erblicken. Ein solches Bild nennt man ein virtuelles im Gegen-

Fig. 17.

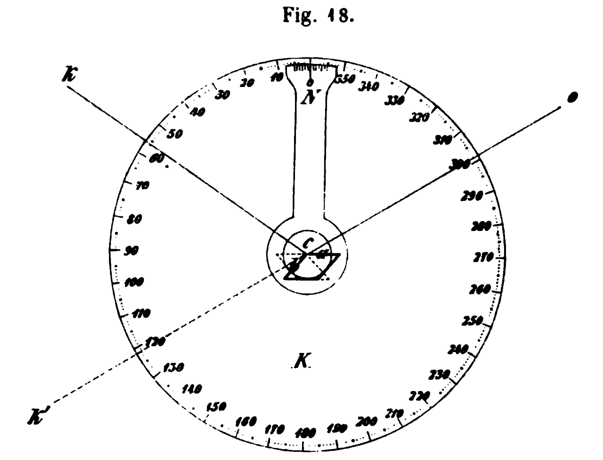


satze zu einem reellen als einem solchen, von dem die ins Auge gelangenden Strahlen wirklich ausgehen.

Das Gesetz der Reflexion des Lichtes findet in der Krystallographie eine wichtige Anwendung, nämlich zur Bestimmung der Winkel, welche die ebenen Flächen der Krystalle mit einander bilden. Das zu diesem Zwecke dienende Instrument heisst Reflexionsgoniometer, und sein Princip ist folgendes:

Der getheilte Kreis K Fig. 18 hat eine drehbare Axe, welche mit dem Zeiger oder Nonius N fest verbunden ist, so dass mittelst desselben der Winkel auf der Kreistheilung abgelesen werden kann, um welchen die Axe gedreht worden ist. Diese letztere ragt vor dem Kreise hervor und trägt dort den Krystall derart befestigt, dass die Kante, in welcher sich die beiden Flächen schneiden, deren Neigungswinkel gemessen werden soll, centrirt, d. h. in ihrer Verlängerung die Mitte des Kreises treffend, und justirt ist, d. h. normal zur Ebene des Kreises steht. Befinde sich von den beiden mit a und b bezeichneten Krystallflächen die erstere alsdann in derjenigen Stellung, dass dem in o befindlichen Auge das virtuelle Bild eines in der Richtung ck liegenden Gegenstandes in der Richtung ock' erscheint, und drehe man nunmehr die Axe und damit den Krystall, wobei natürlich die Kante a/b vollkommen stillsteht, bis b in eine Stellung gelangt ist, welche der früheren von a parallel ist, so befindet sich der Krystall in der Lage, welche durch den punktirten Umriss dargestellt ist, und man erblickt jetzt das Spiegelbild von k in derselben Richtung co von der zweiten Fläche reflectirt, als es vorher von der ersten zurückgeworfen wurde. Man sieht nun aus Fig. 18, dass der Winkel, um welchen man drehen musste, derjenige ist, unter welchem sich die beiden Ebenen a und b schneiden, dass der Krystallwinkel*) also bestimmt ist, wenn jener Drehungswinkel am Kreise abgelesen worden ist. Das Nähere über die Einrichtung und den Gebrauch des Reflexionsgoniometers wird an einer späteren Stelle gegeben werden (in d. III. Abthl.).

Fig. 18.



*) Man nennt diesen Winkel auch den »Normalenwinkel« (weil er gleich ist demjenigen, den die Normalen auf a und b mit einander bilden) oder schlechtweg den »Winkel« der Flächen ab. Sein Supplement ist der innere Winkel, d. i. derjenige, den die Flächen ab im Innern des Krystalls mit einander einschliessen.

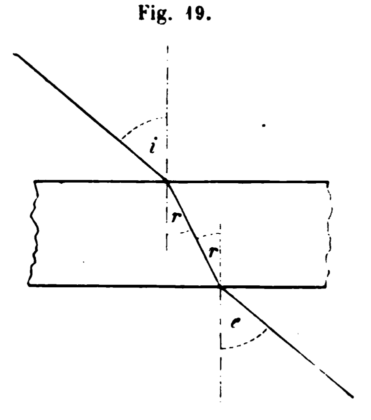
§. 12. **Brechung des Lichtes in isotropen Körpern.** Wenn das Licht eine Wellenbewegung ist, so muss, sobald ein Strahl desselben auf die Grenzfläche zweier Medien auftrifft, nicht nur ein Theil der Bewegung reflectirt werden, sondern auch der übrige Theil in das zweite Mittel eindringen. Dies scheint mit den Lichtstrahlen nur bei den sogenannten durchsichtigen Körpern der Fall zu sein. Die scheinbar undurchsichtigen zeigen dagegen ebenfalls eine Schwächung des reflectirten Lichtes, also muss auch bei ihnen ein Theil des auffallenden Lichtes eingedrungen sein. In der That besteht der Unterschied nur darin, dass in den durchsichtigen Körpern die Lichtstrahlen in grössere Tiefe eindringen können, ohne merklich geschwächt (absorbirt) zu werden*), bei den undurchsichtigen nur in geringe. Sogenannte undurchsichtige Stoffe erweisen sich in genügend dünnen Schichten als durchsichtige.

Ein an der Grenze zweier isotroper Körper, z. B. Luft und Glas, in den zweiten eindringender Lichtstrahl wird nun, wie die Erfahrung lehrt, genau so gebrochen, wie es das Brechungsgesetz S. 22 für Wellenbewegungen überhaupt erfordert. Der gebrochene Strahl liegt, wie der reflectirte, in der Einfallsebene und das Verhältniss:

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}$$

d. i. der Brechungsexponent der Strahlen von einer bestimmten Farbe, ist für dieselben beiden Substanzen bei allen Grössen des Einfallswinkels i constant, es ist das Verhältniss $\frac{v}{v'}$ der Geschwindigkeiten, mit denen sich das Licht der betreffenden Farbe in dem einen und anderen Medium fortpflanzt. Dasjenige der beiden Mittel, in welchem diese Geschwindigkeit die kleinere ist, nennt man das optisch dichtere.**)

Fig. 19.



Gelangt ein Lichtstrahl, der sich im zweiten Medium fortbewegt, an eine zweite Grenzfläche der beiden Substanzen, welche der ersten parallel ist, Fig. 19, so wird er an der ersten Fläche so gebrochen, dass $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}$,

*) Diese Schwächung besteht darin, dass die Lichtbewegung in den Körpern zum Theil in eine andere Art von Bewegung umgesetzt wird (vergl. §. 31).

**) Gewöhnlich bezeichnet man als Brechungsexponent eines isotropen festen Körpers denjenigen bei der Brechung aus Luft in denselben, also das Verhältniss der Lichtgeschwindigkeit in Luft zu der im Körper, welches, da alle festen Körper optisch dichter sind, als die Luft, grösser als 1 ist. Da der bestimmte Zahlenwerth von n bei einem und demselben Stoffe für Lichtstrahlen von gleicher Farbe stets derselbe ist, so kann er unter Umständen, wo die Bestimmung anderer Eigenschaften unzulässig ist (z. B. bei geschliffenen Edelsteinen), zur Erkennung der Natur der Substanz benutzt werden.

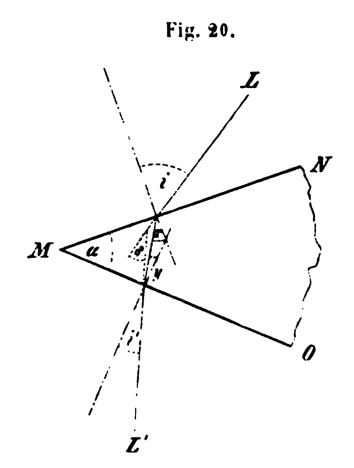
an der zweiten so, dass $\frac{\sin r}{\sin e} = \frac{v'}{v}$, denn dieses ist das Verhältniss seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demjenigen Medium, aus welchem er an die zweite Grenze gelangt, zu der in demjenigen, in welches er austritt. Daraus folgt aber

$$\sin e = \sin i, \quad e = i,$$

d. h. der Lichtstrahl setzt jenseits der zweiten Grenzfläche seinen Weg in derselben Richtung fort, in welcher er auf die erste auffiel. Eine planparallele durchsichtige Platte, in den Weg paralleler Lichtstrahlen eingefügt, ändert deren Richtung nicht. Aus dem Vorhergehenden ersieht man zugleich, dass der Brechungsexponent beim Uebergang aus einem Medium in ein zweites der reciproke Werth desjenigen beim Uebergang aus dem zweiten in das erste ist, dass, wenn z. B. der Brechungsquotient eines Lichtstrahles, der aus Luft in Glas eintritt, $= n$, derselbe beim Austritt aus Glas in Luft $= \frac{1}{n}$ ist.

Betrachten wir nun den Fall, dass ein Lichtstrahl in einen durchsichtigen Körper ein- und wieder austritt, dessen Ein- und Austrittsflächen jedoch nicht parallel sind, so ist zunächst klar, dass dann auch der austretende Strahl dem einfallenden nicht parallel sein kann. Sei Fig. 20 der Querschnitt eines solchen von zwei geneigten Ebenen MN und MO begrenzten Körpers, ein Prisma genannt, so zeigt die Construction, dass ein durch denselben hindurchgehender Lichtstrahl LL' eine Ablenkung erfährt. Diese Ablenkung können wir berechnen, wenn wir α, den sogenannten brechenden Winkel des Prismas, den Einfallswinkel i und den Brechungsexponenten n kennen. Umgekehrt kann aber ein solches Prisma, indem wir die durch dasselbe hervorgebrachte Ablenkung messen, dazu dienen, den Brechungsquotienten n des Lichtstrahles, bei seinem Eintritt aus Luft in die Substanz des Prismas, zu bestimmen.

Fig. 20.



Sei i' der Winkel, welchen der Strahl (L' in Fig. 20) beim Austritt mit der Normalen zur Ebene MO bildet, x und y die Winkel des im Prisma sich fortpflanzenden Strahls mit den Lothen zu MN und MO, so ist

$$\sin i = n \sin x$$
$$\sin i' = n \sin y.$$

Daraus folgt durch Addition resp. Subtraction:

$$\sin i + \sin i' = n(\sin x + \sin y)$$
$$\sin i - \sin i' = n(\sin x - \sin y).$$

Diese beiden Gleichungen können nach einem bekannten trigonometrischen Satze auch geschrieben werden:

$$\sin\frac{i+i'}{2}\cos\frac{i-i'}{2} = n\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad (1)$$

$$\cos\frac{i+i'}{2}\sin\frac{i-i'}{2} = n\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad (2)$$

Gleichung (1) durch (2) dividirt giebt:

$$\operatorname{tg}\frac{i+i'}{2}\cot\frac{i-i'}{2} = \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\cot\frac{x-y}{2}$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{i+i'}{2}\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\operatorname{tg}\frac{i-i'}{2} \qquad (3)$$

Da $i > x$ und $i' > y$ und in Folge dessen stets

$$\operatorname{tg}\frac{i+i'}{2} > \operatorname{tg}\frac{x+y}{2},$$

so kann, so lange $i - i'$ und $x - y$ nicht beide gleich Null werden, die Gleichung (3) nur erfüllt werden, wenn auch

$$\operatorname{tg}\frac{i-i'}{2} > \operatorname{tg}\frac{x-y}{2},$$

d. h.

$$\frac{i-i'}{2} > \frac{x-y}{2}$$

und

$$\cos\frac{i-i'}{2} < \cos\frac{x-y}{2}.$$

Alsdann ergiebt sich aus (1):

$$\sin\frac{i+i'}{2} > n\sin\frac{x+y}{2}. \qquad (4)$$

Nun ist aber, wie aus Fig. 20 leicht zu ersehen, $x + y = \alpha$, also $\sin\frac{x+y}{2}$ eine constante Grösse, ebenso n, so dass die Gleichung (4) lehrt, dass $\sin\frac{i+i'}{2}$ (also auch $\frac{i+i'}{2}$ selbst) immer grösser ist, als ein gewisser constanter Werth. Für den einzigen oben ausgenommenen Fall, nämlich $i - i' = 0$ und $x - y = 0$, folgt aus Gleichung (1):

$$\sin\frac{i+i'}{2} = n\sin\frac{x+y}{2}.$$

Also ist letzteres der kleinste Werth, welchen $\sin\frac{i+i'}{2}$ annehmen kann. In diesem besonderen Falle muss auch $i + i'$ selbst den kleinsten unter allen seinen möglichen Werthen haben. Alsdann hat aber auch die Ablenkung, d. h. der Winkel δ, welchen der in das Prisma einfallende Strahl L und der austretende L' mit einander bilden, seinen kleinsten Werth, denn, wie aus den Winkelgrössen des von L, L' und den beiden Lothen im Inneren des Prismas gebildeten Vierecks hervorgeht, ist $\delta = i + i' - \alpha$, wo α der brechende Winkel, also eine Constante ist. Daraus ergiebt sich also der Satz: Die durch ein Prisma bewirkte Ablenkung eines Lichtstrahls besitzt ein Minimum, wenn $i - i'$

und $x - y = 0$, also $i = i'$, $x = y$, d. h. wenn der ein- und der austretende Strahl gleiche Winkel mit den beiden Flächen des Prismas einschliessen.

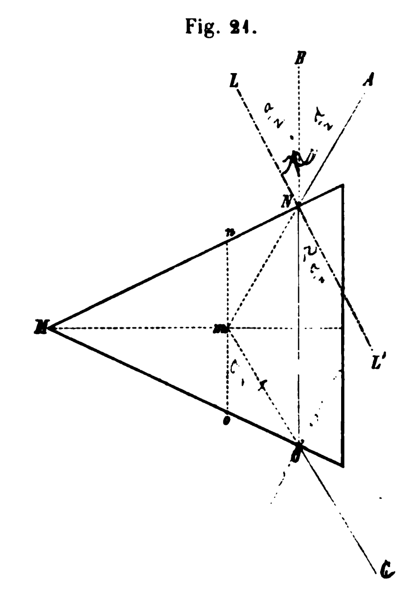


Fig. 21.

Dieser Fall ist dargestellt in Fig. 21, in welcher $ANOC$ den Weg des Lichtstrahles bezeichnet. Da hier $\measuredangle\, MNO = \measuredangle\, MON$, so ist die Richtung des Strahles im Prisma, NO, senkrecht zur Halbirenden des Prismenwinkels, also $\measuredangle\, ONL' = \frac{\alpha}{2}$. Seien Nm und Om die Verlängerungen der Richtungen, welche der Strahl ausserhalb des Prismas besitzt, und sei no parallel NO, so ist $\measuredangle\, Omo = \measuredangle\, Nmn = \frac{\delta}{2}$, wenn δ die gesammte durch das Prisma hervorgebrachte Ablenkung, d. i. das Supplement des Winkels AmC bedeutet. Verlängert man ON bis B, so ist der Einfallswinkel $i = ANL = ANB + BNL$. Nun ist aber $ANB = ONm = Nmn = \frac{\delta}{2}$, $BNL = ONL' = \frac{\alpha}{2}$, also der ganze Einfallswinkel $i = \frac{\alpha + \delta}{2}$, der Brechungswinkel r, bei der Brechung aus Luft in das Prisma, $ONL' = \frac{\alpha}{2}$, folglich der Brechungsexponent:

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

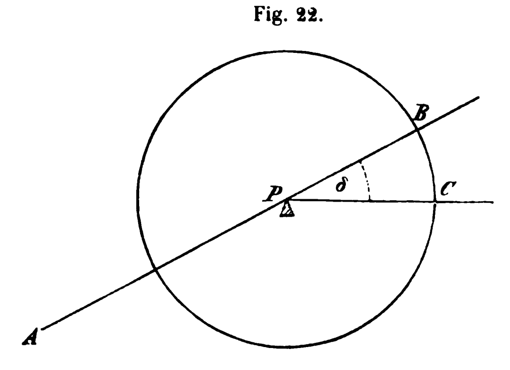
Diese letzte Gleichung liefert nun die am meisten übliche Methode zur Bestimmung des Brechungsquotienten eines Lichtstrahles beim Eintritt aus Luft in einen festen durchsichtigen Körper. Man hat hierzu nur den brechenden Winkel α eines aus dem Körper bestehenden Prismas und die Minimalablenkung δ eines hindurchgehenden Lichtstrahles zu bestimmen. Das Erstere geschieht mittelst des Reflexionsgoniometers s. S. 28, das Letztere ebenfalls mittelst eines getheilten Kreises, in dessen Centrum das Prisma justirt drehbar ist, an welchem man aber ausserdem die Richtung des aus dem Prisma austretenden Strahles, sowie diejenige des eintretenden ablesen kann. Das Schema Fig. 22 mag dies versinnlichen. Hier ist P das Centrum des Kreises, vor welchem sich die brechende Kante des Prismas befindet, $AP \parallel PB$ die Richtung des einfallenden Lichtes, PC die des gebrochenen Strahles; alsdann ist der am Kreise abzulesende Winkel BPC die Ablenkung δ. Man dreht nun das Prisma um seine brechende Kante, d. h. um die Axe des Kreises so lange, bis δ seinen

kleinsten Werth hat, also bei weiterer Drehung der Strahl PC sich wieder mehr von PB entfernen würde. Hat man diesen Werth von δ, sowie den brechenden Winkel α des Prismas gemessen, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = n$$

unmittelbar der gesuchte Brechungsquotient. Das Nähere über die praktischen Manipulationen bei einer derartigen Messung muss einer späteren Stelle vorbehalten bleiben (s. III. Abth.).

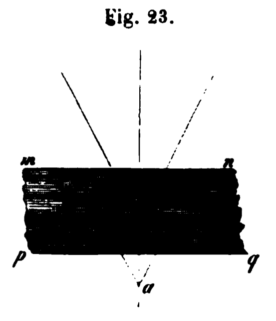
Fig. 22.



Die vorstehend beschriebene Methode zur Bestimmung des Brechungsexponenten ist die genaueste, erfordert aber ein sorgfältig geschliffenes Prisma von einer gewissen Grösse. Es ist jedoch auch möglich, mit Hülfe einer kleinen Platte eines durchsichtigen Körpers ebenfalls den Brechungsexponenten desselben zu bestimmen, und zwar nach zwei verschiedenen Methoden:

Von diesen ist die eine diejenige des Herzogs von Chaulnes und beruht darauf, dass die Brennweite eines Mikroskops sich verändert, wenn zwischen das Objektiv und den Brennpunkt eine durchsichtige planparallele Platte eingeschoben wird. Wie Fig. 23 zeigt, scheinen alsdann die Strahlen von einem Punkte a' herzukommen, während sie in Wirklichkeit von a ausgehen. Wenn man also irgend ein Objekt im Mikroskop scharf eingestellt hatte und nunmehr die Platte über demselben einschiebt, so muss man die Entfernung des Mikroskops vom Objekt um eine gewisse Grösse ändern, um das letztere wieder scharf zu sehen; durch eine Theilung an der Feinstellschraube des Mikroskops kann man diese Grösse sehr genau messen. Zwischen d, der Aenderung der Brennweite des Objectivs, der Dicke t der eingefügten Platte und deren Brechungsexponent n existirt folgende Beziehung:

Fig. 23.



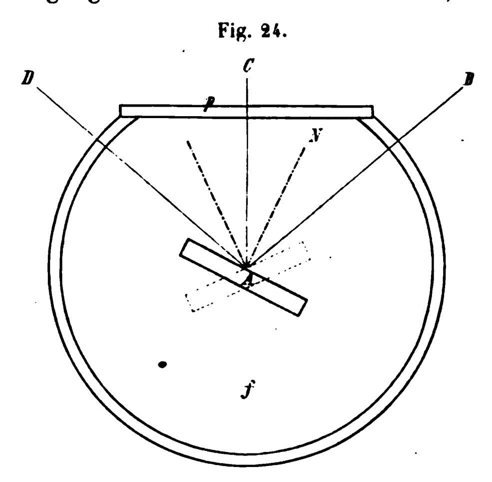
$$n = \frac{t}{t-d},$$

aus welcher man somit nach Bestimmung von t und d den Brechungsquotienten berechnen kann.

Die zweite der erwähnten Methoden zur Bestimmung des Brechungsverhältnisses beruht auf dem Gesetze der totalen Reflexion (S. 24) und be-

steht nach der Form, welche ihr neuerdings von Kohlrausch gegeben wurde, in einer Messung des Winkels der totalen Reflexion auf folgendem Wege: Sei *f* Fig. 24 eine in ein cylindrisches Glasgefäss eingeschlossene Flüssigkeit, deren Brechungsexponent höher sein muss, als derjenige des zu untersuchenden Körpers (um möglichst viele Substanzen nach dieser Methode untersuchen zu können, wählt man eine Flüssigkeit von sehr hoher optischer Dichte, z. B. Schwefelkohlenstoff oder Bromnaphtalin). Vorn ist das Gefäss durch eine planparallele Glasplatte *p* abgeschlossen, vor welcher sich, senkrecht darauf gerichtet, ein kleines auf unendliche Entfernung, also auf parallele Strahlen eingestelltes Fernrohr befindet, An einem von oben her eintauchenden, drehbaren Halter ist die Platte des zu untersuchenden Körpers so befestigt, dass die Drehungsaxe in ihre ebene Vorderfläche fällt, welche von der Seite her durch diffuses Licht beleuchtet wird. Unter den Lichtstrahlen, welche unter verschiedenen Neigungen auf diese Fläche auffallen, befinden sich auch solche der Richtung *BA*, und diese seien es, welche mit der Normalen der Platte, *AN*, den Winkel *i*, d. i. denjenigen der totalen Reflexion bilden. Dreht man die zu untersuchende Platte genau in die in Fig. 24 gezeichnete Stellung, bei welcher die parallel *AC* ($CAN = BAN = i$) reflectirten Strahlen in der Mitte des Gesichtsfeldes im Fernrohr vereinigt werden, so muss die eine Hälfte von dessen Gesichtsfeld solche Strahlen empfangen, welche unter kleinerem Winkel, als *i*, auf die Platte auffallen und daher nur zum Theil reflectirt werden, zum Theil in jene eindringen, die andere Hälfte dagegen solche Strahlen, welche die Platte unter grösserem Einfallswinkel treffen und daher mit ihrer vollen Intensität reflectirt werden; die letztere Hälfte des Gesichtsfeldes muss also heller erscheinen und von der weniger hellen andern Hälfte durch eine senkrechte Grenzlinie getrennt sein, welche genau durch die Mitte geht; diese Position der Platte kann also durch Einstellung der Grenzlinie auf die Mitte des Gesichtsfeldes gefunden werden. Lässt man nun das zerstreute Licht von der andern Seite des Glasgefässes einfallen und dreht die Platte, bis wiederum jene Grenzlinie in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint, so befindet sich nunmehr die Platte in der punktirt angedeuteten Stellung, und die Richtung *AB* ist an die Stelle von *AC* getreten, während die dem Winkel der totalen Reflexion entsprechenden Strahlen in der Richtung *DA* einfallen. Der Winkel, um welchen man die Platte drehen musste, ist offenbar $= 2i$, und man erhält somit, indem

Fig. 24.



man die ausgeführte Drehung an einem Theilkreise abliest und halbirt, die Grösse des Winkels der totalen Reflexion. Nach S. 24 ist nun aber der Sinus dieses Winkels gleich dem Brechungsexponenten, d. h. dem Verhältniss der Lichtgeschwindigkeit in der Flüssigkeit, F, zur Lichtgeschwindigkeit in der Platte, v, also

$$\sin i = \frac{F}{v}, \quad \text{folglich: } v = \frac{F}{\sin i}.$$

Dividirt man beide Seiten der letztern Gleichung in die Grösse der Lichtgeschwindigkeit in Luft, welche $= V$ sei, so erhält man

$$\frac{V}{v} = \frac{V}{F} \sin i .$$

$\frac{V}{F}$, das Verhältniss der Lichtgeschwindigkeiten in Luft und Flüssigkeit, ist aber der Brechungsexponent der letzteren, welchen man mit Hülfe eines mit der Flüssigkeit angefüllten Hohlprismas nach der zuerst angegebenen Methode der Maximalablenkung bestimmen kann. Sei derselbe für die betreffende Flüssigkeit ein für allemal bestimmt und $= \mu$, so ist

$$\mu \sin i = \frac{V}{v}.$$

Der Quotient $\frac{V}{v}$, das Verhältniss von Lichtgeschwindigkeit in der Luft und in der Platte, ist aber der gesuchte Brechungsexponent der letzteren, den man also findet, indem man den Sinus des gemessenen Winkels der totalen Reflexion multiplicirt mit dem Brechungsexponenten der angewandten Flüssigkeit. Die nähere Beschreibung des bei dieser Methode benutzten Apparates, des Totalreflectometers, wird in der III. Abtheilung gegeben werden.

Bestimmt man auf einem der angegebenen Wege den Brechungsexponenten eines Körpers für einen Lichtstrahl einer gewissen Farbe, ferner für einen Strahl einer andern Farbe, so findet man beide verschieden. Damit übereinstimmend sieht man, dass ein Strahl weissen Lichtes durch ein Prisma zerlegt wird in Strahlen verschiedener Farbe, welche sämmtlich eine ungleiche Ablenkung in demselben erfahren. Da diese Farben und ihre Reihenfolge, der Ablenkung nach, im Allgemeinen bei verschiedenen Substanzen des Prismas die gleichen sind, so können sie nicht durch das letztere hervorgebracht worden sein, sondern müssen schon im einfallenden weissen Licht präexistirt haben. Es ist demnach anzunehmen, dass das sogenannte weisse Licht aus den verschiedenen, durch die Brechung zu einem Spectrum zerstreuten (dispergirten) Farben bestehe. In der That vermögen wir durch ein umgekehrt gestelltes gleichartiges Prisma dieselben wieder sämmtlich zu vereinigen, und alsdann machen sie auf unser Auge wieder den Eindruck des Weiss. Das Farbenspectrum, welches das weisse Licht durch ein Prisma liefert, hat eine grössere Ausdehnung, wenn der brechende Winkel des Prismas grösser ist, da die Ablenkung jeder Farbe mit dem Werthe jenes Winkels wächst, also auch der Abstand der wenigst brechbaren Strahlen im Spectrum von den am stärksten brechbaren. Die

Ausdehnung desselben hängt aber ausserdem noch ab von dem Dispersionsvermögen, d. h. von der Zerstreuungskraft für die verschiedenen Farben, welche die Substanz des Prismas besitzt.

Die Erfahrung lehrt demnach, dass der Brechungsexponent sich nicht nur mit der Substanz, sondern auch mit der Farbe, d. h. mit der Schwingungsdauer und folglich mit der Wellenlänge des Lichtes, ändert. Die genaue theoretische Herleitung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer jeden Wellenbewegung liefert denn auch eine Abhängigkeit derselben von der Wellenlänge der Bewegung. Diese Abhängigkeit ist für den Brechungsquotienten sehr angenähert ausgedrückt durch die Formel (von Cauchy):

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

in welcher A und B für eine und dieselbe Substanz Constante sind, λ die Wellenlänge bedeutet. Wenn man demnach für zwei Farben, deren Wellenlängen λ_1 und λ_2 sind, die Brechungsexponenten bestimmt hat, so kann man mittelst obiger Formel A und B (indem man jene Werthe einsetzt und die beiden Gleichungen nach A und B auflöst) berechnen und kennt alsdann für jede beliebige Farbe mit anderem λ das zugehörige n. Aus dieser Dispersionsformel sieht man, dass der Brechungsindex, also auch die Ablenkung, um so kleiner wird, je grösser die Wellenlänge des gebrochenen Lichtes ist. Da nach Früherem das Roth unter den Farben des Spectrums die grösste Wellenlänge hat, so ist dieses die am wenigsten abgelenkte Farbe; stärker abgelenkt sind Orange, Gelb, Grün, Blau, und die am weitesten abgelenkte Farbe des ganzen Spectrums ist Violett. Dieses letzte besteht also aus Schwingungen von der kleinsten Wellenlänge, welche noch als Licht wahrgenommen werden können. Betrachten wir ein solches Farbenspectrum, wie ein Prisma es aus weissem Licht erzeugt, so sehen wir, dass jede der soeben genannten Farben noch einen bestimmten Raum in der Breite einnimmt, also noch Strahlen enthält, deren Ablenkung und somit deren Wellenlänge noch zwischen gewissen Grenzen verschieden ist. Hiernach kann eine genaue Bestimmung des Brechungsexponenten für eine Farbe nicht vorgenommen werden, z. B. für Gelb überhaupt, sondern nur für die Strahlen von einer bestimmten Wellenlänge unter allen denen, welche zum Gelb gehören, welche also nur an einer bestimmten Stelle im Gelb des Spectrums erscheinen. Solches Licht, welches nur aus Schwingungen von einer und derselben Wellenlänge besteht, nennt man einfarbig, homogen oder monochromatisch. Man kann solches auf verschiedene Arten erhalten:

1) Einfarbig ist das Licht, welches gewisse Metalldämpfe in glühendem Zustande aussenden. Lässt man z. B. festes schwefelsaures Lithium, Natrium oder Thallium, an einen dünnen Platindraht angeschmolzen, in einer nicht leuchtenden Gasflamme (eines Bunsen'schen Brenners) verdampfen, so sendet diese im ersten Falle monochromatisches rothes, im zweiten gelbes, im dritten grünes Licht aus, und das Licht solcher gefärbter Flammen ist

das bequemste Hülfsmittel zur Bestimmung des Brechungsexponenten eines Körpers für verschiedene Farben.

2) Lässt man die Entladung der Electricität in einer mit Wasserstoff gefüllten sogen. Geissler'schen Röhre stattfinden, so erhält man Licht, welches nur aus drei homogenen Farben gemischt ist und daher bei der Zerlegung durch ein Prisma kein continuirliches Farbenspectrum, sondern nur drei helle Linien, eine rothe und zwei blaue, zeigt, welche zu genauen Einstellungen benutzt werden können. Das sogen. Linienspectrum des Wasserstoffs kann daher mit Vortheil bei der Messung des Brechungsexponenten eines Prismas benutzt werden, wenn der electrische Strom eines Inductionsapparates zur Verfügung steht.

3) Das Sonnenlicht enthält nicht alle zwischen dem äussersten Roth und äussersten Violett befindlichen Farben, wie sie z. B. das einer weissen Flamme, durch ein Prisma zerlegt, zeigt, sondern gewisse Lichtarten werden beim Durchgang durch die äussere Dampfhülle der Sonne vernichtet. An den diesen Lichtarten entsprechenden Stellen des hellen Spectrums erscheinen bei geeigneter Hervorbringung desselben demnach äusserst schmale dunkele Lücken (die sogenannten Fraunhofer'schen Linien), wodurch also bestimmte Stellen im Spectrum scharf markirt sind, und für diese alsdann die Ablenkung und somit der Brechungsexponent des Prismas sehr genau gemessen werden kann.

4) Angenähert einfarbig ist auch das Licht, wenn es durch gewisse farbige Körper hindurchgegangen ist, z. B. durch rothes Glas, welches ausser Roth alle übrigen Lichtarten vernichtet; doch haben die hindurchgehenden Strahlen noch merklich verschiedene Wellenlängen, daher sie im Spectrum nicht an einer einzigen Stelle, sondern innerhalb eines Streifens von einiger Breite auftreten und somit zu genauen Messungen der Ablenkung nicht geeignet sind (vergl. §. 31).

Durch die Bestimmung der Brechungsexponenten fester durchsichtiger Körper an der Grenze gegen Luft findet man, dass diese sämmtlich optisch dichter sind, als die letztere, dass also der Brechungsquotient aus Luft in einen solchen Körper stets grösser als 1 ist; bei der grossen Mehrzahl liegt er zwischen den Grenzen 1,4 und 1,7, doch giebt es auch Substanzen mit beträchtlich höheren Brechungsexponenten, z. B. ist derjenige des Diamant

$$\begin{aligned} n &= 2{,}4135 \text{ roth,} \\ &= 2{,}4195 \text{ gelb,} \\ &= 2{,}4278 \text{ grün.} \end{aligned}$$

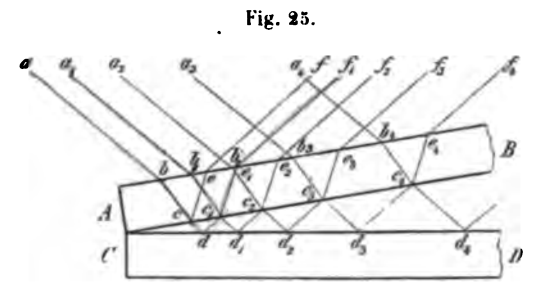
Für diesen Körper ist also der Brechungsindex beim Austritt aus demselben in Luft c. $\frac{1}{2{,}4}$, d. i. ungefähr der Sinus von 25°, daher zu einem Lichtstrahl, welcher sich im Innern eines Diamanten fortpflanzt und eine Grenzfläche unter einem grössern Einfallswinkel, als 25°, trifft, kein gebrochener mehr existiren kann; ein solcher wird demnach total reflectirt, und

wegen des hohen Brechungsexponenten ist hier der Grenzwinkel der totalen Reflexion so klein, dass ein Lichtstrahl in einem von vielen ebenen Facetten begrenzten Diamanten meist eine grosse Zahl totaler Reflexionen zu erleiden hat. Dies ist die Ursache der zahlreichen Lichtreflexe im Innern eines geschliffenen Diamanten.

§. 13. **Interferenz des Lichtes.** Wenn das Licht, wie eingangs des §. 10 angenommen wurde, eine Wellenbewegung des Aethers ist, so müssen zwei Lichtstrahlen, welche eine und dieselbe Reihe von Aethertheilchen gleichzeitig in Bewegung setzen, auch interferiren, d. h. sich zu einer Bewegung zusammensetzen, deren Amplitude (Intensität) und Schwingungszustand von den Amplituden und der Phasendifferenz der interferirenden Strahlen abhängt. So müssen z. B. zwei Lichtstrahlen von gleicher Helligkeit, gleicher Schwingungsrichtung und Wellenlänge (Farbe), welche um eine halbe oder eine ungerade Zahl halber Wellenlängen gegen einander verzögert sind, einander vollständig vernichten, Dunkelheit hervorbringen u. s. f., wie es §. 6 für Wellenbewegungen überhaupt auseinander gesetzt ist.

Die einfachsten Interferenzerscheinungen des Lichtes sind die von Newton zuerst genauer untersuchten, an dünnen Platten einer beliebigen Substanz auftretenden. Seien AB und CD Fig. 25 die senkrechten Durchschnitte zweier planparallelen Platten eines durchsichtigen Körpers, z. B. Glas, und die eine gegen die andere so gestellt, dass sich zwischen beiden eine sehr dünne keilförmige Luftschicht befindet (welche in der Figur nur der Deutlichkeit wegen breit gezeichnet ist). Sei ferner die ganze Fläche der oberen Platte von parallelen Strahlen einer bestimmten Farbe, deren Richtung $\parallel ab$, getroffen, welche also von einem sehr fernen Punkte ausgehen, so wird uns selbstverständlich die ganze Oberfläche von AB spiegelnd erscheinen, wenn sich das Auge vertikal über B befindet, weil alle Strahlen ab, a_1b_1 etc. theilweise an derselben reflectirt werden. Ausserdem aber wird ein Theil der Bewegung in das Glas eindringen, und zwar wird der Strahl ab in b gebrochen werden in der Richtung bc; in c, an der Grenze von Glas und Luft, erfährt derselbe eine erneute Theilung, indem der eine Theil nach ce reflectirt wird, wobei bc und ce gleiche Winkel mit der Grenzfläche bilden, der andere Theil in die Luft austritt in der Richtung cd, welche parallel ab sein muss; dieser letztere Strahl wird in d, während er theilweise natürlich auch in CD eindringt, wieder nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen, gelangt also nach c_1, von da gebrochen nach e_1 und tritt in die Luft aus in der Richtung $e_1f_1 \parallel dc_1$.

Fig. 25.



Unter den unzähligen, auf alle Punkte der Oberfläche AB auffallenden Strahlen betrachten wir nun denjenigen a_1, welcher, in b_1 gebrochen, genau an der Stelle c_1 theilweise reflectirt wird, an welcher der vorige, in d reflectirte Strahl wieder in das Glas eintritt und sich in demselben bis e_1 fortpflanzt. In der Geraden $e_1 f_1$, welche in ihrer Verlängerung das Auge des Beobachters treffen soll, pflanzen sich demnach gleichzeitig zwei Bewegungen fort, diejenige des Lichtstrahles, welcher den Weg $a_1 b_1 c_1 e_1 f_1$, und dessen, welcher den Weg $abcdc_1 e_1 f_1$ zurückgelegt hat. Wenn diese beiden Bewegungen auch von derselben Lichtquelle ausgegangen sind und daher in gleicher Entfernung von derselben gleichen Schwingungszustand haben, so gelangen sie hier in die gleiche Bahn, nachdem der zweite einen längeren Weg hat zurücklegen müssen; der Schwingungszustand, in welchem er in einem bestimmten Augenblicke bei e_1 austritt, ist bei dem ersten Strahl an einer Stelle, um deren Entfernung von e_1 er bereits vorangeeilt ist. Der zweite ist gegen den ersten verzögert um die Strecke, welche sein Weg von der Lichtquelle aus grösser, als der jenes ist, d. h. um $cd + dc_1$, also um so weniger, je geringer der Abstand der oberen von der unteren Glasplatte ist. Zu dieser Verzögerung kommt nun noch eine weitere von $\frac{1}{2}\lambda$ hinzu, hervorgebracht durch die Reflexion an dem optisch dichteren Medium Glas bei d, weil, wie S. 20 gezeigt wurde, jede Wellenbewegung an der Grenze eines dichteren Mittels mit entgegengesetzter Phase reflectirt wird. Die beiden Strahlen treten daher in e_1 mit einer Phasendifferenz aus, welche gleich dem Verhältniss jener Strecke zur Wellenlänge plus einer halben Wellenlänge ist. Seien nun an der in Rede stehenden Stelle die beiden Glasplatten so nahe aneinander, dass die Strecke $cd + dc_1$ gleich einer halben Wellenlänge des einfallenden monochromatischen Lichtes ist, so werden die beiden in e_1 austretenden Strahlen die Phasendifferenz λ, also genau gleichen Schwingungszustand besitzen und daher sich zu einer Schwingung von derselben Phase zusammensetzen, deren Amplitude die Summe der Amplituden der beiden Strahlen ist. In der Richtung $e_1 f_1$ erblickt der Beobachter demnach Licht von einer Helligkeit, gleich der Summe der Intensitäten der interferirenden Lichtstrahlen, d. i. das Maximum der Helligkeit, welches bei einer derartigen Interferenz möglich ist.

Vergleichen wir jetzt zwei andere, in entsprechendem Verhältniss stehende Strahlen, z. B. $a_1 b_1 c_1 d_1 c_2 e_2 f_2$ und $a_2 b_2 c_2 e_2 f_2$, so bewegen sich diese von e_2 aus in derselben Geraden, während jedoch der erstere eine Verzögerung um die Strecke $c_1 d_1 + d_1 c_2$, gegenüber dem zweiten, erfahren hat: sei die letztere $= \frac{3}{4}\lambda$ des angewandten Lichtes, so werden die Lichtstrahlen in $e_2 f_2$ interferiren mit der Phasendifferenz $\frac{5}{4}\lambda$, d. i. gleichbedeutend mit $\frac{1}{4}\lambda$, also werden sie sich zu einer einzigen Wellenbewegung zusammensetzen, welche, wie S. 15 Fig. 6 gezeigt wurde, um $\frac{1}{8}\lambda$ verschoben ist und eine Amplitude besitzt, welche grösser als die der Einzelbewegungen, aber kleiner als deren Summe ist. In der Richtung $e_2 f_2$ wird

also Licht von der einer solchen Amplitude entsprechenden Helligkeit in das Auge des Beobachters gelangen. Gehen wir zu den Strahlen $a_2 b_2 c_2 d_2 c_3 e_3 f_3$ und $a_3 b_3 c_3 e_3 f_3$ über, so ist bei deren Interferenz in der Geraden $e_3 f_3$ der erstere um die Weglänge $c_2 d_2 + d_2 c_3$ verzögert; diese ist grösser als im vorigen Falle; sie sei gleich der Wellenlänge des angewandten Lichtes λ, so werden die beiden Strahlen, von ihrem Austritt aus dem Glase in e_3 an, die Phasendifferenz $\frac{3}{2}\lambda$, also gleichzeitig an jedem Punkte ihrer gemeinschaftlichen Bahn $e_3 f_3$ genau entgegengesetzten Schwingungszustand besitzen und sich demnach, wenn ihre Intensität genau gleich ist, vollständig vernichten, d. h. in der Richtung $e_3 f_3$ wird kein Licht in das Auge des Beobachters gelangen. Sind dagegen beide Strahlen nicht genau gleich hell, so wird noch die Differenz ihrer Amplituden übrig bleiben, also keine vollständige Dunkelheit in der angegebenen Richtung erzeugt werden.

Von diesem Minimum zu dem in der Richtung $e_1 f_1$ erscheinenden Maximum muss ein allmählicher Uebergang stattfinden. Für die folgenden, einander in gleicher Weise entsprechenden Paare von Lichtstrahlen wird nun der Abstand der beiden Glasplatten immer grösser, also auch die Verzögerung des einen gegen den andern. Dasjenige Paar, welches mit $\frac{7}{4}\lambda$ Phasendifferenz interferirt, wird um $\frac{3}{4}\lambda$ im Schwingungszustand gegen einander verschoben sein, also einen Strahl von grösserer Helligkeit als das letzterwähnte liefern (vergl. Fig. 7 S. 15). Ein weiteres Paar wird eine Phasendifferenz von 2λ erhalten, also mit genau gleichem Schwingungszustand interferiren, somit wird dasselbe Maximum der Helligkeit resultiren, als in der Richtung $e_1 f_1$. Denkt man sich dieselbe Construction und Betrachtung für immer grössere Dicke der zwischen den Glasplatten befindlichen dünnen Luftschicht fortgesetzt, so ergiebt sich folgendes Resultat: Ein Beobachter, welcher nach der Oberfläche der Platte AB in der Richtung hinblickt, in welcher das von der oberen und unteren Grenzfläche der Luftschicht zwischen AB und CD reflectirte Licht die obere Platte verlässt, sieht eine regelmässige Folge von hellen und dunkeln Streifen, welche sämmtlich der Kante, mit der AB auf CD aufliegt, parallel laufen, also senkrecht zu dem vertikalen Durchschnitt Fig. 25 stehen.

Würde man darauf das Licht einer anderen Farbe, z. B. von grösserer Wellenlänge, auf die Glasplatten fallen lassen, so würde an der Stelle, an welcher vorher der erste helle Streifen entstand, weil die beiden dort interferirenden Strahlen eine Phasendifferenz von λ der früher benutzten Farbe hatten, jetzt noch kein Maximum erscheinen, da eine Wegdifferenz von einer halben, jetzt grösseren, Wellenlänge erst solche Strahlen erhalten können, die an einer dickeren Stelle der Luftschicht reflectirt werden. Dasselbe gilt für die Minima. Mit Licht von grösserer Wellenlänge beleuchtet, werden die Platten also ebenfalls helle und dunkle Streifen zeigen, dieselben werden aber weiter von der Berührungslinie derselben und ebenso weiter von einander abstehen.

Das weisse Licht besteht nach Früherem aus einer Mischung sehr verschiedener Farben, welche nur dann den Eindruck des Weiss machen, wenn sie in einem bestimmten Helligkeitsverhältniss gemischt sind. Die Erscheinungen, welche wir beobachten, wenn wir weisses Licht auf jene Glasplatten fallen lassen, sind nun andere und complicirtere als vorher. Betrachten wir die Stelle sehr nahe an der Berührungslinie der Platten, an welcher die Luftschicht so dünn ist, dass die beiden an der oberen und der unteren Seite derselben reflectirten Lichtstrahlen eine Wegdifferenz von λ, also eine Phasendifferenz von $\frac{3}{2}\lambda$ des violetten Lichtes erhalten, dessen Wellenlänge die kleinste unter denen aller Farben ist. Die Strahlen dieser Farbe werden hier vollständig ausgelöscht, nicht so jedoch diejenigen der anderen im Weiss enthaltenen Farben, welche auf derselben Stelle auffallen; diese letzteren erhalten durch die Interferenz zwar eine Schwächung ihrer Helligkeit, die aber um so geringer ist, je grössere Wellenlänge sie haben. Das an dieser Stelle erscheinende Licht enthält also die Farben in anderem Helligkeitsverhältniss (Violett gar nicht), als das Weiss, es kann also nicht weiss erscheinen, sondern zeigt eine in diesem Falle gelbe *Mischfarbe*. An einer benachbarten Stelle beträgt die Wegdifferenz wegen der wachsenden Dicke der Luftschicht etwas mehr, nämlich λ blauen Lichtes, hier wird also diese Farbe vernichtet, die anderen nur geschwächt, es erscheint Orange als Gesammteindruck derselben. In noch grösserem Abstande von dem Rande der Luftschicht entsteht die Phasendifferenz $\frac{3}{2}\lambda$ des Grün; hier erscheint als Mischfarbe Roth, u. s. f. Im *weissen* Licht erscheinen also statt der dunkeln und hellen Streifen *farbige*. Diese sind aber um so blasser, je mehr sie vom Rande der Luftschicht abstehen, und da, wo diese einigermaassen dick ist, sieht man nur Weiss. Die Ursache dieser Erscheinung ist folgende: an einer solchen Stelle erhalten die beiden interferirenden Strahlen eine sehr grosse Phasendifferenz, z. B. $\frac{41}{2}\lambda$ des äussersten Violett, dieses wird also ausgelöscht; dieselbe Länge ist aber auch $= \frac{39}{2}\lambda$ einer Farbe von etwas grösserer Wellenlänge, $\frac{37}{2}\lambda$ einer von noch grösserer Wellenlänge u. s. f. Es werden also aus allen Farben des Spectrums Theile von bestimmter Brechbarkeit ausgelöscht; je zahlreicher diese sind, d. h. je dicker die Luftschicht ist, desto gleichmässiger werden alle Hauptfarben des Spectrums geschwächt, desto mehr macht die entstehende Mischfarbe den Eindruck des Weiss. Man nennt dieselbe *Weiss der höheren Ordnung*, weil man die Farben der einzelnen Streifen vom Rande aus als solche erster, zweiter, dritter Ordnung u. s. w. bezeichnet, je nachdem sie durch Auslöschung von einer, zwei, drei u. s. f. Partieen des Spectrums entstehen.

Würde man statt der beiden ebenen Platten *eine* solche und eine Glaslinse anwenden, so würde man kreisförmige Farbenringe (*Newton*'sche Ringe) erhalten.

Man sieht leicht ein, dass die Erscheinungen der Interferenz, wenn auch andere als die hier beschriebenen, ein Mittel liefern, um die Wellen-

länge des Lichtes zu bestimmen. So hat man gefunden, dass die Wellenlänge der folgenden Farben in Luft*) beträgt:

Roth der Lithiumflamme	0,000671 mm
Rothe Linie H_α im Wasserstoffspectrum (Fraunhofer'sche Linie C)	0,000657 -
Gelb der Natriumflamme (Fraunh. Linie D)	0,000589 -
Grün der Thalliumflamme	0,000535 -
Blaue Wasserstofflinie H_β (Fraunh. Linie F)	0,000486 -
Blaue Wasserstofflinie H_γ	0,000434 -
Aeusserstes Violett	0,000406 -

Die Interferenz des Lichtes kann ferner, nachdem die Wellenlänge der verschiedenen Farben mit Hülfe derselben bestimmt ist, dazu dienen, kleine Abstände und deren Aenderungen zu messen. Wenn man z. B. unter einem auf zwei Schneiden aufliegenden dünnen Stäbchen aus einem durchsichtigen Körper, dessen Elasticität man bestimmen will (s. S. 5), eine spiegelnde Fläche anbringt, so dass eine dünne Luftschicht zwischen beiden bleibt, so werden die an der Ober- und Unterseite dieser Luftschicht reflectirten Lichtstrahlen interferiren; wird nun das Stäbchen belastet und dessen Mitte daher gesenkt, der Abstand desselben von der spiegelnden Fläche also verringert, so müssen die Interferenzstreifen sich verschieben, und man sieht leicht ein, dass die Zahl der hierbei durch einen Punkt wandernden Streifen ein sehr genaues Mittel an die Hand giebt, die Aenderung der Dicke der Luftschicht, also die Biegung zu bestimmen. Auf diesem Princip, welches zuerst von Fizeau zur Messung der Ausdehnung fester Körper durch die Wärme (s. § 34) angewandt wurde, beruht der in der III. Abtheilung beschriebene Apparat von Koch und Warburg zur Messung der Elasticität kurzer Stäbchen.

An den Krystallen, namentlich denen der Mineralien, beobachtet man sehr häufig Interferenzerscheinungen dadurch, dass im Innern derselben feine Risse parallel den Spaltungsflächen oder sonstige, in bestimmten Richtungen orientirte Absonderungen oder endlich Einlagerungen von dünnen Schichten fremder Körper vorhanden sind. Findet nun an der Ober- wie an der Unterseite dieser Zwischenschichten Reflexion des Lichtes statt, so muss eine Interferenz mit der dem Durchmesser der Zwischenschicht entsprechenden Phasendifferenz erfolgen, und der betreffende Krystall, mit weissem Lichte beleuchtet, einen Farbenschiller zeigen. Der durch einfache Reflexion an inneren Absonderungen und dergl. hervorgebrachte Schiller, wie der durch Interferenz farbige, ist nur in bestimmten Rich-

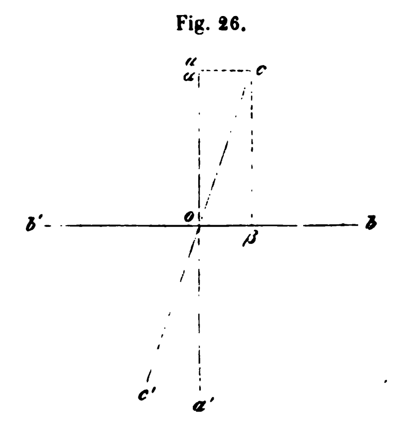
*) Wie bereits erwähnt (S. 26), wird die Wellenlänge einer Farbe in einem optisch dichteren Medium, als die Luft, kleiner, da Schwingungen von derselben Dauer während einer Oscillation sich in solchen weniger weit fortgepflanzt haben. Die obigen Zahlen gelten aber, ausser für Luft, nahezu auch für den leeren Raum, da sich in ersterer das Licht fast ebenso schnell fortpflanzt, als im letzteren. Die Wellenlängen derselben Farben in einem andern Körper erhält man, wie leicht einzusehen, mittelst Division der obigen Zahlen durch die zugehörigen Brechungsexponenten des Körpers.

tungen sichtbar, welche abhängen von der Richtung des einfallenden Lichtes. der Brechung desselben beim Eintritt und der Orientirung der Absonderungen im Inneren des Krystalls. Die letztere dieser Grössen vermag man daher mit Hülfe der Messung der ersteren zu bestimmen (s. hierüber die Untersuchungen von E. Reusch über das Schillern gewisser Krystalle: Poggendorff's Annalen der Physik, 116, 392, 118, 256, 120, 95).

§. 14. Elasticitätsverhältnisse des Lichtäthers, Polarisation und Doppelbrechung. Eintheilung der Krystalle nach ihren optischen Eigenschaften. In allen bisherigen Betrachtungen haben wir angenommen, dass der Lichtstrahl sich nach allen Seiten rings um seine Fortpflanzungsrichtung gleichartig verhalte. Eine Drehung des Strahles um jene Richtung würde also keine Aenderung seiner Eigenschaften bewirken, er selbst in keiner andern Beziehung zum Raume stehen, als derjenigen, durch welche die Richtung seiner Fortpflanzung bestimmt ist. Eine solche Beziehung müsste aber stattfinden bei einem Strahl, dessen Schwingungen in einer Ebene vor sich gehen, derselbe müsste eine Seitlichkeit in Bezug auf jene Ebene zeigen. Dies ist jedoch bei dem sogenannten gewöhnlichen Lichte nicht der Fall, und es wird daher zur Erklärung dieses Mangels an Seitlichkeit angenommen, dass ein mit gewöhnlichem Licht leuchtender Körper eine Bewegung aussendet, deren Schwingungen in sehr schneller Aufeinanderfolge ihr Azimuth wechseln, so dass zwar Schwingungen mit Seitlichkeit unser Auge treffen, aber nacheinander nach äusserst kurzen Zeiträumen solche, deren Bewegung nach allen Richtungen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung stattfindet; ein solcher Strahl wird den Eindruck eines Strahles ohne Seitlichkeit machen.

Pflanzt sich eine solche Bewegung, wie wir annehmen, dass das gewöhnliche Licht es sei, in einem Medium fort, in welchem der Aether nach allen Richtungen gleiche Elasticität besitzt, sich also wie ein isotropes Medium verhält, so wird irgend ein Theilchen o desselben in einem bestimmten Zeitmomente in Schwingung nach aa' (Fig. 26*) versetzt werden; bei jeder folgenden Elongation wird die Richtung derselben um einen sehr kleinen Winkel gedreht sein, also z. B. in einem gewissen Augenblicke parallel cc' liegen. Ein Impuls, welcher das Aethertheilchen o nach c hin bewegt, wirkt ebenso, wie zwei gleichzeitig ausgeübte Impulse nach a und b, welche für sich dasselbe nach α resp. β bewegt haben

Fig. 26.



*) Hier ist die Ebene der Zeichnung zugleich diejenige, in welcher die Schwingungen stattfinden, die Fortpflanzungsrichtung die Normale zu derselben in o.

würden. Da aber in einem isotropen Medium die Schwingungen, sie mögen stattfinden in welcher Richtung sie wollen, sich gleich schnell fortpflanzen, so werden an jedem jenseits o folgenden Theilchen in der Fortpflanzungsrichtung, welches von der Bewegung ergriffen wird, die beiden Impulse nach a und b gleichzeitig anlangen und sich also zu einer einzigen Bewegung nach c zusammensetzen. Dieselbe Betrachtung gilt für jede Schwingungsrichtung, es muss demnach eine Bewegung, welche schnell nacheinander in allen Azimuthen stattfindet, nach ihrem Eindringen in ein Mittel, welches der oben angegebenen Bedingung genügt, den gleichen Wechsel ihrer Schwingungsrichtung beibehalten. So erklärt es sich, dass ein Strahl gewöhnlichen Lichtes in einem solchen Körper sich als gewöhnlicher Lichtstrahl fortpflanzt.

Anders muss sich ein Lichtstrahl verhalten, wenn er in ein Medium eindringt, dessen Aether so beschaffen ist, dass seine Elasticität mit der Richtung sich ändert und er also ein anisotropes Mittel darstellt. Sei in Fig. 26 aa' diejenige Richtung, in welcher der Elasticitätscoëfficient e des Aethers unter allen in der Ebene ab liegenden Richtungen den grössten Werth besitzt, bb' die Richtung der kleinsten optischen Elasticität in derselben Ebene, d. h. diejenige, in welcher für den Aether e sein Minimum erreicht. Alsdann nimmt auch $\sqrt{\frac{e}{d}}$ für die Richtung aa' ihren grössten, für bb' ihren kleinsten Werth an, weil d, als Masse in der Volumeneinheit, eine von der Richtung unabhängige, also in einem homogenen Krystall constante Grösse darstellt. $\sqrt{\frac{e}{d}}$ bestimmt aber nach Früherem (S. 16) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung, deren Schwingungen parallel der Richtung stattfinden, in welcher der Elasticitätscoëfficient $= e$ ist. Es folgt daraus, dass unter allen in der Ebene ab stattfindenden Lichtschwingungen die nach aa' mit der grössten, die parallel bb' mit der kleinsten Geschwindigkeit sich fortpflanzen, und dass diese beiden Geschwindigkeiten sich verhalten, wie die Quadratwurzeln aus der Elasticität parallel den Schwingungsrichtungen.

Ist o nun ein Aethertheilchen, welches von einer soeben in den Körper eintretenden Bewegung von der Natur des gewöhnlichen Lichtes getroffen wird, und ist in einem bestimmten Augenblicke die Schwingungsrichtung jenes Lichtes aa', in einem der folgenden cc', so wird letztere Schwingung nach Obigem gleichbedeutend sein mit den Schwingungen, welche durch zwei gleichzeitige Impulse, deren einer parallel aa', der andere parallel bb', bewirkt werden, und deren Amplituden im Verhältniss der Längen $o\alpha$ und $o\beta$ stehen. Diese beiden Schwingungen pflanzen sich aber mit verschiedener Geschwindigkeit fort, gelangen also zu verschiedenen Zeiten an eines der später in Bewegung gesetzten Aethertheilchen, können sich demnach dort nicht mehr zu einer Schwingung nach cc' zusammensetzen, sondern werden ihren Weg getrennt fortsetzen. In einem noch späteren Momente wird o nach einer Richtung bewegt werden, welche einen noch grösseren Winkel mit aa' macht als die Richtung cc', diese

Bewegung wird also ebenfalls in zwei, parallel aa' und bb', zerlegt werden, in welchem Falle aber die Componente nach bb' einen grösseren Werth besitzt als vorher. Die gesammte Bewegung eines gewöhnlichen Lichtstrahles, dessen Schwingungsazimuth sehr schnell wechselt, wird also in zwei Lichtstrahlen zerlegt werden, von denen der eine parallel aa' schwingt und dessen Intensität mit dem Azimuth des eintretenden Strahles wechselt, und zwar in dem Moment, wo dieses parallel aa' ist, gleich der vollen Intensität des eintretenden Lichtes ist, dann abnimmt, Null wird, sobald dieses Azimuth parallel bb' ist, dann wieder wächst u. s. f. Dieser Wechsel der Intensität tritt aber so schnell ein, dass der Lichtstrahl den Eindruck eines solchen von constanter mittlerer Intensität macht, also eines, dessen Intensität gleich der Hälfte von der des eintretenden Strahles ist. Der zweite Strahl, welcher durch die Zerlegung entsteht, dessen Schwingungen parallel bb' stattfinden, hat in denselben Augenblicken die Intensität Null, wenn die des ersten im Maximum ist, nimmt zu, wenn jene abnimmt, erreicht das gleiche Maximum, wenn jene gleich Null wird u. s. f., d. h. dieser zweite Strahl macht ebenso den Eindruck eines Strahles von der constanten Helligkeit, gleich der Hälfte derjenigen des eintretenden Strahles.

Beim Eintritt eines gewöhnlichen Lichtstrahles in derartig anisotropen Aether entstehen also aus demselben zwei Lichtstrahlen von verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber gleicher Helligkeit, deren Schwingungen in der senkrecht zum Strahl stehenden Ebene stattfinden, die des einen in der Richtung, welche der grössten, die des anderen in der, welche der kleinsten Lichtgeschwindigkeit der in jener Ebene schwingenden Strahlen entspricht. Jeder dieser beiden Strahlen, als nur in einer Ebene seine Schwingungen vollführend, muss eine gewisse Seitlichkeit (Polarität) in Bezug auf diese Ebene zeigen und heisst deshalb ein polarisirter Lichtstrahl; da die beiden Ebenen, in Bezug auf welche dies stattfindet, im angenommenen Falle senkrecht auf einander stehen, so heissen die beiden Strahlen »senkrecht zu einander polarisirt«. Da die Geschwindigkeit, mit der sich dieselben in dem Medium fortpflanzen, für jeden eine andere ist, so haben sie auch verschiedene Brechungsquotienten (Verhältniss ihrer Geschwindigkeit in Luft, welche für beide gleich, zu der in dem anisotropen Medium), d. h. sie werden an der Grenze verschiedene Ablenkung erfahren, der vorher einfache Strahl wird also in einem solchen Mittel doppelt gebrochen in zwei Strahlen von verschiedener Richtung.

Die Beobachtung zeigt nun, dass nur in den folgenden Arten von Körpern der Lichtäther sich so verhält, wie ein isotropes Medium, d. h. nach allen Richtungen gleiche Elasticität besitzt:

1) wie a priori zu erwarten ist, in den amorphen Körpern, denn diese selbst haben ja ebenfalls nach allen Richtungen gleiche elastische Eigenschaften,

2) in denjenigen Krystallen, welche in drei aufeinander senkrechten Richtungen gleichen Elasticitätscoëfficienten besitzen, welche also die erste der drei S. 6 erwähnten Abtheilungen bilden.

In diesen beiden Klassen von Medien pflanzt sich daher das Licht nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit fort, und gewöhnliches Licht wird in denselben nicht polarisirt und daher auch nicht doppelt gebrochen. Diese Medien heissen deshalb einfachbrechende. Sie sind optisch isotrop, während in mechanischer Beziehung nur die erste Klasse derselben isotrop ist. Im Gegensatz hierzu stehen die Krystalle der auf S. 6 angeführten zweiten und dritten Abtheilung, in deren jedem der Aether sich wie ein anisotropes Medium verhält, und welche daher als doppeltbrechende bezeichnet werden; dieselben sind also nicht nur in mechanischer, sondern auch in optischer Beziehung anisotrop.

Denken wir uns, von einem Punkte im Innern eines Krystalls aus, nach allen Richtungen Längen proportional der Quadratwurzel der Elasticität des in demselben befindlichen Aethers aufgetragen, so liegen die Endpunkte dieser Radien auf einer krummen Fläche, welche wir als die optische Elasticitätsfläche des Krystalls bezeichnen wollen. Die Flächen dieser Art, die Elasticitätsflächen des den krystallisirten Medien eingelagerten Aethers, sind nun von sehr viel einfacherer Gestalt, als die S. 6 besprochenen Elasticitätsflächen der Krystalle selbst. Es lehrt nämlich die Erfahrung, dass in jeder Ebene, innerhalb deren der Elasticitätscoëfficient des Krystalls in zwei unter 90° oder in drei unter 60° einander schneidenden Richtungen gesetzmässig gleich gross ist, die Elasticität des Aethers nach allen Richtungen denselben Werth beibehält, daher alle in einer solchen Ebene stattfindenden Schwingungen des Lichtes sich gleich schnell fortpflanzen; die Radien der optischen Elasticitätsfläche in dieser Ebene sind also sämmtlich gleich gross, d. h. ihr Durchschnitt mit dieser Ebene ist ein Kreis. Wie S. 6 angegeben, besitzen die Krystalle der zweiten Abtheilung eine Ebene, in welcher die Elasticitätsverhältnisse jenen Bedingungen genügen, also muss denselben eine optische Elasticitätsfläche zukommen, welche durch eine Ebene kreisförmig geschnitten wird. Die Beobachtungen der Fortpflanzungsverhältnisse des Lichtes haben weiter gezeigt, dass die zu dieser Ebene senkrechten Durchschnitte der Elasticitätsfläche des Aethers Ellipsen sind. Die Gestalt der Fläche erhalten wir, wenn wir eine Ellipse um eine ihrer beiden Axen rotiren lassen, daher die entstehende Fläche als »Rotationsellipsoid« bezeichnet wird. In den Krystallen der dritten Abtheilung existirt keine Ebene, in welcher die Elasticität der Substanz mehrere Mal in bestimmten Richtungen, wie oben angegeben, die gleichen Werthe annimmt; die optische Elasticitätsfläche derselben ist daher keine Rotationsfigur, sondern hat nach drei zu einander senkrechten Ebenen elliptische Querschnitte und drei auf einander senkrechte ungleiche Axen; eine solche Fläche nennt man ein »dreiaxiges Ellipsoid«.

Den auf S. 6 nach ihren mechanischen Eigenschaften unterschiedenen Arten von Krystallen entspricht demnach in optischer Beziehung die Eintheilung in folgende drei Klassen:

1) Einfachbrechende (optisch isotrope) Krystalle. Die optische Elasticitätsfläche ist eine Kugel, da die Elasticität des Aethers nach allen Richtungen gleich gross ist.
2) Krystalle, deren optische Elasticitätsfläche ein Rotationsellipsoid (sogenannte »optisch einaxige«).
3) Krystalle, deren optische Elasticitätsfläche ein dreiaxiges Ellipsoid (sogenannte »optisch zweiaxige«).

Da die einfach brechenden Krystalle sich gegen das Licht verhalten, wie isotrope, d. h. amorphe Körper, so gelten alle bisher betrachteten Gesetze der Reflexion, Brechung und Interferenz des Lichtes für sie in derselben Weise, wie für den bisher als Beispiel benutzten amorphen Körper Glas. Diese Krystalle bedürfen also in optischer Beziehung keiner weiteren Erörterung, daher nunmehr zur Beschreibung der optischen Eigenschaften der doppeltbrechenden Krystalle übergegangen werden soll, welche zuerst an einem bestimmten Beispiele aus der Klasse der sogenannten optisch einaxigen, dem Kalkspath (krystallisirtem kohlensaurem Calcium) studirt werden mögen.

§. 15. **Doppelbrechung des Lichtes im Kalkspath.** Die Krystalle des Kalkspaths sind nach drei Richtungen, welche einander unter Winkeln von 74° 56′ schneiden, sehr vollkommen spaltbar, und da dieses Mineral sich in sehr grossen wasserhellen Krystallen in der Natur (besonders auf Island) vorfindet, ist es leicht, von demselben grosse durchsichtige Spaltungsstücke von der Form eines sogenannten Rhomboëders, Fig. 27, herzustellen. Diese eignen sich namentlich deshalb in hohem Grade zu dem experimentellen Studium der Erscheinungen der Doppelbrechung, weil der Kalkspath die Eigenschaft besitzt, die beiden durch die Brechung in demselben entstehenden Strahlen sehr beträchtlich verschieden abzulenken. Stelle Fig. 28 einen sogenannten Hauptschnitt, d. h. einen Durchschnitt des Rhomboëders durch die 4 Eckpunkte *abcd* (Fig. 27) dar, so dass *ab* und *cd* die kurzen Diagonalen der Rhomboëderflächen sind. Lässt man nun senkrecht auf eine dieser Flächen, parallel der im Hauptschnitt liegenden Richtung *mn*, ein Lichtbündel fallen, z. B. blickt man durch die beiden parallelen Rhomboëderflächen nach einer kleinen kreisrunden und beleuchteten Oeffnung in einem dunkeln Schirm, so sieht man zwei gleich helle Bilder dieser Oeffnung, woraus hervorgeht, dass ein in der Richtung *mn* in den Kalkspath eintretender Lichtstrahl in zwei zerlegt wird, von denen

Fig. 27.

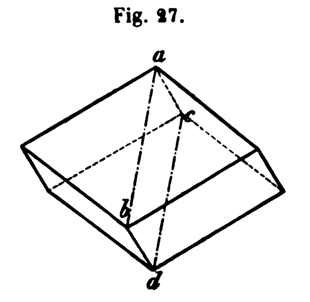
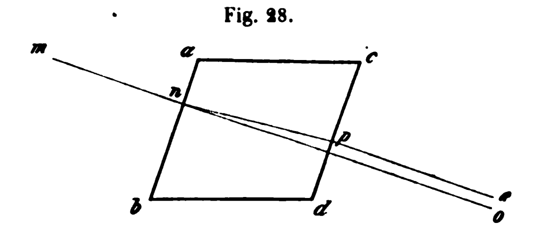


Fig. 28.



einer, *no*, wie ein gewöhnlicher Lichtstrahl bei senkrechter Incidenz, ungebrochen durch den Kalkspath hindurchgeht, während der zweite, in der Ebene des Hauptschnittes abgelenkt, im Krystall sich von *n* nach *p* bewegt, dort die entgegengesetzte Brechung wie in *n* erfährt, also in der Richtung *pe* austritt. Da von diesen beiden Strahlen nur der erstere *no* dem Brechungsgesetz für gewöhnliches Licht (s. §. 12) folgt, so nennt man ihn den ordentlichen (ordinären) Strahl, den anderen den ausserordentlichen (extraordinären).

Sind diese beiden, aus einem Strahl gewöhnlichen Lichtes im Kalkspath entstandenen Strahlen nun wirklich polarisirte Wellenbewegungen mit den in §. 5 auseinandergesetzten Eigenschaften, so müssen dieselben einem zweiten Kalkspath gegenüber sich ganz anders verhalten, als ein gewöhnlicher Lichtstrahl, und dies ist in der That der Fall.

Macht man den Kalkspath in seiner Fassung drehbar um eine Axe, parallel der Richtung des auffallenden Lichtes, so lässt sich leicht bestimmen, welches von den beiden nunmehr sichtbaren Bildern der hellen Oeffnung in dem vorgesetzten dunkeln Schirme das ordentliche, welches das ausserordentliche ist, da ersteres, als nicht abgelenkt, beim Drehen des Rhomboëders stehen bleibt, letzteres, welches im Hauptschnitt abgelenkt ist, mit dessen Drehung sich im Kreise um das ordentliche Bild herumbewegt. Bringt man jetzt vor diesen Kalkspath einen zweiten, gleich gross und ebenso gefasst, in vollkommen paralleler Stellung an, und blickt durch beide hindurch nach der hellen Oeffnung, so sieht man, dass das ordentliche Bild *o* ganz als ordentliches Bild hindurchgeht, ohne abermals doppelt gebrochen zu werden, ebensowenig wie das zweite, welches dagegen als extraordinäres Bild durch Kalkspath *II* geht, da es eine weitere Ablenkung um den gleichen Betrag, wie die in *I*, erleidet; man sieht also, wie vorher, zwei gleich helle Bilder übereinander, aber in doppeltem Abstande. Dreht man nun den vorderen Kalkspath in seiner Fassung nach rechts oder links, so erscheinen vier Bilder der Oeffnung, aber von verschiedener Helligkeit, und man sieht an der Ablenkung leicht, dass jedes der Bilder *o* und *e* in ein ordinäres und ein extraordinäres zerlegt worden ist. Fig. 29 zeigt die beobachtete Erscheinung für den Fall, dass man den Hauptschnitt des dem Auge zunächst befindlichen Kalkspaths *II* um einen kleinen Winkel nach rechts gedreht hat; während bei paralleler Stellung mit dem ersten *I* nur ein ordinäres Bild *o* und ein ebenso helles extraordinäres an der Stelle e_2 sichtbar waren (e_1 bezeichnet die Stelle des extraordinären Bildes, wenn nur der erste Kalkspath vor der hellen Oeffnung steht), erfährt jetzt das Bild e_1 eine Ablenkung im Hauptschnitt des zweiten Kalkspathes, erscheint also in ε_e, besitzt aber eine etwas geringere Helligkeit, und in e_1, d. h. ohne Ablenkung, erscheint ein zweites lichtschwaches Bild; andererseits hat auch *o* an Helligkeit abgenommen, und im Hauptschnitt des zweiten Kalkspaths abgelenkt, also extraordinär gebrochen, erscheint ein Bild ε_0 von derselben geringen Lichtstärke, wie das

jetzt ordinäre e_1. Je weiter man dreht, desto mehr nimmt die Helligkeit des ordinären o, aus dem ersten ordentlichen entstandenen, und des extraordinären Bildes ε_e, welches aus dem ausserordentlichen entstanden ist, ab, während die Helligkeit der beiden andern Bilder fortwährend zunimmt; bei 45° Drehung sind alle vier Bilder gleich hell und befinden sich in der durch Fig. 30 wiedergegebenen Stellung. Wenn die Hauptschnitte beider Kalkspäthe senkrecht aufeinander stehen, so verschwinden das ordentliche Bild von o und das ausserordentliche von e ganz, es erscheinen nur zwei Bilder e_1 und ε_o, das abgelenkte, also ausserordentliche, von o, und das nicht weiter gebrochene, also ordentliche Bild von e (s. Fig. 31). Nach einer Drehung von 180° erscheint nur ein einziges Bild, da e im zweiten Kalkspath um gleich viel nach der entgegengesetzten Richtung abgelenkt wird, als im ersten, also nach seinem Austritt mit dem Bilde o zur Deckung kommt. Bei einer ganzen Drehung eines der beiden Kalkspäthe um 360° giebt es, wie die Beobachtung zeigt, nur vier Stellungen (wenn sich nämlich die Hauptschnitte beider unter 45° durchschneiden), in denen die aus dem ersten Rhomboëder austretenden Strahlen o und e sich wie gewöhnliche Lichtstrahlen verhalten, d. h. in zwei gleich helle zerlegt werden; in allen andern Stellungen entstehen zwei Strahlen von ungleicher Intensität aus denselben; bei parallelen oder senkrecht sich durchkreuzenden Hauptschnitten endlich werden sie gar nicht mehr doppelt gebrochen.*)

Fig. 29.



Fig. 30.



Fig. 31.



Man ersieht also aus diesem Verhalten, dass jeder der beiden Strahlen (eigentlich Bündel von Strahlen), welche

*) Diese Erscheinungen sind geeignet, geradlinig polarisirtes Licht von gewöhnlichem zu unterscheiden, zu welchem Zwecke unser Auge nicht befähigt ist.

aus dem ersten Kalkspath austraten, eine Seitlichkeit erkennen lässt in Bezug auf die dem Hauptschnitt entsprechende Diagonale des Rhombus, welcher die Ein- und Austrittsfläche des Kalkspathes darstellt. Wollen wir diese Erscheinungen also dadurch erklären, dass im Krystall zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen entstanden sind, so können wir dies auf keine andere Weise, als indem wir annehmen, dass die Schwingungsrichtung des einen derselben mit jener Diagonalen, die des andern mit der dazu Senkrechten (der längeren Diagonale des Rhombus) zusammenfällt.

Angenommen, der ordinäre Strahl *o*, welcher aus dem Kalkspath austritt, bestehe nur aus geradlinigen Schwingungen parallel der längeren Diagonale der Rhomboëderfläche, der extraordinäre *e* aus solchen parallel der kurzen Diagonale. Möge Fig. 32 *I* und *II* die beiden Kalkspathrhomboëder, durch welche das Licht gehen soll, welche man sich also, den einen vor dem andern, zu denken hat, neben einander darstellen, so würden *oo* und *o'o'* in denselben die Schwingungsrichtungen des ordentlichen, *ee* und *e'e'* diejenigen des ausserordentlichen Strahles sein, dessen Fortpflanzungsrichtung senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Der ordentliche Strahl mit der Schwingungsrichtung *oo*, welcher aus *I* austritt, gelangt in *II*, wenn *I* und *II* parallel sind, wie es Fig. 32 darstellt, mit der Schwingungsrichtung *o'o'*, hier wird die Bewegung zerlegt in eine solche nach *o'o'* und eine nach *e'e'*; der auf letztere Richtung fallende Antheil derselben ist jedoch gleich Null, die Componente parallel *o'o'* gleich der Intensität des in *II* eintretenden ordentlichen Strahls; dieser wird also im zweiten Kalkspath nicht doppelt gebrochen, sondern geht vollständig als ordentlicher Strahl durch denselben. Denken wir uns jetzt *II* um einen kleinen Winkel gedreht, s. Fig. 33, so tritt der ordentliche Strahl aus *I* mit der Schwingungsrichtung *ωω* in *II* ein, wird hier in zwei Strahlen zerlegt, welche nach *o'o'* und *e'e'* schwingen, und deren Amplituden sich verhalten, wie die Längen *CO* und *CE*, d. h. er geht nicht mit seiner vollen Intensität als ordentlicher Strahl hindurch, der Rest als ausserordentlicher, also im Hauptschnitt von *II* abgelenkt, wie es Fig. 29 zeigt. In diesem Falle wird der aus dem ersten Kalkspath austretende ordentliche Strahl im zweiten also doppelt gebrochen, liefert aber zwei Strahlen von verschiedener Intensität. Bei einer weiteren Drehung des Kalk-

Fig. 32.

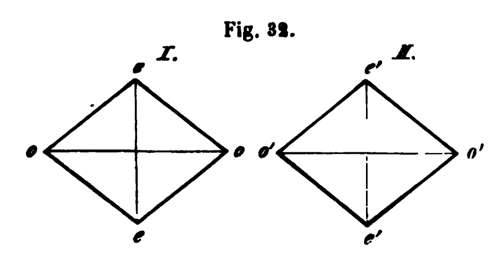
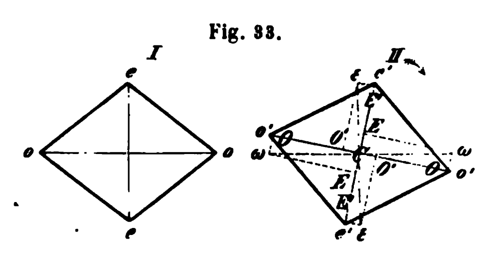


Fig. 33.



spaths *II*, Fig. 34, wenn derselbe nämlich 45° mit *I* bildet, wird der ordentliche Strahl durch *II* in gleich grosse Componenten zerlegt, er liefert also zwei gleich helle Strahlen, einen ordinären und einen extraordinären; demnach geht er nur zur Hälfte als ordentlicher Strahl durch den zweiten Kalkspath. Das ist genau die in Fig. 30 dargestellte Erscheinung. Je weiter man nun *II* dreht, ein um so kleinerer Antheil der aus *I* austretenden horizontalen Schwingungen des Aethers geht als ordentlicher Strahl durch *II*; bei der in

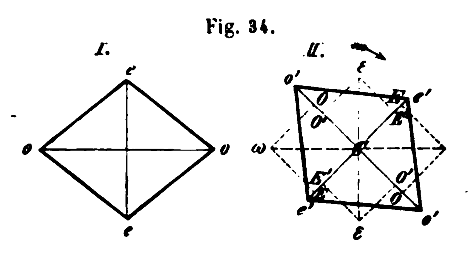
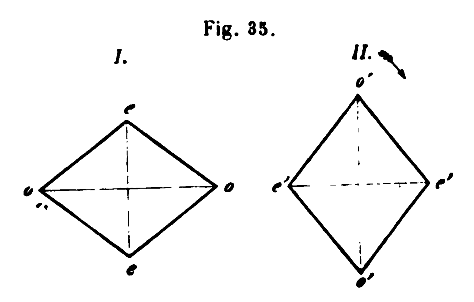


Fig. 35 dargestellten Stellung, in welcher *I* und *II* rechtwinkelig gekreuzt erscheinen, tritt der aus *I* herauskommende ordinäre Strahl in *II* mit der Schwingungsrichtung *e'e'* ein, wird also in zwei senkrechte Componenten zerlegt, deren erste, parallel *o'o'*, gleich Null, deren zweite, parallel *e'e'*, gleich der ganzen Amplitude des eintretenden Lichtes ist; der Strahl *o* kann also gar nicht mehr als ordinärer Strahl durch den zweiten Kalkspath hindurchgehen, er geht ganz als extraordinärer hindurch (vgl. Fig. 31). Theilweise als ordentlicher gelangt er wieder durch *II* bei weiterer Drehung des letzteren, vollständig, wenn die gesammte Drehung = 180° ist, — und es ist einleuchtend, dass völlig das Gleiche eintreten muss, wenn die Drehung, von der Stellung in Fig. 32 ausgehend, nach links herum, statt nach rechts, stattgefunden hätte. Die zu Grunde gelegte Annahme über die Natur des durch den Kalkspath hindurch gegangenen Lichtes lehrt demnach ebenso, wie die beobachteten und vorher beschriebenen Erscheinungen, dass der Hauptschnitt des Kalkspathrhomboëders insofern charakteristisch für den aus dem ersten Rhomboëder austretenden ordinären Strahl ist, als derselbe ganz als ordentlicher durch *II* hindurchgeht, wenn der Hauptschnitt von *II* parallel dem von *I*, um so weniger, je grösser der Winkel ist, welchen die Hauptschnitte beider einschliessen, endlich gar nicht, wenn dieselben senkrecht aufeinander stehen. Wir wollen deshalb diese für den Strahl *o* so charakteristische Ebene seine Polarisationsebene nennen und ihn als einen im Hauptschnitt polarisirten Strahl bezeichnen.



Betrachten wir nunmehr den zweiten, ausserordentlichen Lichtstrahl, welcher aus Kalkspath *I* austritt, unter denselben Voraussetzungen, so zeigt Fig. 32 oder 36, dass dieser in *II* mit der Schwingungsrichtung *e'e'* eintretend, in zwei Componenten nach *o'o'* und *e'e'* zerlegt wird, deren erste gleich

Null ist; diese hat aber die Schwingungsrichtung des ordentlichen Strahls, also kann bei paralleler Stellung der Kalkspäthe der Strahl *e* aus *I* gar nicht als ordentlicher Strahl durch *II* hindurchgehen, wie dies in der That die Beobachtung lehrt (vgl. S. 48). Drehen wir *II* um einen Winkel, s. Fig. 37, so tritt *e* mit der Schwingungsrichtung *εε* ein und wird in die beiden Componenten *CO'* und *CE'* zerlegt, jetzt geht also der extraordinäre Strahl des ersten Kalkspaths theilweise als ordentlicher durch den zweiten, und zwar ein um so grösserer Antheil, je weiter wir drehen. Steht endlich, wie in Fig. 38, die zum Hauptschnitt des zweiten Kalkspaths senkrechte Ebene, welche durch *o'o'* und die Fortpflanzungsrichtung des Strahles bestimmt ist, parallel dem Hauptschnitt des ersten, so muss der aus diesem austretende extraordinäre Strahl vollständig als ordinärer Strahl durch *II* hindurchgehen (wie es nach Fig. 34 wirklich der Fall ist); bei noch weiterer Drehung wieder nur unvollständig u. s. f. Dem Hauptschnitt des ersten Kalkspaths muss also parallel sein die senkrecht zum Hauptschnitt stehende Ebene des zweiten, damit der Strahl *e* als gewöhnlicher vollständig durch letzteren hindurchgelangen kann: einen je grösseren Winkel jene beiden Ebenen miteinander einschliessen, um so weniger kann von jenem als ordentlicher Strahl durch *II* hindurch. Die Ebene, welche senkrecht zum Hauptschnitt steht, ist also ganz in gleicher Weise charakteristisch für den extraordinären Strahl, wie es der Hauptschnitt selbst für den ordinären ist; man nennt deshalb jene die Polarisationsebene des ausserordentlichen Lichtstrahls, und sagt, dieser sei senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt.

Fig. 36.

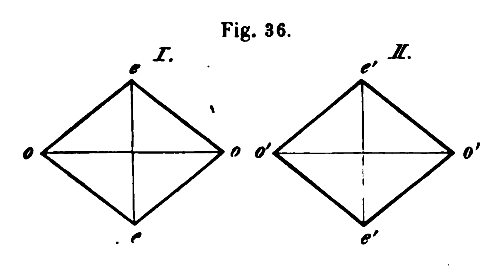


Fig. 37.

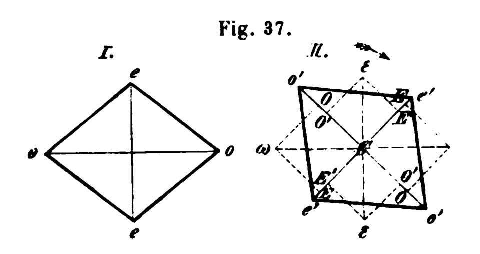
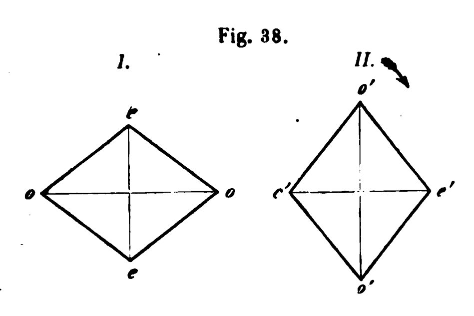


Fig. 38.



Man ersieht aus dem Vorhergehenden, dass die Annahme, der ordinäre Strahl schwinge parallel der grossen, der extraordinäre parallel der kleinen Diagonale der Rhomboëderfläche, die beobachteten Erscheinungen vollkommen erklärt. Dasselbe ist nun aber auch der Fall mit der Annahme, dass umgekehrt der extraordinäre Strahl parallel der längeren Diagonale, der ordinäre parallel der kürzeren seine geradlinigen Vibrationen ausführe. Ver-

tauscht man nämlich in den Figuren 32 bis 38 durchweg die Buchstaben o und e, so resultiren genau die gleichen Folgerungen, z. B. folgt auch dann aus Fig. 32 oder 36, dass der aus dem ersten Kalkspath austretende ordinäre Strahl ganz als ordinärer durch den zweiten hindurchgeht u. s. f.

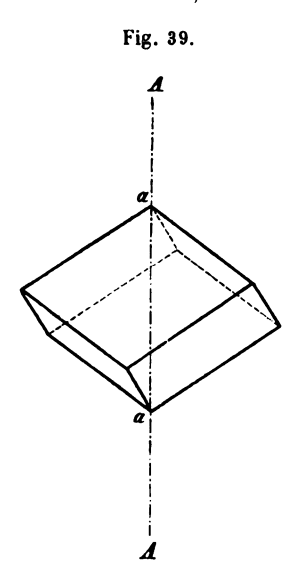
Diese beiden, einzig möglichen, Annahmen unterscheiden sich darin, dass bei der ersten vorausgesetzt wird, ein geradlinig polarisirter Lichtstrahl schwinge senkrecht zu seiner Polarisationsebene, bei der zweiten, er schwinge parallel derselben. Da man in der Physik der ersteren dieser Voraussetzungen, welche beide die Erscheinungen der Doppelbrechung gleich gut zu erklären geeignet sind und zwischen denen eine zweifellose Entscheidung noch nicht getroffen ist, allgemein den Vorzug giebt, so soll im Folgenden stets angenommen werden, dass die Schwingungsebene eines linear polarisirten Lichtstrahles senkrecht zu seiner Polarisationsebene stehe.

Die Vibrationsrichtung des polarisirten Lichtes muss stets einen Winkel mit der des Strahles einschliessen, da longitudinale Schwingungen, bei denen jener Winkel gleich Null ist, niemals irgend eine Seitlichkeit zeigen können. Was die Grösse dieses Winkels betrifft, so folgt dieselbe aus zwei von Arago und Fresnel gefundenen, empirischen Gesetzen. Diese Physiker beobachteten nämlich, 1) dass zwei Lichtstrahlen mit parallelen Polarisationsebenen interferirten, wie gewöhnliches Licht; 2) dass zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen gar nicht interferirten. In der Mechanik wird bewiesen, dass nur solche geradlinig polarisirte Wellenbewegungen ein derartiges Verhalten zeigen können, deren Vibrationen senkrecht zur Richtung ihrer Fortpflanzung stattfinden. Das aus einem Kalkspath austretende polarisirte Licht kann also nur aus solchen Schwingungen bestehen, welche in einer Ebene (Schwingungsebene) und senkrecht zum Strahl stattfinden. Die Summe der Helligkeiten der beiden durch einen Kalkspath gegangenen Strahlen ist nun gleich der Helligkeit des eingetretenen gewöhnlichen Lichtes; demnach kann dieses ebenfalls nur aus transversalen, senkrecht zum Strahl stattfindenden Vibrationen bestehen, da eine andere Art von Schwingung im Kalkspath vernichtet worden wäre. Danach bleibt nur die anfänglich gemachte Annahme über die Natur des gewöhnlichen Lichtes übrig, dass dasselbe nämlich linear polarisirtes, senkrecht zur Richtung des Strahls schwingendes Licht ist, dessen Schwingungsazimuth, oder, was dasselbe bedeutet, dessen Polarisationsebene fortwährend sehr schnell wechselt. Dass diese Annahme in der That eine berechtigte ist, beweist das folgende von Dove angegebene Experiment: lässt man einen Kalkspath, auf dessen eine Rhomboëderfläche ein gewöhnlicher Lichtstrahl auffällt, folglich der entstehende ordinäre Strahl in derselben Richtung an der entgegengesetzten Fläche austritt, um diese Richtung als Drehungsaxe sehr schnell rotiren, so zeigt der austretende ordinäre Strahl einem zweiten Kalkspath gegenüber nicht mehr das Verhalten eines polarisirten, sondern das eines gewöhnlichen Licht-

strahls. Hier hat man es aber bestimmt mit einem geradlinig polarisirten Strahle zu thun, nur dass seine Polarisationsebene (der Hauptschnitt des Kalkspathes) durch dessen Rotation ihre Richtung fortwährend sehr schnell ändert.

§. 16. **Doppelbrechung** (Forts.) **und Wellenfläche des Lichtes im Kalkspath.** Wenn auf eine Rhomboëderfläche des Kalkspathes ein Lichtstrahl senkrecht auffällt, so sahen wir, dass der ordentliche Strahl gar nicht, der ausserordentliche in der Ebene des Hauptschnittes abgelenkt wird (s. S. 47); steht dagegen die Richtung des einfallenden Lichtes schief gegen die Rhomboëderfläche, befindet sich jedoch im Hauptschnitt, so beobachtet man, dass die Richtungen beider entstehender Strahlen, welche natürlich beide eine Ablenkung erfahren, ebenfalls den Hauptschnitt nicht verlassen. Dasselbe geschieht, wenn statt des einen Paares paralleler Flächen, welches das Rhomboëder begrenzt, eines der beiden andern genommen wird. In jedem dieser drei Fälle ist die Lage des Hauptschnittes eine andere, da sie durch die Normale zur Rhomboëderfläche und durch die Schwingungsrichtung des entstehenden ausserordentlichen Strahles bestimmt ist; die Hauptschnitte für das erste, zweite und dritte Flächenpaar des Rhomboëders schneiden einander aber in einer Richtung AA, Fig. 39, mit welcher die drei oberen und folglich auch die drei unteren Flächen des Rhomboëders gleiche Winkel bilden. Nennen wir diese in Fig. 39 senkrecht gestellte Richtung*) die Axe des Rhomboëders, so können wir den optischen Hauptschnitt desselben für einen auf eine Rhomboëderfläche auffallenden Strahl nunmehr definiren als diejenige Ebene, in welcher das Einfallsloth (d. h. die Normale zur Rhomboëderfläche) und die Axe des Rhomboëders gelegen sind. Lässt man nun Lichtstrahlen unter verschiedenen Winkeln geneigt, aber immer in einem solchen Hauptschnitt, auffallen, und bestimmt den Brechungsexponent der beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen für jeden derselben, so ergiebt sich, dass derjenige des ordinären Strahls immer derselbe bleibt, unter welchem Winkel das Licht auch einfällt, nämlich für mittlere Farben den Werth $\omega = 1{,}654$ besitzt. Es war dies auch schon deshalb zu erwarten, weil dieser Strahl für alle im Hauptschnitt liegenden Neigungen des einfallenden Lichtes stets dieselbe Schwingungsrichtung besitzt, nämlich nach unserer Annahme die Normale zum Hauptschnitt. Bestimmt man unter gleichen Verhältnissen den Brechungsexponenten des ausserordentlichen Strahles, so er-

Fig. 39.



*) Denken wir sie uns durch zwei gegenüberliegende Ecken des Rhomboëders gelegt, so schneiden sich in ihren beiden Endpunkten a je drei gleichwinkelige Kanten.

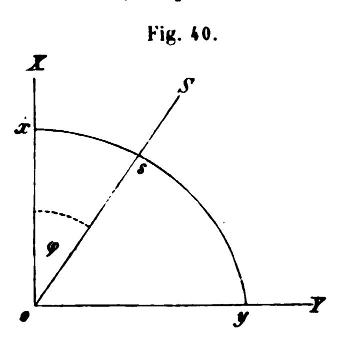
giebt sich dieser verschieden, je nach der Richtung, in welcher er sich im Kalkspath bewegt, (wie auch zu erwarten stand, da seine in den Hauptschnitt fallende und zur Fortpflanzungsrichtung normale Schwingungsrichtung mit der Neigung des einfallenden Strahls zur Axe sich ändert), und zwar ist dieser Brechungsexponent genau gleich dem des ordinären Strahles (1,654), wenn der extraordinäre sich parallel der Axe fortpflanzt, er ist um so kleiner, je grösser der Winkel zwischen seiner Richtung und der Axe ist, und hat seinen kleinsten Werth $\varepsilon = 1,483$ senkrecht zur Axe.

Wählen wir jetzt statt eines jener oben definirten drei Hauptschnitte irgend eine Ebene, welche sich mit jenen drei in der Axe schneidet, und schleifen wir senkrecht zu derselben eine ebene Fläche an den Kalkspath an, durch welche das Licht eintritt, — so beobachten wir, dass die Brechungsexponenten der unter verschiedenen Neigungen in jener Ebene auffallenden Strahlen genau dieselben Werthe haben, wie sie im vorhergehenden Falle bei gleichem Neigungswinkel gegen die Axe gefunden wurden. Für diese beliebig gewählte Ebene sind die optischen Verhältnisse des Krystalls ganz dieselben, wie für die oben definirten drei Hauptschnitte, folglich können wir diese ebenfalls als einen solchen bezeichnen und nennen nun ganz allgemein den optischen Hauptschnitt eines einfallenden Strahles diejenige Ebene, welche durch den Strahl und die optische Axe des Krystalls geht, wobei wir unter »optische Axe des Krystalls« diejenige Richtung verstehen, in welcher der ordinäre und der extraordinäre Strahl gleichen Brechungsquotienten besitzen. Der Kalkspath ist demnach ein Krystall mit unendlich vielen optischen Hauptschnitten, welche sich sämmtlich in der Axe schneiden und alle gleichwerthig sind, denn in jedem derselben nimmt der Brechungsexponent des ausserordentlichen Strahles mit der Neigung gegen die Axe in derselben Weise ab, während der des ordentlichen nicht nur in allen Hauptschnitten, sondern auch in jeder Richtung innerhalb eines jeden denselben Werth beibehält.

Da die Lichtgeschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten, wie die Brechungsexponenten, so folgt aus diesen Beobachtungen: der ordentliche Strahl o, welcher im Kalkspath entsteht, pflanzt sich nach allen Richtungen gleich schnell fort, der ausserordentliche e in der Richtung der Axe mit derselben Geschwindigkeit, in jeder andern mit grösserer. Da die beiden Strahlen gleiche Geschwindigkeit haben, wenn sie sich parallel der Axe bewegen, so kann nach dieser Richtung keine Doppelbrechung stattfinden; gewöhnliches Licht pflanzt sich demnach als solches durch den Kalkspath fort, wenn es parallel seiner optischen Axe hindurchgelangt. Ganz so, wie bei einem gewöhnlichen Lichtstrahl in einem einfach brechenden Mittel, sind auch die Verhältnisse des ordinären Strahles, seine Richtung ist also für jeden Fall durch die Huyghens'sche Construktion zu bestimmen; seine Wellenfläche ist eine Kugel. Was den extraordinären Strahl betrifft, so hat schon

Huyghens nachgewiesen, dass die verschiedenen Geschwindigkeiten, welche ausserordentliche Strahlen eines Hauptschnittes, aber von verschiedener Neigung gegen die Axe, besitzen, sich zu einander verhalten, wie die gleich gerichteten radii vectores einer Ellipse, deren kleine Axe die Geschwindigkeit des ausserordentlichen (= ordentl.) Strahles parallel zur optischen Axe, deren grosse Axe die Geschwindigkeit desselben senkrecht zur Axe ist. Wenn in Fig. 40 Y eine Richtung senkrecht zur optischen Axe, X parallel derselben, die Ebene XY also ein optischer Hauptschnitt des Kalkspaths, wenn ferner $ox : oy$ das Verhältniss der Lichtgeschwindigkeiten des Strahles e parallel und senkrecht zur Axe, so ist diejenige eines beliebigen extraordinären Strahles oS, welcher den Winkel φ mit der Axe bildet, gleich os, d. h. der Länge des radius vector der Ellipse in derselben Richtung. Da erfahrungsgemäss die Lichtgeschwindigkeit des ausserordentlichen Strahles für alle Richtungen dieselbe ist, welche gleiche Winkel mit der Axe bilden, so gilt Obiges für alle unzählig vielen Hauptschnitte, welche rings um die Axe zu denken sind.

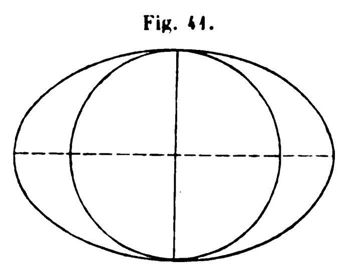
Fig. 40.



Die Länge os ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für alle Strahlen mit gleichem Winkel φ, welche man erhält, wenn man sich die Fig. 40 um ox als Rotationsaxe um 360° gedreht denkt. Die ganze Ellipse liefert hierbei ein Rotationsellipsoid, dessen radius vector in jeder beliebigen Richtung ein Maass der Grösse der Lichtgeschwindigkeit von e in derselben Richtung ist. Geht also von irgend einem Punkte o im Innern des Kalkspaths eine Lichtbewegung aus, so wird der extraordinäre Antheil derselben sich zwar auch nach allen Richtungen fortpflanzen, aber nicht mit derselben Geschwindigkeit; nach einer bestimmten Zeit wird er in der Richtung der Axe bis x, senkrecht zu derselben nach allen Seiten gleichweit, nämlich bis y, in der beliebigen Richtung oS bis s u. s. f., gelangt sein, d. h. bis an die Oberfläche jenes Ellipsoides, welches durch die Rotation der Ellipse xsy um ox entsteht. Die Radien dieses Ellipsoides sind proportional den Wellenlängen des Lichtes von einer bestimmten Schwingungsdauer, welches sich parallel diesen Radien fortpflanzt, da die Wellenlänge mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit proportional wächst. Die Wellenfläche des ausserordentlichen Strahles ist demnach ein Rotationsellipsoid, dessen kleine Axe seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit parallel zur optischen Axe, und zugleich Rotationsaxe, dessen grosse Axe die Geschwindigkeit von e senkrecht zur optischen Axe ist. Da in der Richtung der Axe oX die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles gleich gross sind, so muss die Wellenfläche des ersteren in der Richtung oX denselben Durchmesser ox besitzen, wie die des

letzteren; die vollständige Wellenfläche des Lichtes im Kalkspath erhalten wir demnach, wenn wir die beiden in Fig. 41 dargestellten Curven um die senkrechte Axe rotiren lassen. Beginnt also an irgend einem Punkte im Innern des Kalkspaths eine Lichtbewegung und kann sich dieselbe ungehindert nach allen Seiten fortpflanzen, so ist sie nach einer bestimmten Zeit auf einer doppelten Oberfläche angelangt, bestehend aus einem Rotationsellipsoid und einer von diesem umhüllten Kugel, welche das Ellipsoid in den Endpunkten der Rotationsaxe (der kleinen Axe der erzeugenden Ellipse) berührt.

Fig. 41.



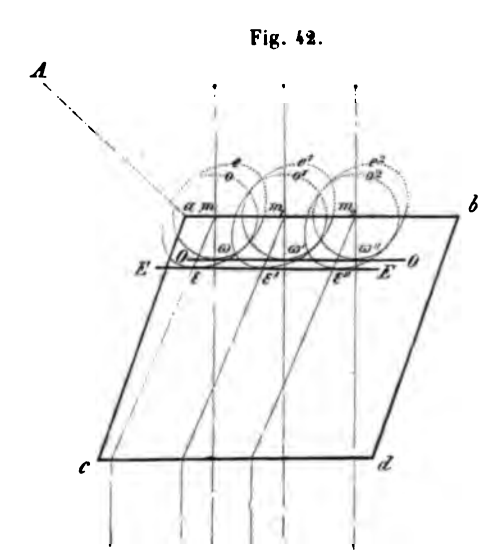
Die Gestalt dieser Wellenfläche ist somit gegeben, wenn das Verhältniss der grossen und kleinen Axe der Ellipse, d. h. das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des extraordinären Strahles parallel und senkrecht zur optischen Axe bekannt ist. Zur Bestimmung dieser Grössen ist die Messung der beiden Brechungsexponenten ω und ε erforderlich und diese kann auf mehrfache Weise geschehen: 1) mittelst eines Prismas, dessen brechende Kante parallel der optischen Axe ist, welches also das einfallende Licht in zwei Strahlen zerlegt, von denen der eine parallel, der andere senkrecht zur optischen Axe schwingt und daher der erstere durch seine Minimalablenkung ε, der andere (ordinäre) ω ergiebt; 2) mittelst eines Prismas, dessen brechende Kante senkrecht zur optischen Axe ist; hier ist aber die weitere Bedingung erforderlich, dass die beiden Flächen des Prismas gleichen Winkel mit der Axe einschliessen, damit die im Prisma sich fortpflanzenden Strahlen im Minimum der Ablenkung normal zur optischen Axe gerichtet sind; alsdann ist nämlich wieder die Schwingungsrichtung des einen parallel, die des anderen senkrecht zur Axe, und man kann auch mit einem solchen Prisma ε und ω gleichzeitig bestimmen, indem man den ordinären und extraordinären Strahl einzeln auf das Minimum der Ablenkung einstellt und aus der letzteren nach der S. 32 gegebenen Formel den zugehörigen Brechungsexponenten berechnet; 3) mittelst eines Prismas, dessen eine Fläche parallel der optischen Axe ist, und auf welche man die Strahlen senkrecht auffallen lässt (s. III. Abtheil.); 4) mittelst des Totalreflectometers (s. S. 34) und einer beliebig gerichteten Platte des Krystalls; hierbei erhält man zwei Grenzen der totalen Reflexion, weil der in der Grenzschicht sich fortpflanzende Strahl in zwei zerlegt wird, welche senkrecht zu einander schwingen und, entsprechend der Verschiedenheit ihrer Geschwindigkeit, auch verschiedenen Winkel der totalen Reflexion besitzen. In der Ebene der Krystallplatte, dieselbe mag im Krystall orientirt sein, wie sie wolle, existirt immer eine Richtung, welche mit der optischen Axe 90° bildet; befestigt man nun die Platte so im Totalreflectometer, dass diese Richtung horizontal, d. h. parallel der Einfallsebene des Lichtes ist, so ist sie bei

der totalen Reflexion die Richtung, in der sich das Licht fortpflanzt; ein senkrecht zur Axe im Krystall sich fortpflanzender Strahl wird aber zwei zerlegt, deren einer parallel, deren anderer senkrecht zur Axe schwingt. Die Einstellung der beiden Grenzen der totalen Reflexion liefert also ω und ε.

Mit der durch die Messung der beiden Hauptbrechungsexponenten ω und ε bestimmten Gestalt der Wellenfläche ist nun aber in der Huygens'schen Construction ein Mittel gegeben, die Richtung des extraordinären ebenso gut, wie die des ordinären Strahles für jeden beliebigen Fall zu bestimmen.

Sei z. B. in Fig. 42 *abcd* ein Hauptschnitt eines Kalkspathrhomboëders (*ab* und *cd* kurze Diagonalen, *ac* und *bd* stumpfe Kanten), so ist *aA* die Richtung der optischen Axe; fallen nun in der Weise, wie wir (s. Fig. 28) zum ersten male die Erscheinungen der Doppelbrechung am Kalkspath beobachteten, auf *ab* gewöhnliche Lichtstrahlen mit senkrechter Incidenz auf, so werden sie sämmtlich zu gleicher Zeit, von den Punkten m, m_1, m_2, .. aus, beginnen, sich im Kalkspath fortzupflanzen. Der entstehende ordinäre Strahl gelangt von diesen Punkten aus in einer bestimmten Zeit bis an die Oberfläche der Kugeln o, o_1, o_2, ..; nach Früherem ist seine neue Wellenfläche die Tangentialebene an alle diese einzelnen Wellenflächen, also *OO*, und $m\omega$, $m_1\omega_1$ u. s. f. die Richtung der entstehenden ordentlichen Strahlen.

Fig. 42.

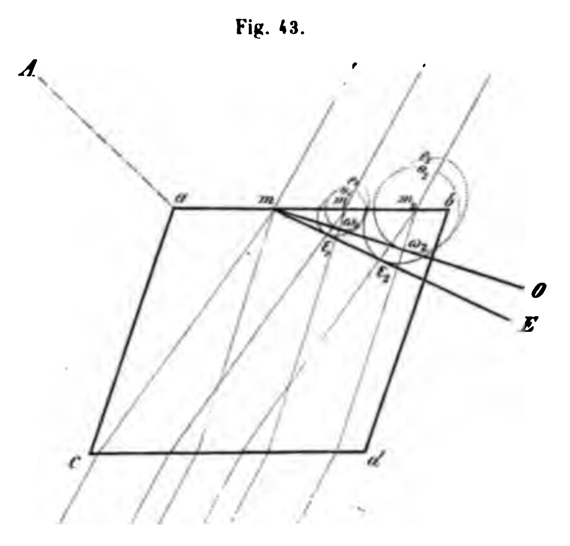


Der zweite, extraordinäre Strahl ist in derselben Zeit gelangt von m, m_1, m_2, .. aus bis an die Oberfläche der Rotationsellipsoide e, e_1, e_2, .., deren Rotationsaxe parallel *aA* ist; seine Wellenfläche im Kalkspath ist also die gemeinschaftliche Tangentialebene aller dieser Wellenflächen, *EE* in unserem Durchschnitt, und die Richtung $m\varepsilon$, $m_1\varepsilon_1$ u. s. f. der extraordinären Strahlen ist gegeben durch die geradlinige Verbindung von m, m_1 .. mit den Punkten der Rotationsellipsoide, in welchen sie von *EE* berührt werden. Der ausserordentliche Strahl muss also eine Ablenkung im Hauptschnitt erfahren, ganz so, wie wir es früher beobachtet haben, und ausserdem sieht man, dass bei demselben nicht, wie bei einem gewöhnlichen Lichtstrahl, die Wellenfläche und die Richtung des Strahles senkrecht aufeinander stehen.

Wenn (Fig. 43) die Strahlen im Hauptschnitt, jedoch unter schiefer Incidenz, auf den Kalkspath auffallen, also die Punkte m, m_1, m_2 zu ver-

schiedenen Zeiten von den Wellenbewegungen erreicht werden, so ist die Wellenfläche des resultirenden ordentlichen Strahles die Tangentialebene durch mO senkrecht zum Hauptschnitt, die des ausserordentlichen die entsprechende Ebene durch mE; die ordinäre Wellenbewegung pflanzt sich also in der Richtung $m_1\omega_1, m_2\omega_2$, die extraordinäre parallel $m_1\varepsilon_1$, $m_2\varepsilon_2$ fort. Die Wellenfläche mE tangirt die einzelnen Ellipsoide e_1, e_2 in den Punkten ε_1, ε_2, und diese müssen in der Ebene des Hauptschnittes $abcd$ liegen, da in denselben auch die Rotationsaxe der Ellipsoide fällt, und dieser Hauptschnitt, der zugleich Einfallsebene des Lichtes ist, dieselben in zwei völlig symmetrische Hälften theilt.

Fig. 43.



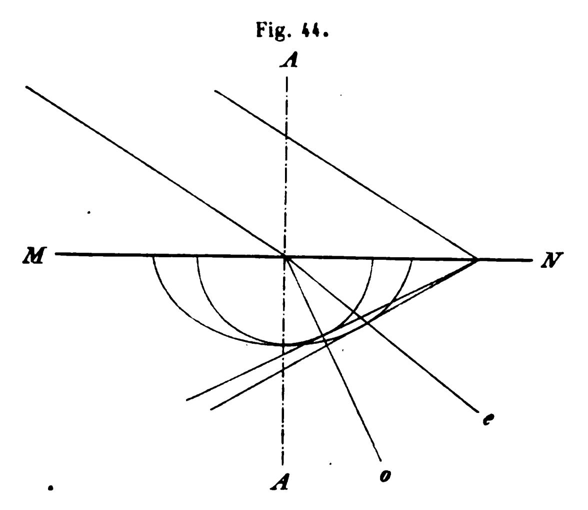
Fällt dagegen die Einfallsebene des Lichtes nicht mit einem Hauptschnitt zusammen, so findet keine derartige symmetrische Halbirung der einzelnen Wellenflächen durch die Einfallsebene mehr statt, folglich berührt die Tangentialebene jene in Punkten, welche ausserhalb der Einfallsebene des Lichtes liegen. Der ausserordentliche Strahl, dessen Richtung die geradlinige Verbindung des Punktes auf dem Rotationsellipsoid, welcher von der Wellenebene berührt wird, mit dem Mittelpunkte desselben ist, tritt somit aus der Einfallsebene des Lichtes in allen Fällen heraus, wo diese nicht mit einem Hauptschnitt zusammenfällt, während selbstverständlich der ordinäre stets in der Einfallsebene bleibt, da seine Wellenfläche, wie die des gewöhnlichen Lichtes, eine Kugel ist. In allen Fällen aber kann für jede beliebige Richtung des auffallenden Lichtes, wenn die Lage der von demselben getroffenen Fläche des Kalkspathes bekannt ist, aus der Gestalt und Lage der Wellenfläche nicht nur die Richtung des entstehenden ordentlichen, sondern auch des ausserordentlichen Strahles bestimmt werden.

§. 17. Allgemeine Eigenschaften der optisch einaxigen Krystalle.

Alle krystallisirten Medien, deren optische Eigenschaften mit denen des Kalkspathes darin übereinstimmen, dass dieselben in einer Richtung keine Doppelbrechung zeigen, in jeder anderen aber das Licht in zwei Strahlen zerlegen, werden »optisch einaxige« genannt. Sie zerfallen in zwei Klassen, je nachdem der extraordinäre Strahl sich in denselben schneller fortpflanzt als der ordinäre, oder umgekehrt. Die erste Abtheilung, zu der

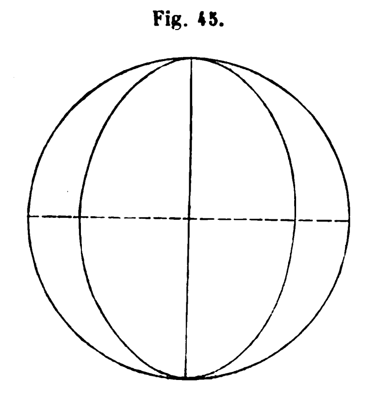
der Kalkspath gehört, sind solche, deren Wellenfläche, nach dem Hauptschnitt halbirt, die Gestalt von Fig. 41 hat, nur dass bei der Mehrzahl derselben die Ellipse weit weniger vom Kreise abweicht, als es beim Kalkspath der Fall ist.*) Wie aus Fig. 44 ersichtlich, wird in denselben der

Fig. 44.



ausserordentliche Strahl *e* stets, vom ordentlichen *o* aus gerechnet, von der optischen Axe *AA* weg gebrochen; man nennt dieselben deshalb repulsive oder negative Krystalle. In einem Krystall der zweiten Abtheilung, wohin z. B. der Quarz gehört, hat die Wellenfläche im Hauptschnitt die Gestalt Fig. 45; die Geschwindigkeit, mit der sich der extraordinäre Strahl bewegt, ist nur in der Axe gleich der des ordentlichen, in jeder anderen Richtung kleiner, sein Brechungsquotient also grösser. Aus Fig. 46 ist nun zu entnehmen, dass hier, umgekehrt wie bei den negativen Krystallen, der ausserordentliche Strahl *e*, vom ordentlichen *o* aus gerechnet, nach der optischen Axe hin abgelenkt wird. Diese Krystalle nennt man deshalb optisch positive oder attraktive.

Fig. 45.



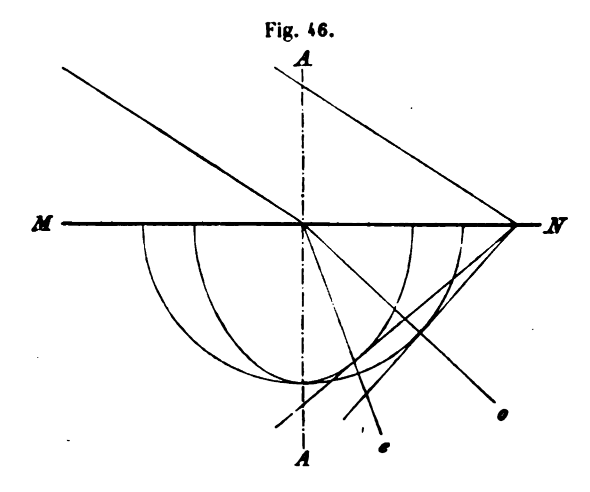
Bestimmen wir mittelst einer der S. 57 angegebenen Methoden die beiden Hauptbrechungsquotienten ω und ε eines einaxigen Krystalls, so liefern uns diese das Verhältniss zwischen den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der senkrecht und parallel der Axe schwingenden Lichtstrahlen,

*) Auch bei diesem ist die Differenz zwischen grosser und kleiner Axe der Ellipse nicht so beträchtlich, wie sie der Deutlichkeit wegen in den Figuren angenommen worden ist.

denn wenn wir mit v die Lichtgeschwindigkeit in der Luft, mit v_0 die Geschwindigkeit der senkrecht zur Axe schwingenden Strahlen, mit v_a diejenige der parallel der Axe schwingenden bezeichnen, so haben wir

$$\omega = \frac{v}{v_0} \qquad \varepsilon = \frac{v}{v_a} \text{ folglich: } v_0 : v_a = \varepsilon : \omega.$$

Fig. 46.



Da nach S. 44 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Strahlen verschiedener Schwingungsrichtung proportional sind den Quadratwurzeln der Elasticität in der Richtung der Schwingungen, so muss sich der Werth von $\sqrt{e}$ mit der Richtung im Krystall nach demselben Gesetze ändern, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit polarisirter Strahlen mit ihrer Schwingungsrichtung. Bezeichnen wir daher mit e_a die Elasticität des Aethers in der Richtung der optischen Axe, mit e_0 diejenige der Richtungen senkrecht zur Axe, so verhalten sich $\sqrt{e_a} : \sqrt{e_0} = v_a : v_0$, und $\sqrt{e}$ in einer dazwischen liegenden Richtung ist proportional dem radius vector einer Ellipse mit den Hauptaxen $\sqrt{e_a}$ und $\sqrt{e_0}$. Bei einem negativ doppeltbrechenden Krystall, z. B. beim Kalkspath, ist e_a der Maximalwerth der Elasticität, weil die parallel der Axe schwingenden Strahlen, deren Geschwindigkeit $= v_a$, sich am schnellsten fortpflanzen, während e_0 den kleinsten Werth darstellt, weil die senkrecht zur Axe schwingenden Strahlen die kleinste Geschwindigkeit v_0 haben. Wenn wir daher eine Ellipse construiren, deren Hauptaxen sich verhalten, wie die grösste und kleinste Lichtgeschwindigkeit des extraordinären Strahls, welche also genau dieselbe Gestalt besitzt, wie die in Fig. 41 abgebildete, — ihre grosse Axe aber der optischen Axe parallel gestellt denken, so ist die Länge jedes radius vector derselben gleich der Quadratwurzel der Elasticität in der betreffenden Richtung. Denken wir uns alsdann diese Ellipse um die optische Axe gedreht, so erhalten wir ein Rotationsellipsoid, dessen grosse Axe die Rotationsaxe, welches demnach eine in der Richtung der optischen Axe verlängerte Form besitzt. Da bei dem als Beispiel ge-

wählten Kalkspath, wie bei jedem einaxigen Krystall, in jedem Hauptschnitt rings um die Axe vollständige Gleichheit herrscht, so muss jenes Ellipsoid die optische Elasticitätsfläche des Kalkspaths darstellen, d. h. diejenige Fläche, deren Radien nach verschiedenen Richtungen sich verhalten, wie die Quadratwurzel der Elasticität in den betreffenden Richtungen. Betrachten wir dagegen einen positiv doppeltbrechenden Krystall, so finden wir das umgekehrte Verhältniss: die parallel der Axe schwingenden Strahlen pflanzen sich am langsamsten fort, e_a ist der kleinste Werth, den die Elasticität des Aethers im Krystall annimmt, während dieselbe senkrecht zur Axe am grössten ist; daher ist die optische Elasticitätsfläche, welche die Werthe von $\sqrt{e}$ nach allen Richtungen gleichzeitig darstellt, ein Rotationsellipsoid, dessen kleinste Axe die Rotationsaxe, zusammenfallend mit der optischen Axe, ist, welches daher eine abgeplattete Gestalt besitzt.

Beide Arten von Rotationsellipsoiden, die optischen Elasticitätsflächen der positiven und negativen Krystalle, haben gemeinsam die Eigenschaft, dass sie durch eine Ebene senkrecht zur optischen Axe, und nur durch diese, in Kreisen geschnitten werden; jede andere durch ihre Mitte gelegte Ebene schneidet sie in einer Ellipse, und da deren Radien proportional $\sqrt{e}$ des Aethers in der betreffenden Richtung sind, so giebt die Lage der beiden Hauptaxen einer solchen Ellipse die Orientirung der grössten und kleinsten Elasticität unter allen in der betreffenden Ebene liegenden Richtungen an. Die positiven und negativen Krystalle unterscheiden sich nur dadurch, dass bei den ersteren die grosse Axe der Schnittellipse senkrecht zur optischen Axe gerichtet ist, bei den negativen dagegen die kleine. Aus diesen Eigenschaften der optischen Elasticitätsfläche der einaxigen Krystalle folgt, dass man in noch einfacherer Weise, als aus der Wellenfläche, aus ihr die Fortpflanzungsverhältnisse einer beliebigen Wellenbewegung des Aethers in einem derartigen Medium ableiten kann. Denkt man sich durch die Wellenebene eines in beliebiger Richtung schwingenden Lichtstrahles, d. h. durch die zu seiner Fortpflanzungsrichtung senkrechte Ebene, die Elasticitätsfläche central durchschnitten, so sind die grösste und die kleinste Axe der als Durchschnittsfigur erhaltenen Ellipse die Schwingungsrichtungen der beiden durch die Doppelbrechung des Krystalls entstehenden Strahlen, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der letzteren verhalten sich, wie die Längen jener beiden Axen. Durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind aber auch die Brechungsverhältnisse der beiden Strahlen für alle Fälle gegeben. Da von den Hauptaxen der Schnittellipse immer eine senkrecht zur optischen Axe gerichtet ist, so muss stets ein Strahl normal zum Hauptschnitt schwingen, wie es in der That die Erfahrung lehrt. In dem speciellen Fall, dass die Wellenebene senkrecht zur optischen Axe, die Fortpflanzungsrichtung des Strahles also parallel derselben ist, finden seine Schwingungen, weil als Durchschnitt der Wellenebene mit der Elasticitätsfläche ein Kreis resultirt, nach allen Richtungen

in der Wellenebene gleichen Widerstand, dieselben pflanzen sich also unverändert und ohne Doppelbrechung in der Richtung der Axe fort, ihre Schwingungsrichtung möge sein, welche sie wolle.

§. 18. **Herstellung polarisirten Lichtes durch einaxige Krystalle; Interferenz desselben; Polarisationsapparat.** Geradlinig polarisirtes, also nur in einer Ebene schwingendes Licht kann man zwar auch durch Reflexion gewöhnlichen Lichtes an ebenen Flächen, namentlich durch vielfache Wiederholung einer derartigen Reflexion, erzeugen, indess wird auf diesem Wege das gewöhnliche Licht nur theilweise polarisirt, d. h. es wird in solches umgewandelt, dessen Schwingungen vorwiegend in einer bestimmten Ebene stattfinden, z. Th. in wechselnden Azimuthen. Das aus einem einaxigen Krystall austretende und darin doppelt gebrochene Licht ist indess vollständig linear polarisirtes; es sind also einaxige Krystalle dazu geeignet, Licht hervorzubringen, welches nur in einer einzigen Ebene seine Schwingungen ausführt. Um einen solchen Strahl zu erhalten und nicht die zu beobachtenden Erscheinungen durch das gleichzeitige Auftreten des zweiten, bei der Doppelbrechung entstehenden Strahles zu compliciren, werden verschiedene Mittel angewendet.

Gewisse Krystalle besitzen die Eigenschaft, den einen der beiden Strahlen so stark zu absorbiren, dass sie für diesen fast undurchsichtig sind. Derartig beschaffen sind z. B. die Krystalle des Turmalins, besonders die dunkelgrün gefärbten, welche die Schwingungen des im Hauptschnitt polarisirten (ordentlichen) Strahles sehr stark absorbiren, sehr viel weniger dagegen die in der Richtung der Axe schwingenden Strahlen. Durch eine Turmalinplatte, deren Flächen parallel der optischen Axe sind, gehen daher fast nur die letzteren Schwingungen, die des extraordinären Lichtes, hindurch. Dieses wird ohne bedeutende Absorption von einem zweiten Turmalin, der dem ersten parallel gehalten wird, hindurchgelassen. Dreht man aber die zweite Platte in ihrer Ebene, so wird immer mehr von dem aus dem ersten austretenden Licht absorbirt, am meisten bei einer Drehung von 90°, weil die extraordinären Schwingungen des ersten Turmalins im zweiten mit der Vibrationsrichtung des ordinären Strahles, welcher die stärkste Absorption erleidet, sich fortpflanzen. Durch zwei gekreuzte Turmaline geht also nur sehr wenig Licht hindurch, dieselben erscheinen, gegen eine Lichtquelle gehalten, dunkel. In noch weit höherem Grade als der Turmalin besitzen die Eigenschaft, die verschiedenen Schwingungen sehr ungleich zu absorbiren, nach Herapath's Entdeckung*) die Krystalle des schwefelsauren Jodchinin (daher auch »Herapathit« genannt), welche bereits bei äusserster Dünne der Platten in gekreuzter Stellung dunkel erscheinen.

Da aber alle solche Krystalle gefärbt sind, so ertheilen sie dem durchgelassenen polarisirten Lichte nicht nur eine Färbung, sondern sie absor-

*) Phil. Mag. (4), XVI, 55.

biren auch von demselben einen beträchtlichen Antheil. Zur Herstellung eines möglichst wenig geschwächten, ungefärbten, vollständig polarisirten Lichtstrahles dient das von Nicol erfundene und nach ihm benannte Nicol'sche Prisma*), welches folgendermassen hergestellt wird: Man spaltet aus wasserhellem Kalkspath ein Rhomboëder, aus vier grösseren und zwei kleineren Flächen bestehend, dessen Hauptschnitt die Form von *ABCD* Fig. 47 hat; dieses wird, nachdem die obere und untere Endfläche so abgeschliffen sind, dass sie 68° (statt 71°) mit den verticalen Kanten bilden, nach *BC*, senkrecht zum Hauptschnitt, durchsägt, die beiden Schnittflächen vollkommen eben gemacht und polirt, endlich beide Hälften in ihrer ursprünglichen Stellung mit Canadabalsam wieder aneinander gekittet. Trifft auf ein solches Prisma ein Lichtstrahl parallel seiner Längsrichtung (*s* in Fig. 47), so wird er in zwei verschieden gebrochene Strahlen zerlegt; der ausserordentliche *e* bewegt sich in einer Richtung im Kalkspath, in welcher sein Brechungsquotient = 1,536 ist; ungefähr denselben Werth besitzt derjenige des Canadabalsams für jede Art von Schwingungen (da dieser ein isotroper Körper ist), folglich wird der Strahl *e* fast ohne Ablenkung durch den Canadabalsam hindurchgehen. Dagegen wird der ordentliche Strahl *o* weit stärker abgelenkt, trifft also unter grösserem Incidenzwinkel auf die Grenze von Kalkspath und Canadabalsam; da sein Brechungsexponent im Kalkspath = 1,654, im Balsam = 1,536, so ist das erste Medium für ihn das optisch dichtere, aus welchem das Licht nur dann austreten kann, wenn der Einfallswinkel eine bestimmte Grenze nicht überschreitet (s. S. 24). In dem beschriebenen Falle ist diese Grenze überschritten, folglich findet Totalreflexion des Strahles *o* statt, durch welche derselbe auf die Seitenflächen des Prismas geworfen und durch eine schwarze Fassung desselben absorbirt wird. Durch den Nicol (das Nicol'sche Prisma) hindurch gelangt also nur der im Hauptschnitt schwingende, senkrecht dazu polarisirte extraordinäre Strahl hindurch, so dass also zwei solcher Prismen, in gekreuzter Stellung nacheinander in den Weg des Lichtes eingeschaltet, von demselben gar Nichts hindurchlassen. Treten in einen Nicol polarisirte Lichtstrahlen ein, aber von anderer Schwingungsebene als sein Hauptschnitt, so wird von denselben nur derjenige Antheil hindurchgelassen, welcher auf den Hauptschnitt als Schwingungsebene entfällt. Mit Hülfe dieses Instrumentes sind wir also im Stande, nicht nur gewöhnliches Licht von geradlinig polarisirtem zu unterscheiden,

Fig. 47.

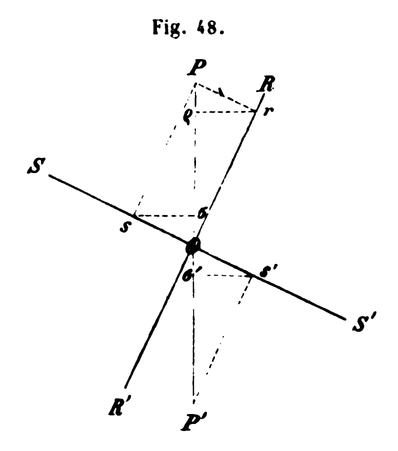
*) Die neueren Verbesserungen des Nicol'schen Prismas sollen in der III. Abtheilung beschrieben werden.

sondern auch die Schwingungsrichtung des letzteren zu bestimmen. Dieselbe ist nämlich senkrecht zum Hauptschnitt des Nicol'schen Prismas, wenn letzteres das Licht vollkommen auslöscht, parallel demselben, wenn es ganz hindurchgelassen wird. Von zwei gleichzeitig einen Nicol passirenden, linear polarisirten Strahlen mit verschiedener Schwingungsebene geht jedesmal nur die dem Hauptschnitt parallele Componente der Vibrationen hindurch, die um so geringer ausfällt, je grösser der Winkel der Schwingungsebene des eintretenden Strahles mit dem Hauptschnitt des Nicols ist. Diese Antheile der beiden Strahlen, welche das Nicol'sche Prisma durchlässt, schwingen in derselben Ebene, nämlich dem Hauptschnitt des Nicols, die Schwingungen der beiden eintretenden Lichtstrahlen sind dadurch auf dieselbe Polarisationsebene zurückgeführt; nach S. 53 sind sie also jetzt im Stande zu interferiren.

Die Erscheinungen der Interferenz der beiden polarisirten Strahlen, welche aus einem doppeltbrechenden Krystall austreten, dienen hauptsächlich zur Bestimmung der optischen Eigenschaften eines Krystalls. Die bisher betrachteten Erscheinungen, z. B. das Auftreten zweier getrennter Bilder beim Hindurchsehen, sind im Allgemeinen nicht geeignet, einen doppeltbrechenden Krystall von einem isotropen zu unterscheiden, da nur bei sehr grosser Differenz der Brechungsquotienten beider Strahlen und bei grosser Dicke des Krystalls, wie sie nur selten zur Verfügung steht, die beiden Bilder weit genug auseinander treten.

Ausser der oben erwähnten Bedingung für die Interferenz zweier polarisirter Strahlen, darin bestehend, dass sie durch einen Nicol auf eine Polarisationsebene zurückgeführt werden müssen, existirt für dieselbe noch eine zweite Bedingung, welche sich aus folgenden Betrachtungen ergiebt:

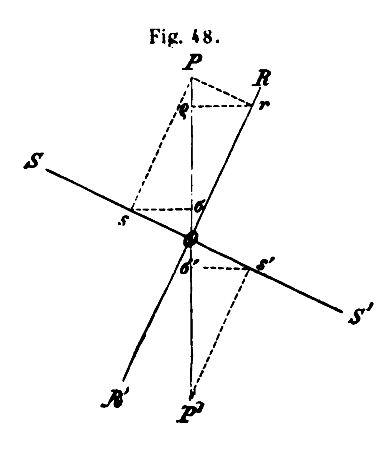
Fig. 48.



Sei PP' Fig. 48 die Schwingungsrichtung eines linear polarisirten Strahles, welcher in der senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehenden Richtung in einen doppeltbrechenden Krystall eintritt und daselbst in zwei Strahlen mit den Schwingungsrichtungen RR' und SS' zerlegt wird. Ist der Krystall genau von einer solchen Dicke, dass die beiden, sich ungleich schnell darin fortpflanzenden Strahlen bei ihrem Austritt aus demselben eine Phasendifferenz von einer ganzen oder einem Vielfachen einer Wellenlänge des angewandten einfarbigen (homogenen) Lichtes besitzen, so wird ein Aethertheilchen auf der Bahn des Lichtes, sobald das Letztere den Krystall verlassen hat, sich jedesmal vermöge der einen Vibrationsbewegung in demselben Augenblicke von O nach r hin bewegen, in welchem die

andere der beiden entstehenden Bewegungen es von O nach s hin treiben würde. Wenn nunmehr die beiden Strahlen durch einen Nicol, dessen Hauptschnitt parallel PP' ist, auf eine Polarisationsebene zurückgeführt werden, so geht von jeder Bewegung nur die Componente $O\varrho$ und $O\sigma$, parallel PP', hindurch. Diese beiden Bewegungen müssen, da sie gleichzeitig nach derselben Seite stattfinden, sich einfach zusammensetzen, also mit gleicher Phase interferiren, d. h. mit derselben Phasendifferenz, welche sie im Krystall erhalten hatten. Ist dagegen der Durchmesser des Krystalls so gross, dass die Phasendifferenz, mit der die beiden Strahlen aus demselben austreten, $\frac{1}{2}\lambda$ oder ein ungerades Vielfaches davon beträgt, so findet die Bewegung des Aethertheilchens O in dem Augenblicke, wo es vermöge der einen Bewegung nach r hin bewegt wird, vermöge der zweiten nach s' hin statt. Beide Bewegungen können dadurch zur Interferenz gebracht werden, dass sie durch einen Nicol auf gleiche Schwingungsebene reducirt werden. Steht dessen Hauptschnitt, wie vorher, parallel PP', so finden die interferirenden Bewegungen gleichzeitig nach entgegengesetzten Seiten statt, nämlich nach $O\varrho$ und $O\sigma'$, sie interferiren also mit entgegengesetzter Phase, d. h. ebenfalls mit derselben Phasendifferenz, mit welcher sie aus dem Krystall austraten. Hieraus ergiebt sich allgemein, dass zwei Strahlen, welche durch Doppelbrechung aus einem linear polarisirten entstehen, mit derselben Phasendifferenz, welche sie durch den doppeltbrechenden Krystall erhalten, interferiren, sobald sie auf eine Schwingungsebene zurückgeführt werden, welche derjenigen des ersten Strahles parallel ist.

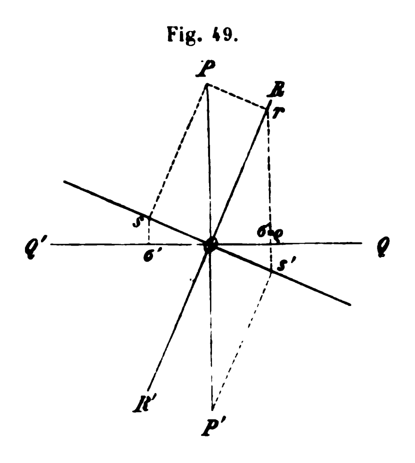
Fig. 48.



Betrachten wir jetzt den entgegengesetzten Fall, in welchem die Schwingungsebene des in den Krystall eintretenden Lichtstrahles senkrecht zum Hauptschnitt des Nicols steht, welcher die beiden Strahlen auf eine Schwingungsebene zurückführt. Ist wieder PP' Fig. 49 parallel der Schwingungsebene des eintretenden Lichtes, und ist der Krystall so dick, dass die beiden darin entstehenden Strahlen λ, oder ein Vielfaches von λ, Phasendifferenz beim Austritt haben, so wird der eine derselben das Aethertheilchen O nach r, der andere gleichzeitig nach s hin bewegen. Ist nun aber das Nicol'sche Prisma um 90^0 gegen seine frühere Stellung gedreht, ist seine Schwingungsebene (d. h. diejenige des von ihm durchgelassenen Lichtes) parallel QQ_1, so sind die beiden Componenten, welche zur Interferenz gelangen, $O\varrho$ und $O\sigma'$; diese liegen nach entgegengesetzten Seiten, also findet die Interferenz mit entgegengesetzter Phase statt, wäh-

rend die beiden Strahlen mit gleicher Phase aus dem Krystall ausgetreten waren. Ist dagegen der Durchmesser des Krystalls so gross, dass die beiden Strahlen beim Austritt entgegengesetzte Phase besitzen, so sind ihre gleichzeitigen Bewegungsgrössen (s. Fig. 49) Or und Os'; werden diese auf die eine Schwingungsrichtung QQ_1 zurückgeführt, so sind ihre mit einander interferirenden gleich grossen Componenten, $O\varrho$ und $O\sigma$, nach derselben Seite gelegen, also findet die Interferenz mit gleicher Phase statt. Allgemein: Zwei Strahlen, welche durch Doppelbrechung aus einem linear polarisirten Strahle entstehen, interferiren mit entgegengesetzter Phase, als diejenige ist, mit welcher sie aus dem doppeltbrechenden Krystall austreten, wenn die Schwingungsebene, auf welche sie reducirt werden, senkrecht zur ursprünglichen Schwingungsebene steht.

Fig. 49.

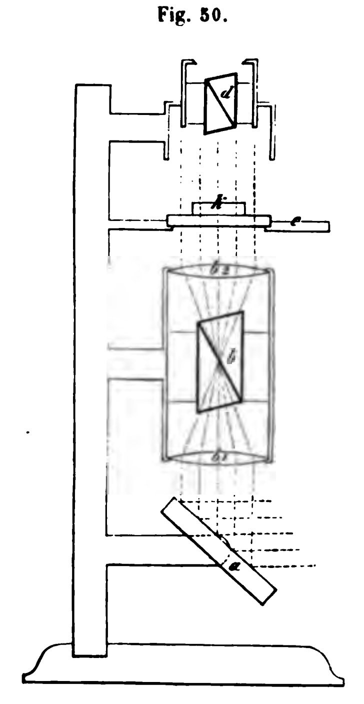


Denken wir uns jetzt statt eines linear polarisirten Lichtstrahles einen gewöhnlichen in den Krystall eintretend, so findet in dem Momente, in welchem die Schwingungsebene desselben parallel derjenigen des zurückführenden Nicols ist, die Interferenz mit derselben Phasendifferenz statt, mit welcher die beiden Strahlen aus dem Krystall austreten, — nach einem ausserordentlich kleinen Zeitraum, während dessen sich die Schwingungsebene des gewöhnlichen Lichtes um 90° gedreht hat, mit der jener entgegengesetzten Phasendifferenz (derselben + oder — $\frac{1}{2}\lambda$), also müssen sich auf der Bahn des Lichtes die durch Interferenz entstehenden Maxima und Minima der Lichtintensität ebenso rasch folgen, als sich die Polarisationsebene des gewöhnlichen Lichtes jedesmal um einen rechten Winkel gedreht hat. Wir werden also von diesem Wechsel der Intensität ebenso wenig etwas wahrnehmen, als von demjenigen der beiden im Kalkspath entstehenden Strahlen (s. S. 45). Es können demnach auf diese Weise Interferenzerscheinungen nicht beobachtet werden, da an einer bestimmten Stelle wohl momentan durch Interferenz Dunkelheit erzeugt wird, in unmessbar kleiner Zeit darauf jedoch um so grössere Helligkeit, so dass im Ganzen der Eindruck eines Strahles von constanter mittlerer Helligkeit resultirt.

Hierdurch sind nunmehr die Bedingungen der Interferenz linear polarisirten Lichtes vollständig erkannt; sie lauten: Zwei linear polarisirte Strahlen interferiren nur dann, wenn sie aus einem einzigen linear polarisirten Lichtstrahle durch Doppelbrechung entstanden sind und durch ein Nicol'sches Prisma auf die gleiche Polarisationsebene zurückgeführt werden.

Will man also die Interferenzerscheinungen des in einem Krystall doppelt gebrochenen Lichtes untersuchen (analysiren), so muss man das in denselben eintretende Licht vorher durch einen Nicol polarisiren, muss ihn also zwischen zwei Nicols, von denen der erste der **Polarisator**, derjenige zwischen Auge und Krystall der **Analysator** heisst, betrachten. Ein Apparat, welcher dazu dient, einen Krystall zwischen zwei polarisirenden Vorrichtungen zu untersuchen, heisst **Polarisationsapparat**, und besteht aus einem Spiegel *a* Fig. 50 (vertikaler Durchschnitt), der so geneigt wird, dass er das von einer hellen Stelle des Himmels herkommende Licht vertical nach oben reflectirt, einem polarisirenden Nicol *b*, welcher vortheilhaft in einem Rohr zwischen zwei Glaslinsen b_1 und b_2 so angebracht wird, dass der gemeinschaftliche Brennpunkt dieser in seine Mitte fällt, so dass die auf die erste Linse parallel auffallenden Strahlen, nachdem sie, in einen Doppelkegel zusammengeschnürt, **sämmtlich** durch den Nicol gegangen sind, auch parallel aus der zweiten Linse austreten; ferner besteht das Instrument aus dem Krystallträger *c* mit horizontaler drehbarer Glasplatte, auf welche der zu untersuchende Krystall *k* gelegt wird, endlich aus dem analysirenden Nicol *d*, welcher die doppeltgebrochenen Schwingungen wieder auf eine Polarisationsebene zurückführt. Beide Nicols sind, wie der Krystallträger, um die verticale Axe des Apparates drehbar. Der Polarisator kann auch dadurch ersetzt werden, dass an Stelle des reflectirenden Spiegels ein solcher aus zahlreichen, aufeinander geschichteten Platten dünnen Glases ohne Belegung gesetzt wird, welcher nach S. 63 dem reflectirten Lichte eine, wenn auch nicht ganz vollständige Polarisation verleiht*).

Fig. 50.



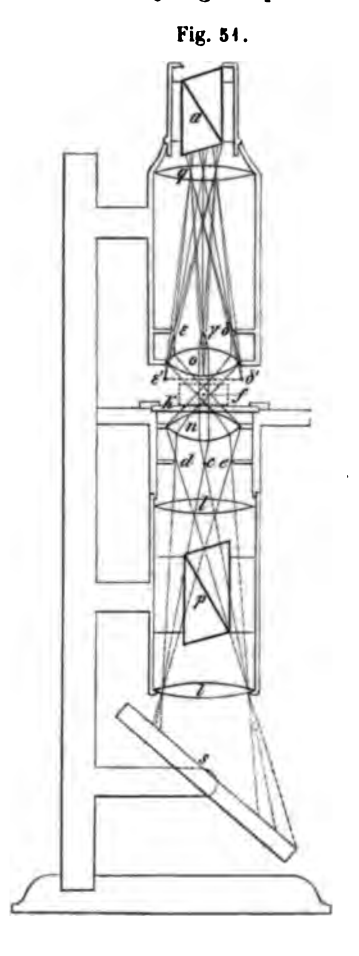
Da man bei der Benutzung eines solchen Apparates den auf dem Träger *c* befindlichen Krystall in deutlicher Sehweite erblickt, während er von unten her durch parallele polarisirte Strahlen erleuchtet erscheint, so nennt man diese Beobachtungsmethode »**Untersuchung im parallelen polarisirten Lichte**«. Wird der Krystall mit blossem Auge nicht mehr erkannt, so schaltet man zu diesem Zwecke zwischen denselben und das Auge ein Mikroskop ein und besitzt dann in dem Instrument ein **Mikroskop**

*) Ein solcher Glassatz als Polarisator wird deshalb häufig angewendet, weil er weit billiger herzustellen ist, als ein grosses Nicol'sches Prisma, wie ein solches für die Lichtstärke des Instrumentes wünschenswerth ist.

mit Polarisation (nicht ein »Polarisationsmikroskop«, welcher Name in anderem Sinne gebraucht wird). Die neueren Mikroskope, besonders wenn sie zu mikromineralogischen Untersuchungen dienen sollen, werden meist zur Polarisation eingerichtet, indem unter den in seiner Ebene drehbaren Objectträger ein Nicol eingeschoben und über dem Ocular ein gleicher aufgesetzt wird*).

Sowohl mit dem oben beschriebenen Polarisationsinstrument zur Beobachtung in parallelem Licht als mit dem Mikroskop, welches für Polarisation eingerichtet ist, kann man im Allgemeinen nur diejenigen optischen Erscheinungen, welche der Krystall in einer Richtung zeigt, untersuchen. Sehr häufig beabsichtigt man aber, die Veränderungen, welche das polarisirte Licht bei seinem Durchgange durch einen Krystall in möglichst verschiedenen Richtungen erleidet, gleichzeitig zu beobachten. Dazu dient das Polarisationsinstrument zur Beobachtung im convergenten Lichte, auch Polarisationsmikroskop genannt. Dasselbe, in Fig. 51 in verticalem Durchschnitt durch die Mitte dargestellt, besteht aus einem Spiegel *s* und dem Polarisator *p*, welcher von zwei Linsen *l*, *l* eingeschlossen ist, genau so, wie bei dem Polarisationsinstrument mit parallelem Licht. Hinter der oberen Linse *l* befindet sich ein geschwärzter Metallschirm (Diaphragma) mit kreisrunder Oeffnung vom Durchmesser *de*. Diese Oeffnung wird vom hellen Himmel her, durch Vermittelung des Spiegels *s*, des Nicols *p* und der Linsen *l*, beleuchtet, und zwar jeder Punkt derselben durch einen Strahlenkegel, dessen Spitze der besagte Punkt selbst und dessen Basis die untere Linse *l* ist. In der Figur sind diese Strahlenkegel für die beiden Randpunkte *de* und für den Mittelpunkt *c* des Diaphragmas angegeben, aber unterhalb der obersten Linse *l* nur punktirt fortgeführt, weil der wahre Gang der Lichtstrahlen zwischen *l*, *l* und *s* wegen der Brechung in den Linsen ein anderer und zwar derart ist, dass alle vom Spiegel auf die untere Linse parallel auffallenden Strahlen nach ihrem Austritt aus dem oberen *l* wieder einander parallel,

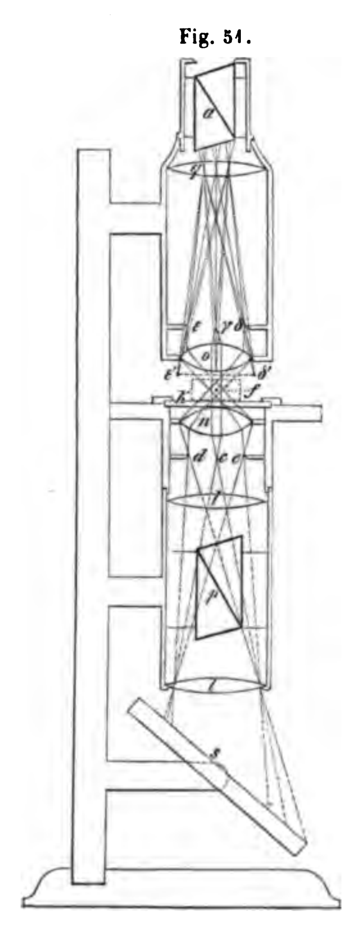
Fig. 51.



*) Das Nähere über die Construction solcher Mikroskope siehe in der III. Abtheilung.

natürlich aber alsdann Bestandtheile verschiedener auf *c*, *d*, *e* u. s. f. auffallender Lichtkegel werden. Die von unten her durch linear polarisirtes Licht erleuchtete helle Oeffnung *de* ist es nun, nach welcher wir durch das Instrument hinblicken. Wir können daher jeden Punkt derselben, z. B. *d*, als einen solchen, von welchem divergirende Lichtstrahlen ausgehen, betrachten; jedoch gehen dieselben nicht, wie von einem selbstleuchtenden Punkte, nach allen Seiten aus, sondern nur nach denjenigen, welche innerhalb der Divergenz des Kegels liegen, dessen Spitze *d* und dessen Basis die untere Linse *l* ist. Die von *d* ausgehenden Strahlen sind die geradlinigen Fortsetzungen derjenigen des betreffenden Kegels. Verfolgen wir deren Weg nach aufwärts, so sehen wir sie divergirend auf eine Linse *n* von starker Krümmung auftreffen; diese steht von dem Diaphragma *de* genau im Abstand der Brennweite, so dass also alle von einem Punkte der Brennebene *de* divergirende Strahlen durch *n* in parallele verwandelt werden. Oberhalb *n* befindet sich eine Linse *o* von derselben Grösse und Krümmung, welche an der Unterseite eines in der Höhe verstellbaren Rohres befestigt ist, in welchem sich ausserdem das Ocular *q* befindet; dieses Rohr wird so weit gesenkt, dass der Brennpunkt von *o* und der von *n*, welche gleiche Focallänge besitzen, in *f* zusammenfallen. Der von *d* ausgehende Strahlenkegel wird auf der linken Seite von *n* gebrochen und dabei in einen Strahlencylinder verwandelt; dieser geht durch die rechte Seite von *o* und wird, da die Strahlen parallel sind, in der Brennebene von *o*, und zwar an dem *d* entsprechenden Punkte δ derselben, wieder vereinigt. In der Figur ist die gleiche Construction ausgeführt für die Strahlen, welche von dem Mittelpunkte *c* der hellen Oeffnung *de* ausgehen und sich in γ vereinigen müssen, endlich für diejenigen, welche, von *e* kommend, in ε convergiren. Da dasselbe für alle Punkte der erleuchteten Oeffnung *de* gilt, so muss in der Ebene $\delta\varepsilon$ ein reelles Bild von jener Oeffnung entstehen. Dieses betrachten wir nun mit einer sehr schwach vergrössernden Lupe, nämlich mit dem Ocular *q*, durch welches wir ein virtuelles Bild, etwa in der Ebene $\delta'\,\varepsilon'$, erblicken. Die Strahlen, welche von diesem Bilde zu kommen scheinen, gehen, ehe sie ins Auge gelangen, durch den analysirenden Nicol *a*. Legen wir nun auf den Krystallträger *k* eine plan-

Fig. 51.



parallele Platte eines krystallisirten Mediums so auf, dass sich *f* innerhalb desselben befindet (in der Figur ist eine solche punktirt angedeutet), so gehen durch dieselbe Strahlensysteme von sehr verschiedener Richtung; alle Strahlen gleicher Richtung, welche im Krystall ja die gleiche Veränderung erfahren müssen, vereinigen sich in einem einzigen Punkte des Bildes $\delta' \varepsilon'$; alle von abweichender Richtung an verschiedenen Punkten. In dem Bilde $\delta' \varepsilon'$ vermögen wir also mit einem Blicke alle Veränderungen zu übersehen, welche Strahlen von sehr mannigfaltigen Richtungen — nämlich von allen, welche innerhalb des von *f* auf den Umfang der Linse *n* gefällten Kegels liegen — in dem zu untersuchenden Krystall erleiden. Je kürzer die Brennweite von *n* und *o*, einen desto grösseren Oeffnungswinkel besitzt dieser Kegel, desto grösser ist das Gesichtsfeld des Instrumentes. Da es häufig der Vereinigung von Strahlen innerhalb des Gesichtsfeldes bedarf, welche unter sehr divergirenden Richtungen durch den Krystall gegangen sind, so hat zuerst Nörremberg jede der beiden Linsen *n* und *o* durch ein System mehrerer planconvexer, einander fast berührender Gläser ersetzt, welche zusammen wie eine Linse von sehr kurzer Brennweite wirken. In dieser, jetzt allgemein gebräuchlichen Form construirt, heisst der Apparat deswegen häufig »das Nörremberg'sche Polarisationsinstrument«. Eine weitere Verbesserung, welche eine erhebliche Vergrösserung des Gesichtsfeldes bewirkt, hat dieser Apparat erfahren durch die in der III. Abtheil. beschriebene Construction des Adams'schen oder Schneider'schen Polarisationsinstrumentes.

§. 19. **Interferenzerscheinungen einaxiger Krystallplatten im parallelen Lichte.** *a*) Platten senkrecht zur optischen Axe: Bringen wir eine, von zwei parallelen, zur optischen Axe senkrechten, natürlichen oder künstlichen ebenen Flächen begrenzte Krystallplatte horizontal auf den Krystallträger des Polarisationsinstrumentes mit parallelem Licht, so gehen durch dieselbe nur Lichtstrahlen in verticaler Richtung, also parallel ihrer optischen Axe, hindurch. Dies ist aber die Richtung ohne Doppelbrechung, in welcher ein einaxiger Krystall sich verhält wie ein einfach brechender Körper. Die Platte ändert demnach an der Polarisation des durchgehenden Strahles nicht das Geringste; sie erscheint ebenso dunkel, wie das übrige Gesichtsfeld, wenn die Hauptschnitte der beiden Nicols des Instrumentes unter einem rechten Winkel gekreuzt sind, ebenso hell bei paralleler Stellung der Nicols.

b) Platten parallel der optischen Axe oder schräg dagegen geneigt.

Eine derartige Platte, welche so dünn ist, dass die beiden senkrecht zu einander polarisirten Strahlen, welche darin entstehen, genau eine halbe Wellenlänge von dem Licht einer bestimmten Farbe Phasendifferenz beim Austritt besitzen, erscheint, wenn dieselbe mit Licht von der in Rede

stehenden Farbe beleuchtet wird, hell oder dunkel je nach ihrer Lage zu den Nicols und deren relativer Stellung. Seien die letzteren parallel, in Fig. 52 durch N_1 u. N_2 neben einander (statt der eine vor dem andern) mit der Richtung ihrer Schwingungsebene angedeutet, dazwischen die Platte, deren Hauptschnitt parallel HH_1 und senkrecht zur Zeichnungsebene sein möge, so wird jeder in die Platte eintretende Strahl in einen parallel HH_1 und einen senkrecht dazu schwingenden zerlegt. Steht der Hauptschnitt der Platte, wie in Fig. 52, parallel denen beider Nicols, so geht der aus N_1 austretende Strahl vollständig als extraordinärer durch den Krystall, ebenso durch N_2, also erscheint die Platte hell. Wird dieselbe indess in ihrer eignen Ebene gedreht, so dass ihr Hauptschnitt einen Winkel nach rechts oder links mit dem Hauptschnitt der Nicols bildet, so entstehen nunmehr zwei Strahlen im Krystall, welche beim Austritt entgegengesetzte Phase haben, also, durch N_2 auf eine Polarisationsebene zurückgeführt, auch mit entgegengesetzter Phase interferiren. Ist die mit der Krystallplatte vorgenommene Drehung geringer als 45°, so ist der extraordinäre Strahl von beiden der intensivere, die Componenten beider nach dem Hauptschnitt von N_2 also nicht gleich gross, es kann demnach keine vollständige Vernichtung bei der Interferenz eintreten, die Platte erscheint nur weniger hell. Bei einer Drehung von 45° dagegen sind jene beiden Componenten genau gleich gross, also müssen sie, mit $\frac{1}{2}\lambda$ Phasendifferenz interferirend, einander vollständig auslöschen; die Platte erscheint, mit der betreffenden Farbe beleuchtet, dunkel. Bei weiterer Drehung erscheint sie wieder heller, am hellsten bei 90°, ebenso bei 180° und 270° Drehung, während sie bei 135°, 225° und 315° dunkel wird. Seien die beiden Nicols N_1 und N_2 in gekreuzter Stellung (Fig. 53) und die Platte von derselben Dicke, wie oben

Fig. 52.

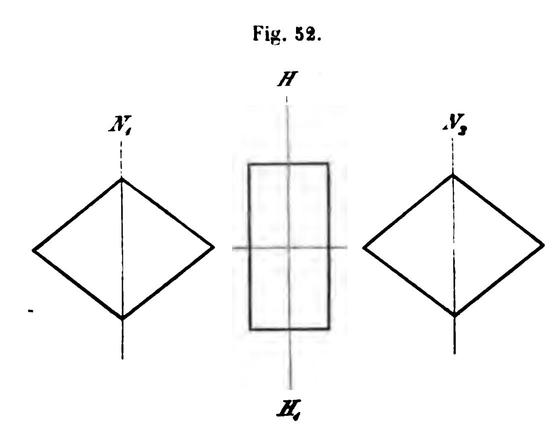
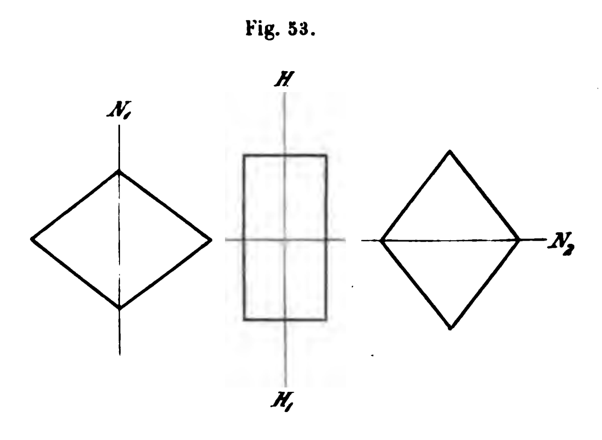


Fig. 53.



angegeben, mit ihrem Hauptschnitt HH_1 parallel demjenigen von N_1, so geht das aus letzterem austretende Licht ungeändert als extraordinärer Strahl hindurch, wird aber durch den zweiten Nicol, dessen Schwingungsrichtung zu der seinigen genau senkrecht steht, vollständig ausgelöscht; die Platte erscheint in dieser Stellung dunkel. Drehen wir dieselbe, wie vorhin, um einen kleinen Winkel, so entstehen zwei Strahlen in derselben, von denen indess der ordinäre nur eine kleine Amplitude besitzen kann, diese liefern jeder im zweiten Nicol zwei Componenten, von denen nur die eine durchgelassen wird, von dem ordinären eine relativ grosse, von dem extraordinären aber nur eine kleine; beide interferiren mit gleicher Phase, da die entgegengesetzte, mit der sie aus dem Krystall austreten, durch die gekreuzte Stellung der Nicols wieder aufgehoben wird. Sie setzen sich also zusammen, da sie aber beide von geringer Intensität sind, so erscheint die Platte nur wenig erhellt. Die beiden sich addirenden Componenten wachsen aber mit der Drehung; bei 45° haben sie ihren grössten Werth, die Platte erscheint am hellsten, bei 90° wieder dunkel u. s. f. jedesmal dunkel, wenn ihr Hauptschnitt parallel demjenigen eines der beiden gekreuzten Nicols ist.

Wird eine derartige Platte, statt in Licht von derjenigen Farbe, dessen Wellenlänge doppelt so gross ist als die Phasendifferenz der beiden sie durchsetzenden Strahlen, in weissem Licht beobachtet, während die Nicols des Instrumentes gekreuzt sind, so wird sie, wie im homogenen Licht, dunkel in den vier Stellungen, in denen ihr Hauptschnitt parallel der Schwingungsebene eines der Nicols ist. In den Zwischenstellungen wird jene Farbe im Maximum ihrer Intensität sein, deren halbe Wellenlänge der Phasendifferenz der beiden Strahlen gleich ist, die anderen Farben werden, da für sie die Interferenz nicht mit gleicher Phase eintritt, mehr oder weniger geschwächt erscheinen. Die Gesammtwirkung kann also nicht Weiss sein, sondern eine Mischfarbe, welche durch das Vorwalten jener Farbe und Schwächung der übrigen entsteht. Die Platte wird also beim Drehen um 360° vier mal dunkel und in den Zwischenstellungen mit einer Mischfarbe gefärbt, welche ihr Maximum an Helligkeit erreicht, wenn der Hauptschnitt des Krystalls 45° mit denen der Nicols bildet.

Ist die Krystallplatte so dick, dass sie für eine bestimmte Farbe den beiden Strahlen eine ganze Wellenlänge Phasendifferenz verleiht, so wird diese Farbe bei gekreuzten Nicols, wo also die Interferenz mit entgegengesetzter Phase stattfindet, theilweise und bei 45° vollständig ausgelöscht; die Platte zeigt demnach vier mal Dunkel und dazwischen eine Mischfarbe (aus Weiss entstehend durch Wegnahme obiger Farbe), welche am reinsten erscheint, wenn der Hauptschnitt des Krystalls 45° mit denen der Nicols bildet. Ist die Dicke der Krystallplatte eine andere, so wird eine von jener verschiedene Farbe in den Zwischenstellungen ausgelöscht, es erscheint demzufolge eine andere Mischfarbe. Da die Grösse der Lichtwellen eine sehr geringe, so bedarf es nur einer sehr kleinen Differenz der Dicke, um eine andere Farbe hervorzubringen; wenn die Platte also nicht ganz genau

gleichen Durchmesser an allen Stellen besitzt, zeigt sie nicht überall die gleiche Interferenzfarbe. Das Erscheinen derselben Farbe auf der ganzen Platte ist also ein sehr genaues Mittel zur Controle über die Gleichheit ihrer Dicke an allen Stellen.

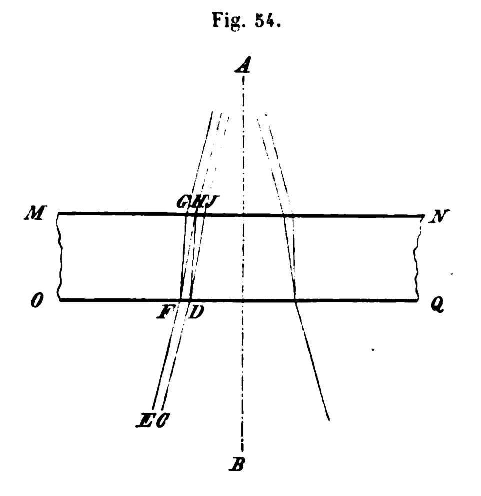
Bei einer gewissen grösseren Dicke werden mehrere Farben in den Zwischenstellungen ausgelöscht, z. B. die eine, weil sie mit $\frac{7}{2}\lambda$, die andere, weil sie mit $\frac{9}{2}\lambda$ Phasendifferenz interferirt; die Mischfarben, welche entstehen, unterscheiden sich immer weniger von Weiss, je mehr Farben durch die Interferenz vernichtet werden, d. h. je dicker die Platte. Ueber eine gewisse Dicke hinaus werden so viele Lichtarten des Spectrums ausgelöscht, dass die übrigen zusammen wieder den Eindruck des Weiss auf das Auge machen, so entsteht das Weiss der höheren Ordnung; die Platte wird alsdann beim Drehen vier mal einfach hell und dunkel. Die Dicke, bei welcher im weissen Lichte diese Erscheinung eintritt, hängt selbstverständlich von der Stärke der Doppelbrechung im Krystall ab.

Bei parallelen Nicols wird jedesmal diejenige Farbe oder (bei grösserer Dicke der Platte) werden diejenigen Farben verlöscht, welche bei gekreuzten Nicols im Maximum sind, es erscheint also jedesmal die gleichsam entgegengesetzte Mischfarbe, welche mit der bei gekreuzten Nicols sichtbaren vereinigt reines Weiss liefern würde. Solche entgegengesetzte Mischfarben nennt man complementäre. Eine dünne Krystallplatte, einmal bei parallelen, das andere Mal bei gekreuzten Nicols betrachtet, zeigt sich also complementär gefärbt, falls sie nicht diejenige Dicke erreicht, bei welcher das Weiss der höheren Ordnung entsteht.

Das beschriebene Verhalten der einaxigen Krystalle kann nun dazu dienen, solche auch in mikroskopischen Präparaten zu erkennen. Bestehe ein solches Präparat z. B. aus einer ausserordentlich dünn geschliffenen Platte eines Gesteines, welches in einer Grundmasse ausgeschiedene Krystalle enthält, von denen geprüft werden soll, ob sie optisch einaxige sind. Diese sind durch die Fläche des Schliffes in verschiedenen Richtungen getroffen worden, so dass man im Gesichtsfelde des Mikroskops nebeneinander dünne Platten, in den mannigfaltigsten Richtungen aus den Krystallen geschnitten, vor sich hat. Bringt man jetzt einen Polarisator und, damit gekreuzt, einen Analysator an dem Mikroskop an, dreht den Schliff in seiner eigenen Ebene um 360° und beobachtet, dass einige Durchschnitte bei jeder Stellung dunkel bleiben, während die Mehrzahl viermal zwischen hell und dunkel (farbig und dunkel bei sehr geringer Dicke) wechselt, so hat man die Krystalle als optisch einaxig zu betrachten, falls alle anderen Kennzeichen für die Identität der dunkel bleibenden und der hell werdenden Krystalle sprechen. Die dunkel bleibenden Querschnitte sind alsdann diejenigen, deren Schnittebene nahezu senkrecht zur optischen Axe steht. Wenn alle Querschnitte beim Drehen dunkel bleiben, sind die untersuchten Krystalle natürlich einfach brechend.

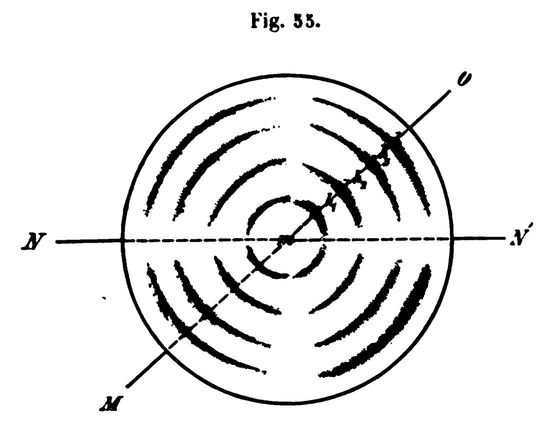
§. 20. Interferenzerscheinungen einaxiger Krystallplatten im convergenten Lichte. *a*) Platten senkrecht zur optischen Axe. Im convergenten Lichte werden wir die Erscheinungen, welche eine einaxige Krystallplatte, senkrecht zur Axe geschnitten, zeigt, beobachten, wenn wir dieselbe auf den Krystallträger des Polarisationsinstrumentes Fig. 51 so auflegen, dass die optische Axe parallel der vertikalen Axe des ganzen Apparates ist, und dass der Punkt *f* sich innerhalb des Krystalls befindet. Dann durchsetzen den letzteren unendlich viele Bündel, deren jedes aus unter einander parallelen Strahlen besteht, in allen möglichen Richtungen, welche innerhalb des Kegels, zwischen *f* und der sogenannten Sammellinse *n*, liegen. Einer dieser Strahlencylinder, nämlich derjenige, welcher vom Punkte *c* ausgeht und daher im Bilde genau in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint, geht parallel der optischen Axe des Krystalls durch denselben hindurch. Um die Veränderungen, welche alle diese verschieden gerichteten Strahlenbündel in der Platte erfahren, abzuleiten, betrachten wir zunächst diejenigen Strahlen, welche in einer verticalen, durch die optische Axe des Krystalls gehenden Ebene liegen. Eine solche nannten wir einen Hauptschnitt des einaxigen Krystalls, und dieser soll in Fig. 54 durch *MNOQ* dargestellt sein. Setzen wir nun noch den Fall, dass die beiden Nicol'schen Prismen des Instrumentes parallel seien, dass ihre Polarisationsebenen mit dem Hauptschnitt *MNOQ* Winkel von 45° bilden, und dass einfarbiges Licht durch den Apparat hindurchgehe. Die der optischen Axe des Krystalls, der Richtung *AB* parallelen Lichtstrahlen werden nicht doppelt gebrochen, sondern gehen unverändert durch den Krystall; die Mitte des Bildes erscheint also hell, genau so, wie das ganze Gesichtsfeld bei parallelen Nicols erscheinen würde, wenn keine Krystallplatte vorhanden wäre. Betrachten wir aber nun einen der Strahlencylinder, welche eine geringe Neigung gegen die Axe besitzen, so wird es unter diesen einen geben, z. B. denjenigen, zu welchem der Strahl *CD* gehört, für welchen das Folgende gilt: Derselbe wird im Krystall zerlegt in zwei Strahlen *DH* und *DJ* von verschiedener Geschwindigkeit, deren einer im Hauptschnitt *MNOQ*, der andere senkrecht dazu schwingt; ein anderer Strahl desselben Cylinders, also parallel dem vorigen, *EF*, zerfällt ebenso in einen ordinären und einen extraordinären, *FG* und *FH*. Von *H* aus gehen also zwei Strahlen in derselben Bahn weiter, aus derselben Lichtquelle, welche linear polarisirtes Licht aussandte, nämlich aus dem betref-

Fig. 54.



fenden Punkte der hellen Oeffnung *de* in Fig. 51 herstammend, aber senkrecht zu einander polarisirt; von diesen Schwingungen wird vom oberen Nicol nur je die auf dessen Schwingungsebene entfallende Componente hindurchgelassen, und zwar ist diese von beiden gleich gross, da ihre Richtungen mit jener Ebene nach beiden Seiten Winkel von 45° einschliessen; die beiden Strahlen, nunmehr auf eine Schwingungsrichtung zurückgeführt, interferiren also (weil diese Schwingungsrichtung auch die des eintretenden polarisirten Lichtes war) mit derjenigen Phasendifferenz, welche sie im Krystall erhalten haben, d. h. um wie viel wegen der verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordinären und des extraordinären Strahles der eine gegen den andern zurückgeblieben ist; diese Phasendifferenz sei für die Lichtstrahlen *DH* und *FH* gerade gleich einer halben Wellenlänge derjenigen Farbe, mit welcher das Instrument beleuchtet ist, so werden sich diese Strahlen durch die Interferenz vollkommen vernichten. Da unter den parallelen Strahlen, welche den Krystall in derselben Richtung durchsetzen, zu jedem einzelnen ein zweiter zu finden ist, welcher zu ihm in dem Verhältnis steht, dass der ordinäre des einen mit dem extraordinären des andern in derselben Weise interferirt, so wird an dem Punkte des im Polarisationsinstrument sichtbaren Bildes, in welchem sich alle diese Strahlen vereinigen und der etwas von der Mitte des Bildes entfernt ist, kein Licht erscheinen können, dieser Punkt des Gesichtsfeldes wird dunkel. Stelle Figur 55 das im Polarisationsapparate gesehene Bild dar, sei *NN'* die Schwingungsrichtung der beiden parallel gestellten Nicols, *MO* die Richtung des Hauptschnittes *MNOQ* der vorigen Figur, so ist *m* die helle Mitte des Bildes, d_1 die dunkle Stelle, an welcher sich die zuletzt besprochenen Strahlen vereinigen. Die Stellen zwischen *m* und d_1 entsprechen den Vereinigungspunkten von Strahlencylindern, welche eine geringere Neigung gegen die optische Axe besitzen, so dass die im Krystall erhaltene Phasendifferenz weniger als $\frac{1}{2}\lambda$ ist; solche Strahlen werden sich bei der Interferenz zusammensetzen zu einer Wellenbewegung von anderer Phase, deren Intensität kleiner sein muss, als die Summe der Intensitäten der einzelnen Strahlen (s. S. 15), und zwar um so kleiner, je näher wir d_1 kommen, d. h. je weniger sich die Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\lambda$ unterscheidet. Die Helligkeit muss also von der Mitte aus nach d_1, wo sie gleich 0 ist, allmählich abnehmen. Strahlen in dem

Fig. 55.



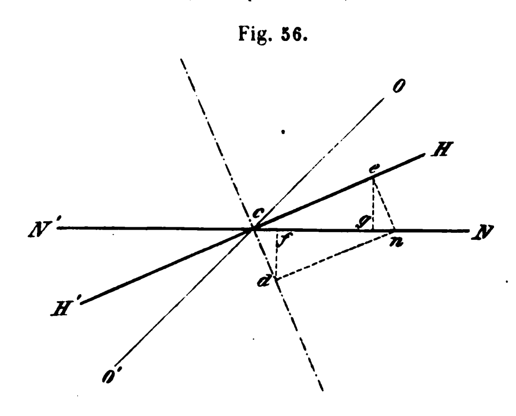
Hauptschnitt *MO*, welche einen grösseren Winkel mit der optischen Axe des Krystalls, als die in d_1 sich vereinigenden, bilden, zerfallen durch die Doppelbrechung in zwei Strahlen, deren Geschwindigkeitsdifferenz eine grössere als bei jenen ist, da der ausserordentliche Strahl nach S. 55 eine um so mehr von derjenigen des ordentlichen abweichende Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt, je mehr er gegen die Axe geneigt ist. Es werden sich also in einem Punkte h_1, auf der Geraden *MO* weiter von der Mitte entfernt, alle Strahlen vereinigen, deren Richtung im Krystall so lag, dass der aus jedem entstehende ordinäre und extraordinäre eine Phasendifferenz von λ erfuhren. Diese beiden Schwingungen zweier verschiedener Strahlen, und ebenso aller andern paarweise, werden sich also zusammensetzen zu einer Wellenbewegung, deren Intensität gleich der Summe der Intensitäten der Einzelbewegungen ist. Der Punkt h_1 wird also dieselbe Helligkeit besitzen, wie die Mitte *m*, und zwar wird die Helligkeit von d_1 nach h_1 allmählich zunehmen, jenseits desselben aber wieder sich vermindern, da der Punkt d_2 der Vereinigung derjenigen Strahlen entspricht, welche so geneigt durch den Krystall hindurchgingen, dass die Phasendifferenz der beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen $= \frac{3}{2}\lambda$ ist, also ebenfalls eine vollständige Vernichtung des Lichtes bei der Interferenz stattfindet. Dasselbe ist der Fall bei d_3, wo die Phasendifferenz $= \frac{5}{2}\lambda$ ist u. s. f. Wenn wir also, von der Mitte *m* des Bildes ausgehend, die Intensität des Lichtes auf der Geraden *MO* betrachten, so beobachten wir einen fortwährenden Wechsel von Hell und Dunkel, wobei die Entfernung der Licht-Minima und -Maxima mit der Entfernung von der Mitte immer kleiner wird, weil bei grösserer Schiefe gegen die optische Axe nicht nur die Geschwindigkeitsdifferenz der beiden interferirenden Strahlen, sondern auch die Länge des Weges wächst, welchen sie im Krystall zurückzulegen haben, so dass derselben Differenz in der Neigung eine grössere Verschiedenheit in der Verzögerung des einen Strahles bei denjenigen entspricht, welche einen grösseren Winkel, als bei solchen Strahlen, welche einen kleineren Winkel mit der optischen Axe bilden.

Da die optisch einaxigen Krystalle sich gegen alle Lichtstrahlen vollkommen gleich verhalten, welche denselben Winkel mit der optischen Axe einschliessen, so müssten dieselben Maxima und Minima des Lichtes nach allen Seiten in demselben Abstand von der Mitte des Bildes aus vorhanden sein, denn was für den Hauptschnitt *MO* Fig. 55 gilt, muss ganz ebenso für jeden andern Hauptschnitt, welcher mit *NN'* einen beliebigen andern Winkel bildet, gelten. Es müssten demnach genau kreisförmige helle und dunkle Ringe die Mitte des Gesichtsfeldes umgeben. Die dunklen Ringe können indess nicht auf allen Seiten gleiche Intensität besitzen, wie aus der folgenden Betrachtung hervorgeht:

Die beiden Strahlen, welche an der Stelle d_1 (Fig. 55) des ersten dunklen Ringes zur Interferenz gelangten, mussten, wie wir sahen, einander vollständig vernichten, da sie im Krystall in zwei gleich helle Strahlen zer-

legt wurden, deren Componenten bei der Zerlegung durch den obern Nicol wieder gleich gross waren, weil ihre Schwingungsrichtungen mit NN' denselben Winkel, nämlich 45°, bildeten. Betrachten wir dagegen einen Punkt desselben ersten dunklen Ringes, welcher näher an NN' liegt, so entspricht er Lichtstrahlen eines Hauptschnittes, welcher mit NN' einen kleineren Winkel einschliesst. Sei cn Fig. 56 die halbe Amplitude des durch den Polarisator in den Krystall gesandten Lichtes mit der Schwingungsrichtung NN', sei ferner HH' die Richtung jenes Hauptschnittes (gesehen von oben parallel zur Axe, wie bei Fig. 55), so wird diese Schwingung nach dem Parallelogramm der Kräfte in zwei, eine parallel dem Hauptschnitt, die andere senkrecht zu demselben, zerlegt; deren halbe Amplituden müssen demnach cd und ce, also nunmehr ungleich gross sein. Jede dieser beiden Wellenbewegungen erleidet im Analysator eine erneute Theilung in zwei Componenten, deren eine nach NN', die andere senkrecht dazu gerichtet ist, von denen jedoch nur die erstere den oberen Nicol passiren kann. Diese nach NN' schwingende Componente des ersten Strahles cd ist offenbar cf, die des zweiten ce ist cg. Es interferiren also zwei Strahlen derselben Schwingungsrichtung, aber von verschiedener Amplitude oder Intensität; diese können einander nicht vollkommen vernichten, sondern es muss eine Lichtbewegung von der Phase der grösseren Componente resultiren, deren Amplitude die Differenz beider ist. Man sieht leicht, dass diese Differenz um so kleiner ist, die Vernichtung eine um so vollständigere, je weniger der Winkel zwischen den Richtungen HH' und NN' sich von 45° unterscheidet. Je mehr sich aber derselbe Winkel der Null nähert, desto kleiner wird cd, also auch cf, desto grösser dagegen ce und cg; um so weniger vollständige Auslöschung des Lichtes kann also eintreten. Betrachten wir denjenigen Hauptschnitt des Krystalls, welcher parallel NN' ist, und speciell die Strahlen, welche sich da vereinigen, wo der erste dunkle Ring von der Linie NN' Fig. 55 durchschnitten wird, so werden diese, aus dem Polarisator mit der Schwingungsrichtung NN' austretend, je in zwei Componenten zerlegt, deren eine, parallel dem Hauptschnitt, die ganze Amplitude, die andere, senkrecht dazu, = 0 ist. Dasselbe findet bei der Zurückführung auf eine Schwingungsebene statt, und das Licht geht folglich mit derselben Intensität hindurch, wie die in der Mitte sich vereinigenden Strahlen. Ebenso ist die eine der beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Componenten gleich Null für alle Strahlen, welche sich in demjenigen Hauptschnitt des Krystalls fortpflan-

Fig. 56.

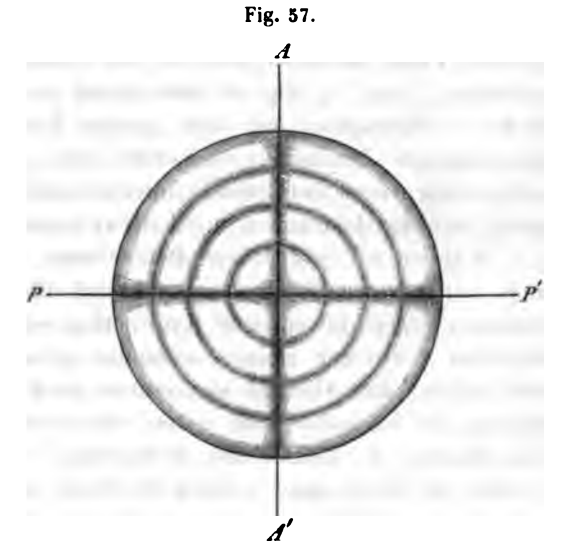


zen, welcher senkrecht zur Schwingungsrichtung NN' des eintretenden Lichtes steht, dieselben mögen eine Neigung gegen die Axe haben, welche sie wollen.

Hieraus ersehen wir, dass die dunklen Ringe, welche wir zwischen parallelen Nicols im convergenten Lichte sehen, nur an den vier Stellen vollkommen dunkel sein können, welche 45° mit der Schwingungsrichtung der Nicols bilden, und von da ab nach beiden Seiten zunehmende Helligkeit zeigen müssen, d. h. dass ein helles Kreuz dieselben durchschneiden muss, wie es in Fig. 55 dargestellt ist.

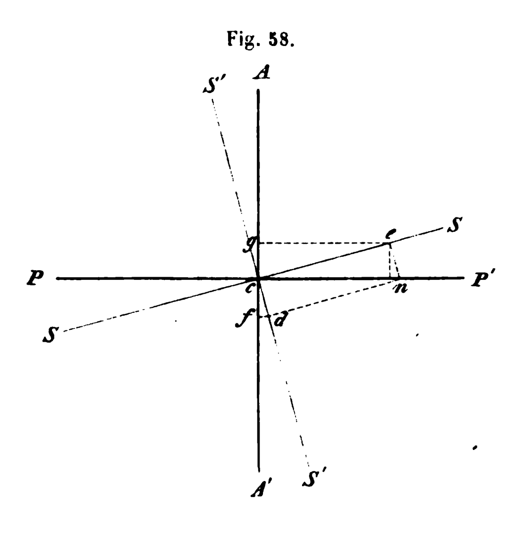
Drehen wir jetzt den Analysator des Instrumentes um 90°, so findet bekanntlich jede Interferenz mit der entgegengesetzten Phase statt. Es wird demnach in dem nunmehr sichtbaren Interferenzbild jede Stelle, welche im vorigen ein Lichtmaximum zeigt, vollkommen dunkel sein, und umgekehrt. In der That muss zunächst die Mitte des Bildes dunkel sein, denn hier vereinigen sich ja die Strahlen, welche den Krystall parallel zur Axe durchsetzen, welche also keine Veränderung in demselben erleiden, demnach zwischen gekreuzten Nicols vollkommen vernichtet werden müssen. Alle Strahlen in dem Hauptschnitt, welcher parallel der Schwingungsrichtung des unteren Nicols PP' Fig. 57 ist, gehen unzerlegt mit derselben Schwingungsrichtung durch den Krystall, weil deren Componente senkrecht zum Hauptschnitt gleich Null, sie werden also durch den obern Nicol vollständig ausgelöscht; dasselbe ist der Fall mit allen in demjenigen Hauptschnitt, welcher parallel der Schwingungsrichtung des oberen Nicols AA' ist, denn diese gehen unzerlegt in derselben Schwingungsrichtung, wie die vorigen, durch den Krystall, weil ihre Componente parallel dem Hauptschnitt gleich Null ist. Das helle Kreuz des Bildes bei parallelen Nicols muss sich also in ein dunkles Kreuz verwandeln, s. Fig. 57, wenn die Nicols gekreuzt sind. Da, wo sich bei parallelen Nicols der innerste dunkle Ring befand, kamen die Strahlen zur Interferenz, welche im Krystall um $\frac{1}{2}\lambda$ gegen einander verzögert worden waren; die beiden interferirenden Componenten waren gleich gross in der Geraden, welche mit der Schwingungsrichtung der Nicols 45° bildet, in einer anderen verschieden; in letzterem Falle

Fig. 57.



kommen von der eintretenden Bewegung *cn* Fig. 58, welche im Krystall in *cd* und *ce* zerlegt wird, nur die Componenten *cg* und *cf* zur Interferenz; diese sind aber stets gleich gross, welchen Winkel auch *ce* mit PP' und AA' bilden; dagegen wird jeder derselben, also auch ihre Summe, um so kleiner, je mehr sich *ce* einer jener beiden Richtungen nähert. Bei gekreuzten Nicols interferiren nun diese Strahlen mit der entgegengesetzten Phasendifferenz von derjenigen, welche sie im Krystall erhalten haben, in diesem Falle also mit gleicher Phase. Da das hindurchgelangende Licht der Summe der beiden Elongationen *cf* und *cg* entspricht, und diese ein Maximum in 45° Abstand von den Hauptschnitten der Nicols hat, so wird an der Stelle des dunklen Ringes nunmehr ein heller erscheinen, dessen Helligkeit von dem bezeichneten Punkte aus, nach den Armen des dunklen Kreuzes zu, allmählich abnimmt, s. Fig. 57.

Fig. 58.



In dem Abstande von der Mitte, wo bei parallelen Nicols ein heller Ring auftritt, interferiren die Strahlen, welche aus dem Krystall mit gleicher Phase austraten, jetzt also mit entgegengesetzter Phase; da ihre Amplituden *cf* und *cg* Fig. 58 stets gleich gross sind, so vernichten sie einander vollkommen; auf dem ganzen Umfange jenes Ringes muss also gleichmässige Dunkelheit vorhanden sein. Fig. 57 stellt demnach das bei gekreuzten Nicols entstehende Interferenzbild dar, welches wir beobachten, wenn wir das Instrument mit einfarbigem Licht beleuchten.

Wählen wir jedoch zur Beleuchtung Licht von einer andern Farbe, z. B. mit grösserer Wellenlänge, so wird offenbar eine grössere Neigung der Strahlen gegen die optische Axe nöthig sein, um denselben eine Phasendifferenz von einer ganzen, nunmehr grösseren Wellenlänge zu verleihen, als vorher; der Abstand des ersten dunkeln Ringes von der Mitte, und ebenso der folgenden vom ersten, wird also grösser sein, als bei der früheren Farbe. Je kleiner die Wellenlänge des zur Beleuchtung benutzten Lichtes ist, desto enger werden die Ringe sein, welche wir im Polarisationsinstrument erblicken, je grösser dagegen jene ist, desto weiter werden diese sein.

Benutzen wir nun statt des einfarbigen Lichtes gewöhnliches weisses, indem wir durch den Spiegel des Polarisationsinstrumentes das Licht einer hell erleuchteten Stelle des Himmels in das Innere desselben reflectiren lassen, so werden diejenigen Strahlen, welche den Krystall in einer be-

stimmten Neigung zu seiner Axe durchsetzen, derartig interferiren, dass für eine bestimmte Farbe die Phasendifferenz genau λ beträgt, diese also zwischen gekreuzten Nicols ausgelöscht wird, während die andern um so weniger geschwächt werden, je mehr ihre Wellenlänge von jener abweicht. Das an der betreffenden Stelle des Bildes erscheinende Licht wird also nach der Vernichtung einer gewissen Farbe nicht mehr Weiss, sondern eine Mischfarbe zeigen. Diese Farbe wird für alle Strahlen, welche gleiche Neigung gegen die optische Axe des Krystalls haben, gleich sein, demnach werden alle Punkte des Interferenzbildes gleiche Farbe zeigen, welche gleich weit vom Centrum entfernt sind; dagegen alle von verschiedener Entfernung verschiedene Farbe. Bei gekreuzten Nicols erscheinen also farbige Ringe von einem schwarzen Kreuz durchschnitten (s. Tafel, Fig. 1), bei parallelen Nicols ebenfalls, aber mit weissem Kreuz. Im letzten Falle ist in jedem einzelnen Abstand von der Mitte gerade diejenige Farbe verlöscht, welche im ersteren Falle im Maximum ist (weil die Strahlen bei gekreuzten Nicols mit entgegengesetzter Phase interferiren); die farbigen Ringe des Interferenzbildes mit schwarzem Kreuz sind demnach bei gleichem Durchmesser genau complementär denen des Bildes mit weissem Kreuz gefärbt. Die krummen Linien eines Interferenzbildes, welche in allen ihren Punkten die gleiche Farbe zeigen, nennt man »isochromatische Curven«; diejenigen einer optisch einaxigen Platte, senkrecht zur Axe, sind also genaue Kreise, deren gemeinschaftliches Centrum der Richtung der Axe entspricht. Dadurch, dass wir durch zwei parallele Flächen eines Krystalls hindurch die kreisförmigen isochromatischen Curven mit dem dunkeln Kreuz (bei $\perp$ Nicols) sehen, ist der Krystall, da nur optisch einaxige diese Erscheinung zeigen, nicht nur als ein solcher erkannt, sondern auch die Richtung seiner optischen Axe als normal zu jenem Flächenpaar bestimmt.

Das in Fig. 1 der Tafel dargestellte Bild unterscheidet sich ferner noch dadurch von der Interferenzerscheinung im einfarbigen Lichte, dass die Intensität der Farbenringe nach aussen abnimmt und in einem gewissen Abstande von der Mitte überhaupt keine solchen mehr zu erkennen sind, sondern das Weiss der höheren Ordnung erscheint. Die Ursache dieser Erscheinung ist genau dieselbe, wie sie auf S. 41 bei der Interferenz des gewöhnlichen Lichtes auseinander gesetzt wurde.

Bisher ist ein Umstand noch ausser Acht gelassen, nämlich die Dicke der Krystallplatte. Nehmen wir statt der bisher betrachteten Platte, welche wir immer gleich dick voraussetzten, eine andere von derselben optisch einaxigen Substanz, ebenfalls senkrecht zur Axe, aber nur von halber Dicke, so werden in dieser die beiden durch die Doppelbrechung aus einem entstehenden Strahlen bei derselben Neigung gegen die Axe nur einen halb so langen Weg im Krystall zurücklegen, also auch der eine nur halb so viel gegen den andern verzögert werden, als vorher. Dieselbe Verzögerung, welche dieselbe Interferenz bedingt, kann also erst für Strahlen eintreten, welche eine weit grössere Neigung gegen die Axe besitzen, es

kann also z. B. in einfarbigem Licht der erste dunkle Ring des Interferenzbildes erst in viel grösserem Abstand von der Mitte entstehen, ebenso bei weissem Licht jeder Ring von gleicher Farbe. Die isochromatischen Curven, die ein einaxiger Krystall zeigt, sind demnach um so weiter von einander abstehend, je dünner die untersuchte Platte ist, um so enger, je dicker dieselbe gewählt wird.

Vergleichen wir endlich noch die Farbenringe, welche gleich dicke Platten verschiedener Substanzen zeigen, so finden wir sie an Weite verschieden. Die Ursache hiervon ist die, dass die Differenz der Geschwindigkeit des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles bei verschiedenen Körpern sehr verschieden ist, dass diese, wie man es zu bezeichnen pflegt, sehr verschiedene Stärke der Doppelbrechung haben. In einem Krystall von schwächerer Doppelbrechung, in welchem jene Differenz kleiner ist, werden die Strahlen stärker gegen die optische Axe geneigt sein müssen, um gleiche Phasendifferenz zu erhalten, also die Farbenringe des Interferenzbildes weiter sein müssen, als in einem Krystall von stärkerer Doppelbrechung bei gleicher Dicke*). Als ein Beispiel einer Substanz, welche sehr starke Doppelbrechung besitzt, deren Platten demnach, wenn sie nicht sehr dünn sind, stets enge Farbenringe zeigen, dient der Kalkspath. Dagegen giebt es eine Varietät eines Minerales, des Apophyllites, deren Krystalle so geringe Doppelbrechung haben, dass sie für die Farben, welche das eine Ende des Spectrums bilden, positiv, für die des andern Endes negativ doppeltbrechend sind, in den ersteren sich der ordinäre, in den letzteren der extraordinäre Strahl schneller fortpflanzt, so dass es eine Farbe dazwischen giebt, für welche sie einfachbrechend sind, ohne deshalb zu den optisch isotropen Krystallen zu gehören, da diese alle Farben einfach brechen, jene aber für alle übrigen Farben wirklich einaxig sind.

b) Platten parallel oder schräg zur optischen Axe. Bei der Beobachtung im convergenten Licht werden, wenn dasselbe weiss ist, nach dem im vorigen §. Auseinandergesetzten nur sehr dünne Platten Farbenerscheinungen liefern können. Eine solche Platte wird in der Mitte des Gesichtsfeldes die gleiche Farbe erzeugen, welche man im parallelen Licht durch dieselbe beobachtet hat; die Strahlen, welche dagegen die Platte in geneigter Richtung durchsetzen, werden zwar sämmtlich eine wachsende Wegdifferenz im Krystall erfahren, aber nicht eine gleichartig wachsende Phasendifferenz, da nach gewissen Richtungen hin, wenn sie sich nämlich der optischen Axe nähern, der Unterschied der Geschwindigkeit der beiden Strahlen fortwährend abnimmt, also trotz zunehmender Dicke auch die Phasendifferenz sich vermindert. In senkrecht zu diesen geneigten Richtungen wird sich, wenn die Platte der Axe parallel ist, die Ge-

*) Hieraus ersieht man, dass die Weite der Ringe dazu dienen kann, den Brechungsexponenten des ausserordentlichen Strahles zu bestimmen, wenn derjenige des ordinären bekannt ist (s. über diese Methode Zeitschr. f. Kryst. 7, 394).

schwindigkeitsdifferenz nicht ändern, also mit wachsender Neigung, wobei die Dicke der durchstrahlten Schicht zunimmt, auch die Phasendifferenz wachsen. In dazwischen liegenden Richtungen werden beide Wirkungen sich aufheben und die Phasendifferenz für alle Neigungen gegen die Normale der Platte dieselbe bleiben. Es entstehen so im homogenen Licht dunkle und helle, im weissen Licht farbige Streifensysteme, welche im Allgemeinen hyperbolische Form haben, und in letzterem Falle nur bei sehr geringer Dicke der Platte sichtbar sind. Von besonderem praktischen Interesse für die Krystallographie ist nur die Erscheinung, welche eine nicht sehr schief, nicht über 25—30° gegen die normal zur optischen Axe stehende Ebene geneigte Platte zeigt; bei einer solchen werden nämlich im convergenten Licht bei grossem Gesichtsfeld des Polarisationsinstrumentes noch solche Strahlen innerhalb desselben vereinigt werden, welche in der Richtung der Axe durch den Krystall gehen. Man wird demnach nahe dem Rande des Gesichtsfeldes das Interferenzbild der Axe, das schwarze Kreuz mit den Farbenringen (wenn auch letztere nicht mehr genau kreisförmig) erblicken. Nach dieser Richtung hin, unter spitzem Winkel gegen die Normale zur Platte geneigt, befindet sich demnach diejenige der optischen Axe, zu deren Auffindung jene Erscheinung dienen kann.

§. 21. **Circularpolarisation.** Stellt man die Nicols eines Polarisationsinstrumentes gekreuzt und fügt, indem man mit einfarbigem und parallelem Licht beleuchtet, eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte*) ein, so erscheint diese nicht dunkel, wie eine andere einaxige Platte, sondern hell, und man muss den oberen Nicol um einen bestimmten Winkel drehen, um das aus derselben austretende Licht auszulöschen. Während also sonst einaxige Krystalle die Polarisation eines in der Richtung der Axe sie durchsetzenden Strahles nicht um das Geringste ändern, ist der parallel der optischen Axe durch Quarz gegangene Strahl zwar auch noch einheitlich linear polarisirt, denn er wird vom oberen Nicol vollständig ausgelöscht, aber er hat beim Austritt eine andere Schwingungsrichtung als beim Eintritt in jenen Krystall; seine Polarisationsebene ist in demselben gedreht worden, um denselben Winkel, um welchen man den Nicol aus der gekreuzten Stellung drehen muss, um die Platte wieder dunkel erscheinen zu lassen.

Diese Erscheinung wird, wie auch durch Versuche bewiesen worden ist, dadurch hervorgebracht, dass in diesem Krystall in der Richtung der Axe zwei Strahlen sich mit ungleicher Geschwindigkeit fortpflanzen, von denen der eine die Aethertheilchen in eine kreisförmige Bewegung mit rechtsläufigem Sinne (wie der Zeiger der Uhr), der andere in eine gleichartige, aber entgegengesetzt gerichtete Bewegung versetzt. Diese beiden circularen,

*) Quarz oder Bergkrystall, SiO^2, ist optisch einaxig.

d. h. kreisförmig schwingenden Strahlen setzen sich beim Austritt aus dem Krystall wieder zu einem einzigen, geradlinig polarisirten, zusammen, dessen Schwingungsrichtung jedoch gegen die des eintretenden Lichtes um einen Winkel gedreht ist, und zwar nach rechts, wenn der rechts rotirende Strahl im Krystall sich schneller fortpflanzt, als der links rotirende, nach links, wenn das Umgekehrte der Fall ist. Die Grösse des Drehungswinkels hängt ab von der Phasendifferenz, mit welcher die beiden circularen Strahlen den Krystall verliessen, d. h. von der Differenz ihrer Geschwindigkeiten und von der Dicke des Krystalls. In Richtungen, welche ausserordentlich wenig gegen die Axe geneigt sind, verwandeln sich die beiden circular schwingenden Strahlen in zwei elliptisch schwingende mit senkrecht zu einander stehenden grossen Axen der Ellipsen; ihre Bahnen werden aber mit wachsender Neigung gegen die Axe so stark elliptisch, dass schon bei sehr geringer Neigung die kleine Axe der Bahn verschwindend klein wird gegen die grosse, die Strahlen sich also nicht mehr von zwei senkrecht zu einander polarisirten geradlinig schwingenden unterscheiden. So findet der Uebergang von dem eigenthümlichen Verhalten dieser Krystalle parallel zur Axe zu dem gewöhnlichen Verhalten einaxiger Krystalle in schief gegen die Axe geneigten Richtungen statt. Wegen der kreisförmigen Bahn der Schwingungen, welche in diesen Krystallen auftreten, nennt man dieselben circularpolarisirende, die Erscheinung Circularpolarisation.

Betrachten wir eine Anzahl gleich dicker, senkrecht zur Axe geschnittener Quarzplatten im parallelen polarisirten Licht, aber stets bei derselben einfachen Farbe, so werden wir finden, dass wir bei einem Theil derselben den oberen Nicol stets um den gleichen Winkel nach rechts (wie der Zeiger der Uhr sich bewegt) drehen müssen, um Auslöschung hervorzubringen, während wir bei den übrigen, und zwar um genau denselben Winkel, den Nicol links herum drehen müssen, um das Gleiche zu erzielen. Daraus ersehen wir, 1) dass alle Quarzplatten von gleicher Dicke die Polarisationsebene derselben Lichtart gleich stark drehen, 2) dass ein Theil jedoch dieselbe nach rechts, der andere sie nach links dreht. Rechts- und linksdrehende Quarzkrystalle unterscheiden sich weder chemisch, noch durch ihre äusseren Eigenschaften, mit Ausnahme gewisser, später zu besprechender Differenzen in der Krystallform.

Bestimmt man die Stärke der Drehung bei Quarzplatten von verschiedener Dicke, so findet man, dass dieselbe mit der Dicke der Platte proportional wächst. Man kennt also die Drehung, welche die Polarisationsebene eines Strahles von bestimmter Farbe erfährt, für jede beliebige Dicke, wenn man diejenige für eine bestimmte, z. B. 1 mm Dicke gemessen hat. Das Drehungsvermögen verschiedener Substanzen ist daher auch nur bei derselben Dicke zu vergleichen.

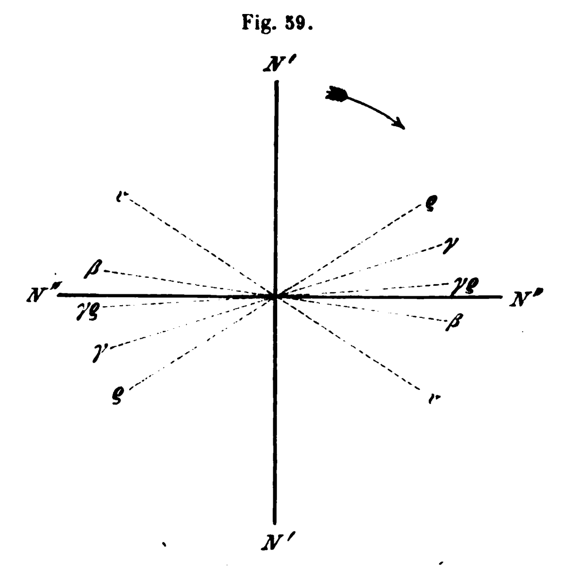
Wenden wir nun statt der zuerst benutzten Farbe das Licht von anderen an, so beobachten wir bei einer und derselben Platte sehr ver-

schiedene Drehungen und zwar um so grössere, je kleiner die Wellenlänge des angewandten Lichtes ist. So dreht nach den Messungen von Biot eine Quarzplatte von 1 mm Dicke die Strahlen der verschiedenen Farben des Spectrums um folgende Winkel:

äusserstes	Roth	17°,5
mittleres	Roth	19 ,0
-	Orange	21 ,4
-	Gelb	24 ,0
-	Grün	27 ,8
-	Blau	32 ,3
-	Indigo	36 ,1
-	Violett	40 ,8
äusserstes	Violett	44 ,1.

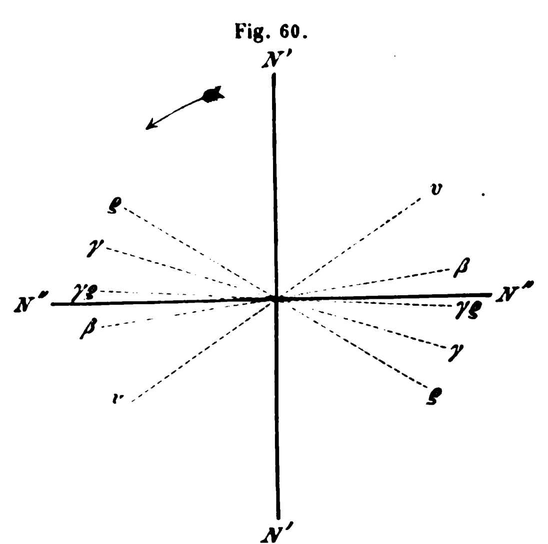
Die grosse Verschiedenheit der Drehung, welche demnach die verschieden gefärbten Strahlen erleiden, ist die Ursache, dass wir im weissen Licht bei keiner Drehung des Analysators Dunkelheit der Platte hervorbringen können, da die Strahlen verschiedener Farben in ganz verschiedenen Ebenen schwingen, also auch nicht alle zugleich durch den Nicol ausgelöscht werden können. Sei Fig. 59 $N'N'$ die Schwingungsebene der parallelen, in eine rechtsdrehende Quarzplatte von etwa 3 mm Dicke eintretenden weissen Lichtstrahlen, so werden die darin enthaltenen rothen Strahlen in dem Quarz die geringste Drehung erleiden, ihre Schwingungsrichtung wird etwa $\varrho\varrho$, diejenige der gelben Strahlen $\gamma\gamma$, der grünen $\gamma\varrho$-$\gamma\varrho$, der blauen $\beta\beta$, der violetten vv sein. Steht der Analysator senkrecht zum Polarisator, ist die Schwingungsebene des durch den ersteren hindurchgehenden Lichtes parallel $N''N''$, so wird derselbe nur diejenigen aus dem Quarz austretenden Strahlen ganz ungeschwächt hindurchlassen, welche parallel $N''N''$ schwingen; dies sind die grünen. Alle Strahlen der andern Farben werden im Nicol in zwei Componenten zerlegt, von denen eine vernichtet wird, und diese letztere ist um so grösser, je grösser der Winkel ist, welchen ihre Schwingungsrichtung mit $N''N''$ macht. Es werden also alle andern Farben geschwächt, um so mehr, je grösseren Winkel ihre Vibrationsrichtung mit der des Analysators

Fig. 59.



$N''N''$ einschliesst. Der Gesammteindruck aller dieser Farben nach ihrer Zurückführung auf eine Polarisationsebene kann demnach nicht mehr **Weiss** sein, sondern muss der einer **Mischfarbe** sein, in welcher das Grün über die andern Farben vorherrscht. Im weissen parallelen Licht beobachtet, wird also eine solche Platte bei gekreuzten Nicols **grün** erscheinen. Eine Drehung der Platte in ihrer eigenen Ebene wird an dieser Erscheinung nicht das Geringste ändern, da ja hierbei die Richtung, in welcher die Strahlen die Platte durchsetzen, also auch die Drehung ihrer Polarisationsebene stets dieselbe bleibt, wohl aber eine solche des einen Nicols gegen den andern. Drehen wir z. B. den Analysator aus der Stellung $N''N''$ Fig. 59 nach **rechts** (wie der Pfeil in der Figur andeutet), so wird seine Schwingungsrichtung parallel derjenigen des blauen Lichtes, dies wird also in der entstehenden Mischfarbe im Maximum, die anderen Farben geschwächt sein; die Platte wird **blau** erscheinen. Bei weiterer Drehung in derselben Richtung fällt $N''N''$ mit der Schwingungsrichtung vv des violetten Lichtes zusammen; die Platte erscheint **violett**. Drehen wir über $N'N'$ hinaus, bis $N''N''$ parallel $\varrho\varrho$ wird, so ist die Platte mit einer Mischfarbe gefärbt, in welcher Roth vorherrscht, also sehen wir sie **roth**, bei weiterer Drehung gelb, wiederum grün, blau, violett. Drehen wir demnach den Analysator nach **rechts**, so erscheint die Platte stets farbig, aber ihre Färbung ändert sich in der Weise, dass die verschiedenen Farben des Spectrums in der **Reihenfolge ihrer Brechbarkeit** (von dem am wenigsten brechbaren Roth bis zum Violett, welches am stärksten gebrochen wird) erscheinen. Man sieht leicht ein, dass bei umgekehrter Drehung die Farbenfolge die entgegengesetzte sein wird.

Fig. 60.



Nehmen wir nun statt der rechtsdrehenden eine **linksdrehende** Quarzplatte von derselben Dicke, und sei wieder $N'N'$ Fig. 60 die Schwingungsrichtung des in dieselbe eintretenden **weissen** Lichtes, so werden die Schwingungsrichtungen der rothen, gelben, grünen, blauen und violetten Strahlen nach ihrem Austritt aus der Platte jetzt resp. $\varrho\varrho, \gamma\gamma, \gamma\varrho\gamma\varrho, \beta\beta, vv$ sein. Es wird also, wie bei dem rechtsdrehenden Quarz, bei keiner Stellung der Nicols Dunkelheit eintreten, sondern die Platte zeigt stets eine Mischfarbe. Bei gekreuzter Stellung des Analysators, wenn dessen Schwingungsrichtung $N''N''$, er-

scheint auch diesmal die Platte grün; wird der obere Nicol jedoch rechts herumgedreht, so erscheint jetzt zunächst Gelb, dann Roth u. s. f.; bei derselben Drehung des Nicols, bei welcher wir mittelst einer rechtsdrehenden Quarzplatte die Farben in der Reihenfolge ihrer Brechbarkeit erhielten, resultiren dieselben bei einer linksdrehenden Platte in umgekehrter Reihenfolge, d. h. wir müssen in entgegengesetztem Sinne drehen (wie der Pfeil angiebt), um dieselbe Farbenfolge zu erhalten.

Hieraus folgt, dass eine rechts- und eine linksdrehende Quarzplatte, zwischen zwei Nicols von derselben Stellung zu einander, z. B. senkrecht gekreuzte, gebracht, dieselbe Farbe zeigen, beide sich aber dadurch unterscheiden, dass bei einer Drehung des Analysators die Farben in der Reihenfolge: Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Violett erscheinen, wenn die Platte rechtsdrehend ist, bei rechter Drehung des Analysators (wie der Zeiger der Uhr sich bewegt); wenn sie linksdrehend ist, bei entgegengesetzter Drehung jenes Nicols.

Legen wir eine dickere Quarzplatte zwischen zwei gekreuzte Nicols, so muss dieselbe eine andere Farbe zeigen, als die vorige zwischen denselben Nicols, weil sie proportional ihrer Dicke stärker dreht, also die Schwingungsrichtungen der verschiedenen Farben beim Austritt aus derselben ganz andere (stärker gedrehte) Lage haben, folglich durch den Analysator nicht dieselbe Farbe ausgelöscht wird, als vorher.

Da die Circularpolarisation nur in der Richtung der optischen Axe der Quarzkrystalle auftritt, während dieselben sich in allen anderen Richtungen (abgesehen von den der Axe unmittelbar benachbarten, s. S. 83) ebenso wie andere optisch einaxige Krystalle verhalten, so muss eine Quarzplatte, welche senkrecht zur Axe geschliffen ist, im convergenten Licht betrachtet, gleichfalls das schwarze Kreuz mit den kreisförmigen Farbenringen zeigen, wenn die Nicols des Polarisationsinstrumentes gekreuzt sind: nur diejenige Stelle des Gesichtsfeldes, in welcher sich die den Krystall parallel zur Axe durchsetzenden Strahlen vereinigen, d. i. die Mitte und deren unmittelbare Nachbarschaft, kann nicht dunkel erscheinen, weil die Polarisationsebene gerade dieser Strahlen gedreht wird. Die Mitte der Ringe muss also dieselbe Farbe zeigen*), welche die ganze Platte im parallelen Lichte zeigt, d. h. bei anderer Dicke eine andere. Ebenso muss diese Farbe sich ändern, wenn der Analysator gedreht wird, und aus der Reihenfolge der auftretenden Farben und dem Sinn der Drehung wird man ebenso, wie im parallelen Licht, bestimmen können, ob die Platte rechts- oder linksdrehend ist.

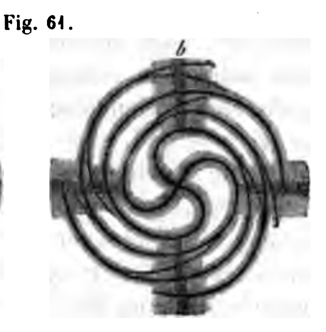
Legt man eine rechts- und eine linksdrehende Quarzplatte von gleicher Dicke aufeinander, und bringt beide in das Polarisationsinstrument mit convergentem Licht und gekreuzten Nicols, so muss die Mitte des Inter-

*) s. Fig. 2 der Tafel.

ferenzbildes dunkel bleiben, weil die Drehungen der Schwingungsrichtungen durch beide Platten einander genau aufheben. Von der dunkeln Mitte des entstehenden Interferenzbildes gehen aber keine geradlinigen schwarzen Kreuzesarme aus, sondern spiralartig gewundene Curven, nach ihrem Entdecker die Airy'schen Spiralen genannt, deren Windungsrichtung zugleich angiebt, in welchen von den beiden entgegengesetzt drehenden Krystallen die Lichtstrahlen zuerst eintreten. Fig. 61 *a* stellt die Erscheinung in dem Falle vor, dass das Licht zuerst durch die linksdrehende, Fig. 61 *b* in dem, dass es zuerst durch die rechtsdrehende Platte geht.*)

Fig. 61.





Alles hier Gesagte gilt nun auch für die übrigen Substanzen, deren Krystalle Circularpolarisation zeigen, nur mit dem Unterschied, dass das Drehungsvermögen derselben ein anderes ist, bei einigen stärker, bei den meisten schwächer, als das des Quarzes. Die Fähigkeit, die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen, kommt, ausser gewissen Flüssigkeiten, nur Krystallen zu, welche entweder keine Doppelbrechung besitzen, d. i. optisch isotropen, oder einaxigen in derjenigen Richtung, in welcher sie einfach brechend sind, d. h. parallel der optischen Axe. Bis jetzt hat man diese Fähigkeit an folgenden chemischen Verbindungen gefunden:

a) Einfach brechende, welche die Polarisationsebene des Lichtes in allen Richtungen, und zwar gleich stark drehen:

Chlorsaures Natrium,
Bromsaures Natrium,
Essigsaures Uranylnatrium.

b) Einaxige, welche nur in der Richtung der optischen Axe Drehungsvermögen besitzen:

Schwefelsaures Strychnin,
Schwefelsaures Aethylendiamin,
Kohlensaures Guanidin,
Diacetylphenolphtalein,
Quarz,
Zinnober,

*) Unter den in der Natur vorkommenden Krystallen des Quarzes finden sich solche, welche aus Schichten von Rechts- und Links-Quarz zusammengesetzt sind, und dies ist dann oft nur durch das Auftreten der Airy'schen Spiralen zu erkennen.

Ueberjodsaures Natrium,
Unterschwefelsaures Blei,
Unterschwefelsaures Kalium,
Unterschwefelsaures Calcium,
Unterschwefelsaures Strontium,
Benzil,
Maticocampher.

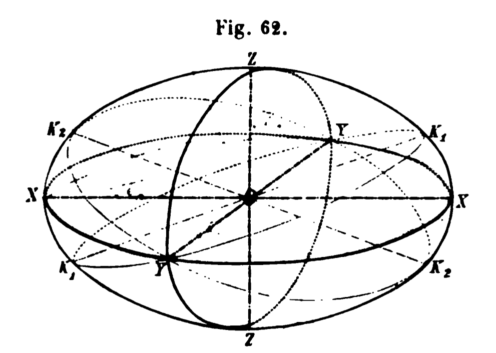
§. 22. **Optische Elasticitätsverhältnisse der zweiaxigen Krystalle.** Bei den optisch einaxigen Krystallen ist zwar die Elasticität des Aethers nach den verschiedenen Richtungen verschieden, jedoch symmetrisch zur Axe, so dass sie gleich ist für alle Richtungen rings um die Axe, welche gleichen Winkel mit derselben einschliessen. Bei der letzten, jetzt zu betrachtenden Klasse von Krystallen dagegen giebt es keine Richtung, von welcher ausgehend sich die Elasticität nach allen Seiten gleichartig ändert; es ist vielmehr, von welcher Richtung wir auch ausgehen mögen, diese Aenderung im Allgemeinen eine andere, wenn wir uns nach einer anderen Seite hin von jener Ausgangsrichtung entfernen. Die optischen Verhältnisse sind daher bei dieser Klasse von Krystallen ungleich complicirter, und zwar in solchem Grade, dass man die Gesetze der Aenderung der Elasticität des Aethers mit der Richtung nicht empirisch erforscht hat, sondern dass dieselben zuerst (von Fresnel) theoretisch aus den Grundsätzen der Undulationstheorie des Lichtes abgeleitet und dann mit den Beobachtungen verglichen worden sind, wobei sich eine Bestätigung jener durch diese gezeigt hat, wie sie vollkommener nicht gedacht werden kann. Die wichtigsten Resultate jener theoretischen Ableitung, wie sie sich zunächst nur beziehen auf Schwingungen von einer bestimmten Wellenlänge (Licht von einer bestimmten Farbe) sollen im Folgenden so weit mitgetheilt werden, als sie für die Krystallographie von praktischem Interesse sind.

Da die Elasticität des Aethers nach verschiedenen Richtungen verschieden anzunehmen ist, wird es eine Richtung im Krystall geben, in welcher jene ihren grössten, eine andere, in welcher sie ihren kleinsten Werth hat. Diese beiden Richtungen stehen, wie bei den einaxigen Krystallen, auf einander senkrecht. Die Elasticität in der senkrecht zu beiden stehenden Richtung wird ihrem Werthe nach zwischen dem Maximum und dem Minimum stehen müssen, ohne indess gerade das arithmetische Mittel beider zu sein. Nennen wir diese drei, in optischer Beziehung wichtigsten, Richtungen die optischen Elasticitätsaxen des Krystalls, und unterscheiden sie als Axe der grössten, kleinsten und mittleren Elasticität, deren Werthe $= e_a, e_b, e_c$ seien, so ergiebt die Theorie, dass die Quadratwurzel aus der Elasticität nach einer beliebigen anderen Richtung der entsprechende radius vector eines sogenannten »dreiaxigen Ellipsoids« mit den Hauptaxen $\sqrt{e_a}$, $\sqrt{e_b}$, $\sqrt{e_c}$ ist, d. h. einer krummen Oberfläche,

welche folgende Eigenschaften besitzt (s. Fig. 62, in welcher $OX = \sqrt{e_a}$, $OY = \sqrt{e_b}$, $OZ = \sqrt{e_c}$):

Der Durchschnitt der Fläche mit der Ebene XZ ist eine Ellipse mit den Axen OX und OZ, derjenige mit der Ebene XY eine Ellipse mit den Axen OX, OY, der mit YZ eine Ellipse mit den Axen OY und OZ. Diese drei Ebenen heissen die Hauptschnitte des dreiaxigen Ellipsoids. Denken wir uns eine Ebene, von der Lage der Ebene XZ ausgehend, um die Axe Z gedreht bis in die Lage YZ, so durchschneidet diese in allen dazwischen durchlaufenen Lagen die Elasticitätsfläche in Ellipsen, deren kleine Axe stets $= OZ$, deren grosse Axe (in der Ebene XY gelegen) allmählich alle Werthe von OX bis OY durchläuft. Ganz analog damit bildet die Durchschnittsfigur der Fläche mit einer durch OX gehenden Ebene stets eine Ellipse, deren grosse Axe $= OX$, deren kleine folglich in die Ebene YZ fällt und eine Länge zwischen OY und OZ besitzt. Denken wir uns endlich auch Ebenen durch OY gelegt, so schneiden diese die Fläche in Ellipsen, deren eine Axe $= OY$ und deren zweite, in der Ebene XZ gelegen, während einer Drehung um 90° alle Werthe zwischen OX und OZ durchläuft. In diesem Intervall befindet sich auch der Werth der Wurzel aus der mittleren Elasticität $= OY$. Ehe letzterer erreicht wird, also unter kleinerer Neigung der Ebene gegen OX, ist die Durchschnittsfigur eine Ellipse, deren grosse Axe in der Ebene XZ liegt, aber bei zunehmender Neigung sich immer weniger von der anderen Axe in ihrer Länge unterscheidet, deren Gestalt sich also immer mehr derjenigen eines Kreises nähert. Unter einem bestimmten Winkel XOK_1 wird $OK_1 = OY$, die Durchschnittsfigur wird ein Kreis. Ist der Werth der mittleren Elasticität überschritten, so wird der radius vector in der Ebene XZ kleiner, also ist die Durchschnittsfigur der Elasticitätsfläche nunmehr eine Ellipse geworden, deren kleine Axe in XZ liegt und deren grosse $= OY$ ist. Da der elliptische Durchschnitt in XZ gegen OX rechts und links symmetrisch ist, so resultiren genau dieselben Schnittfiguren der Fläche für alle Ebenen, welche nach der entgegengesetzten Seite von X unter gleichen Winkeln geneigt sind, es giebt demnach auch hier eine Ebene YOK_2, welche die Fläche in einem Kreise vom Radius OY schneidet. Das dreiaxige Ellipsoid bildet demnach mit allen Ebenen elliptische Durchschnittsfiguren, mit Ausnahme zweier Kreisschnitte, welche zur Ebene XZ senkrecht stehen und mit OX gleiche Winkel einschliessen.

Fig. 62.



Die durch ihre drei Hauptaxen bestimmte Gestalt der optischen Elasticitätsfläche ergiebt nun ebenso, wie diejenige der optisch einaxigen

Krystalle, die Fortpflanzungsverhältnisse einer beliebigen Welle. Jeder in irgend einer Ebene schwingende Lichtstrahl wird nämlich in zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen zerlegt, deren Schwingungsrichtungen parallel der grössten und der kleinsten Axe derjenigen Ellipse sind, welche die Durchschnittsfigur der Elasticitätsfläche mit der Wellenebene*) darstellt, und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sich verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Werthen der Elasticität in den beiden Schwingungsrichtungen, d. i. wie die Längen der beiden Axen jener Ellipse. Alle Schwingungen, welche parallel einem Kreisschnitte der Elasticitätsfläche stattfinden, pflanzen sich daher, sie mögen in diesem Kreisschnitte schwingen (polarisirt sein), wie sie wollen, mit einer und derselben (mittleren) Geschwindigkeit, d. h. ohne Aenderung ihrer Polarisationsrichtung, fort. Für Lichtwellen, die in der Normale dieser Kreisschnitte den Krystall durchlaufen, verhält er sich daher wie ein isotroper Körper. Die Richtungen dieser Normalen nennt man *optische Axen* (genauer: »optische Axen für Wellen« oder »primäre optische Axen«), die Krystalle dieser Klasse, weil sie zwei solcher Axen besitzen, *optisch zweiaxige*.

Mittelst geometrischer Betrachtungen ergiebt sich der folgende Satz, durch welchen die Richtungen der beiden Axen der Schnittellipse der Elasticitätsfläche für eine beliebige Wellenebene, d. h. die Schwingungsrichtungen der beiden Wellen, die sich in gleicher Richtung fortpflanzen, bestimmt werden können: Seien A_1 und A_2 die Richtungen der beiden optischen Axen, V diejenige der gemeinschaftlichen Normale d. i. die Fortpflanzungsrichtung der beiden Wellen, gelegt durch den Mittelpunkt der Elasticitätsfläche. V fällt im Allgemeinen nicht in die Ebene der beiden optischen Axen A_1 und A_2. Legt man durch V und A_1 eine Ebene, desgleichen eine durch V und A_2, so stossen diese beiden Ebenen in V unter einem gewissen Winkel zusammen. Die Halbirungsebene dieses Winkels enthält die Schwingungsrichtung der einen Welle, die (zur ersten senkrechte) Halbirungsebene des Supplementwinkels die Schwingungsrichtung der anderen Welle.

Wenn die mittlere Elasticität eines zweiaxigen Krystalls, wie es in Fig. 62 dargestellt ist, näher an der grössten, als an der kleinsten liegt, so bilden offenbar die Richtungen OK_1 und OK_2 mit OX einen spitzen Winkel, also die dazu normalen Axen OA_1 und OA_2 einen stumpfen. In diesem Falle ist die Ellipse XY einem Kreise ähnlicher, als die beiden anderen Hauptschnitte der Elasticitätsfläche, die letztere ähnelt daher einem in der Axe OZ zusammengedrückten Rotationsellipsoid, und zwar um so mehr, je weniger sich OY und OX unterscheiden, d. h. je mehr sich der Haupt-

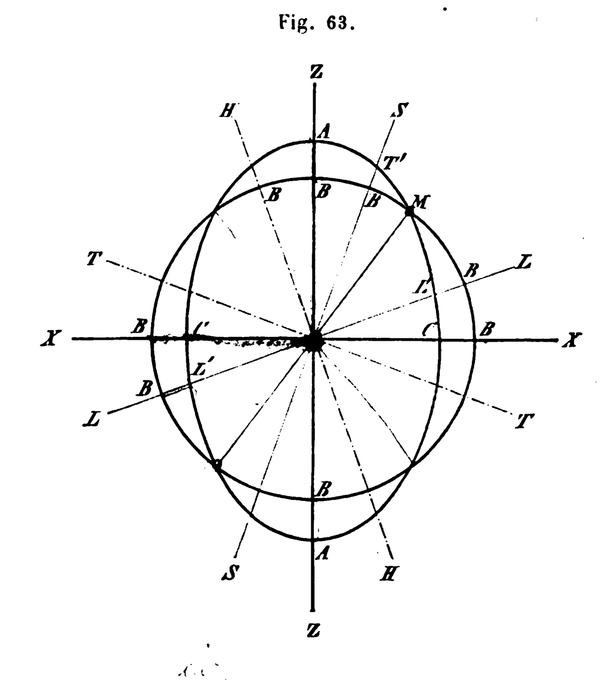
*) Wellenebene heisst die Ebene senkrecht zur Richtung des Strahles, weil in dieser alle Schwingungen der Wellenbewegung des Lichtes stattfinden. Dieselbe wird in dem obigen Falle durch die Mitte der Elasticitätsfläche gelegt gedacht.

schnitt XY der Form eines Kreises nähert. Würde $OY = OX$ werden, so nähme die Elasticitätsfläche genau die Form eines Rotationsellipsoides an, dessen kleine Axe OZ, d. h. die Form der Elasticitätsfläche eines positiven einaxigen Krystalls. Man nennt deshalb diejenigen zweiaxigen Krystalle, deren kleinste optische Elasticitätsaxe im spitzen Winkel der optischen Axen liegt, positive. Ist umgekehrt die mittlere Elasticität näher der kleinsten, als der grössten, d. h. liegen die Radien OK_1 und OK_2 näher an OZ als an OX, so unterscheidet sich die Ellipse YZ weniger vom Kreise, als die beiden andern Hauptschnitte. Die Elasticitätsfläche nähert sich einem Rotationsellipsoid, dessen Axe die der grössten Elasticität OX, d. h. der Form der Elasticitätsfläche eines negativen einaxigen Krystalls. Diejenigen zweiaxigen Krystalle, deren grösste Elasticitätsaxe in den spitzen Winkel der optischen Axen fällt, werden deshalb negative genannt.

§. 23. **Wellenfläche der zweiaxigen Krystalle.** Da nach der im vorigen §. auseinandergesetzten Theorie ein Lichtstrahl in einem zweiaxigen Medium im Allgemeinen in zwei senkrecht zu einander polarisirte zerlegt wird, welche sich mit verschiedener Geschwindigkeit im Krystall fortpflanzen, so muss die Wellenfläche eines solchen Mediums, d. h. diejenige Oberfläche, bis zu welcher sich das Licht von einem Punkte aus in einer bestimmten Zeit ausgebreitet hat, so beschaffen sein, dass eine durch die Mitte gelegte Gerade sie nach jeder Seite im Allgemeinen zweimal schneidet, indem die beiden Entfernungen der inneren und der äusseren Schale der Fläche von der Mitte sich verhalten, wie die Geschwindigkeiten der beiden in dem betreffenden radius vector sich fortpflanzenden Strahlen. Von der Gestalt dieser doppelten Oberfläche erhält man am leichtesten eine Vorstellung, wenn man die Durchschnitte derselben nach den drei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen betrachtet, welche durch je zwei der Elasticitätsaxen gelegt werden können, und welche hier ebenso, wie bei der Elasticitätsfläche, die Hauptschnitte heissen. Bezeichnen OX, OY und OZ die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten optischen Elasticität, und werde zuerst der Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene der grössten und kleinsten Elasticität, XOZ Fig. 63, d. h. die Fortpflanzungsverhältnisse des Lichtes in dieser Ebene, betrachtet. Die von O aus nach rechts oder links in der Richtung OX sich fortpflanzenden Strahlen haben die Schwingungsebene YOZ (wo OY die auf der Zeichnungsebene senkrechte Axe der mittleren Elasticität), zerfallen also nach den Darlegungen des vorigen §. in zwei Schwingungen, parallel den Hauptaxen der Ellipse YZ Fig. 62, d. h. parallel den Elasticitätsaxen OY und OZ, deren Geschwindigkeiten sich verhalten wie die Quadratwurzeln der entsprechenden Elasticitäten e_b und e_c. Die erste der beiden Schwingungen pflanzt sich also mit der mittleren, die zweite mit der kleinsten unter allen im Krystall möglichen (weil e_c die kleinste Elasticität) fort; in derselben Zeit, in welcher die erstere beiderseits bis zur Entfernung OB gelangt ist, hat

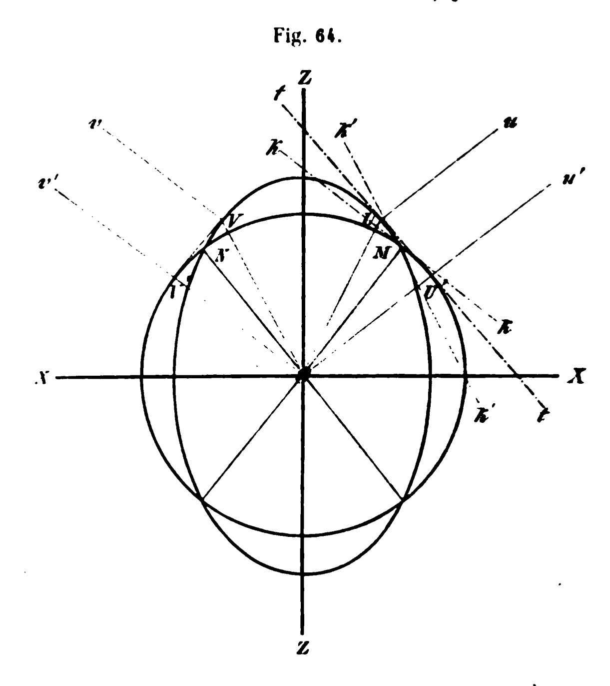
sich die zweite bis zur Entfernung OC fortgepflanzt. Die Wellenfläche muss also durch die Richtung OX auf jeder Seite in den beiden Punkten C und B durchschnitten werden. Betrachten wir nunmehr einen Strahl, in der Richtung OZ sich fortpflanzend. Die dazu normale Schwingungsebene ist XOY, in welcher OX die Richtung der grössten Elasticität ist, OY die der mittleren, also unter allen in dieser Ebene liegenden die relativ kleinste. Jener Strahl wird also in zwei, || OX und OY schwingende, zerlegt werden, von welchen der erste mit der grössten Lichtgeschwindigkeit beiderseits von O bis A, der zweite, der die mittlere Geschwindigkeit haben muss, bis B gelangt ist. Gehen wir nun über zu einem beliebigen anders gerichteten Strahl in dieser Ebene, z. B. OL, so ist dessen zum Strahl normale Schwingungsebene HOY; in dieser ist OY die Axe der mittleren Elasticität, OH hat einen zwischen der kleinsten und grössten liegenden Werth, da seine Richtung zwischen OX und OZ. Sei OH so nahe an OZ, dass seine Elasticität kleiner als die mittlere OY, so ist sie die relativ kleinste unter allen in der Ebene HOY liegenden Richtungen. Folglich wird sich der Strahl OL theilen in zwei Bewegungen mit den Schwingungsrichtungen OY und OH; die erstere hat die mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit OB, die letztere eine zwischen der mittleren und kleinsten liegende OL'; es werden also die Punkte L' und B, bis zu welchen sich gleichzeitig die Bewegung auf OL fortgepflanzt hat, kleinere Entfernung von einander haben, als C und B auf OX, d. h. die Wellenflächen der beiden Strahlen nähern sich einander. Nimmt man dagegen einen Strahl OS, so ist dessen Schwingungsebene TOY, worin OY die Axe der mittleren, OT eine grössere Elasticität als die mittlere besitzt, weil sie näher an OX liegt. Folglich giebt es hier zwei Strahlen, nach OY und OT schwingend, wovon diesmal umgekehrt der erstere mit der mittleren Geschwindigkeit OB der langsamere ist, der zweite in derselben Zeit bis T' gelangt. Daraus ersehen wir, dass die Curven, in welchen die beiden Schalen der Wellenfläche von der Ebene XOZ geschnitten werden, von der Richtung OX ausgehend, sich

Fig. 63.



einander nähern, z. B. in OL; näher an OZ dagegen umgekehrt liegen, die innere aussen, und sich um so mehr von einander entfernen, je mehr die Richtung des Strahles sich OZ nähert. Dazwischen muss es folglich einen Punkt M geben, in welchem sich beide Curven schneiden, d. h. eine Richtung OM, in welcher ein Strahl sich fortpflanzt, dessen beide senkrecht zu einander schwingende Componenten, || OY und senkrecht OM in der Ebene XOZ, gleiche Geschwindigkeit besitzen. Diese beiden Strahlen pflanzen sich zwar im Krystall in derselben Richtung OM fort, haben jedoch, wie aus Fig. 64 ersichtlich, verschiedene Wellenebenen, d. h. verschiedene Tangentialebenen durch den Punkt M an die beiden Schalen der Wellenfläche (kk und $k'k'$); diese beiden Strahlen werden also beim Austritt aus dem Krystall verschieden gebrochen. Dagegen besitzen alle Strahlen, welche auf dem Mantel eines (in Wirklichkeit stets äusserst spitzen) Kegels liegen, dessen Oeffnung UOU', z. B. die beiden Strahlen OU und OU' selbst, nur eine Wellenfläche, wenn U und U' diejenigen Punkte sind, in welchen die gemeinschaftliche Tangentialebene tt beide Schalen der Wellenfläche berührt. Diese Ebene ist nicht nur Wellenfläche der Strahlen OU und OU', sondern berührt beide Schalen rings um M in einem kleinen Kreis mit dem Durchmesser UU'; alle von O aus nach dem Umfange dieses Kreises gehenden Strahlen haben ebendieselbe Wellenebene, also kann sich in der Normalen zu derselben Uu nur eine einzige Welle fortpflanzen. Die Strahlen jenes spitzen Kegelmantels treten als Strahlencylinder aus dem Krystall aus, und da alle Strahlen, welche sich im Krystall in der Richtung Uu oder $U'u'$ fortpflanzen, nur eine Wellenebene besitzen, so werden solche beim Austritt aus demselben auch keine Doppelbrechung erfahren können. Das Gleiche gilt für die symmetrisch entgegengesetzte Richtung Vv oder $V'v'$. Diese beiden Richtungen fallen zusammen mit den Normalen zu den Kreisschnitten der Elasticitätsfläche, d. h. es sind die optischen Axen des Krystalls. Die beiden Richtungen OM und ON, welche sich in Wirklichkeit nur sehr wenig von den

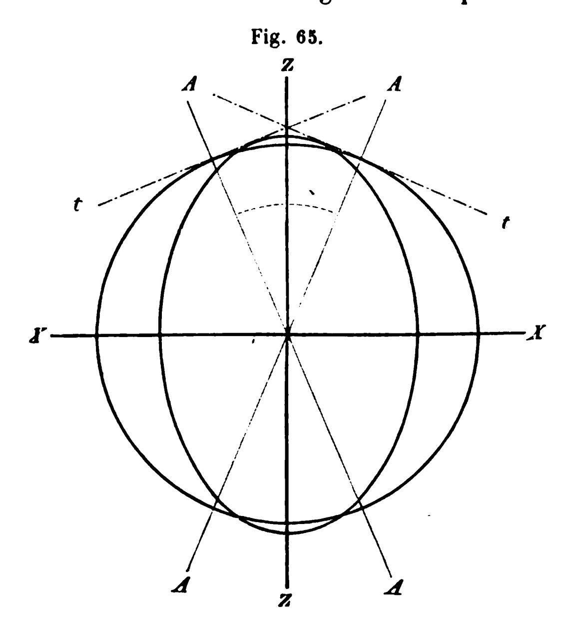
Fig. 64.



beiden vorigen unterscheiden, nennt man »secundäre optische Axen« oder »optische Axen für Strahlen«.

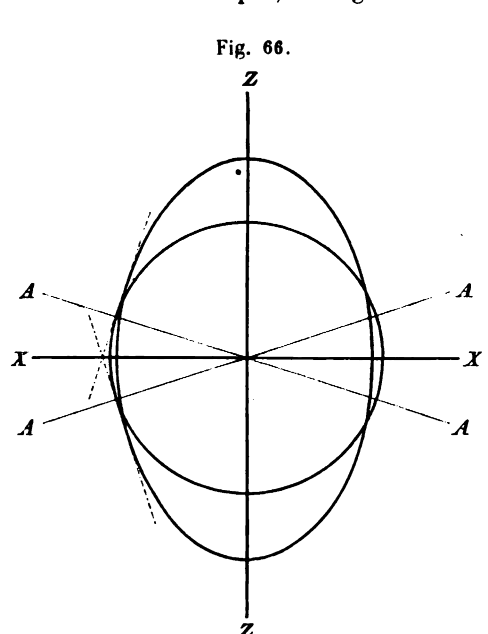
Die Gestalt der beiden Curven, welche den Durchschnitt der Wellenfläche mit der optischen Axenebene darstellen, ist für die eine sehr leicht zu bestimmen, sie ist nämlich ein **Kreis**. Ein Strahl in der Ebene XOZ mag eine Richtung haben, welche er wolle, wir sahen oben, dass die eine von den beiden daraus entstehenden polarisirten Wellen stets die (zur Zeichnungsebene normale) Axe der mittleren Elasticität OY zur Schwingungsrichtung habe, also sich stets mit derselben, der mittleren Geschwindigkeit fortpflanzen muss. Dieser Strahl ist also nach Verlauf einer bestimmten Zeit auf dem Umfang eines Kreises angelangt; seine Geschwindigkeit ist unabhängig von seiner Richtung, es ist ein **ordinärer** Strahl, welcher dem Brechungsgesetz folgt. Anders ist es mit der zweiten, durch die Doppelbrechung entstehenden Lichtwelle. Ist die Fortpflanzungsrichtung eine andere, so ist es auch die Schwingungsrichtung, somit die Geschwindigkeit. In der Richtung OX pflanzt sich der zweite Strahl mit der kleinsten Geschwindigkeit, in OZ mit der grössten, in zwischenliegenden Richtungen mit einer Geschwindigkeit fort, welche ebenfalls zwischen jenen liegt und, wie die Theorie ergiebt, sich mit der Richtung ändert, wie die Halbmesser einer **Ellipse**, deren kleine und grosse Axe proportional der kleinsten und grössten Lichtgeschwindigkeit sind. Dieser letztere Strahl wird also nach Verlauf derselben Zeit auf dem Umfang einer Ellipse mit den erwähnten Axen angelangt sein. Der Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene XOZ ist also eine Ellipse mit den Axen $v_a = \sqrt{e_a}$ und $v_c = \sqrt{e_c}$ (grösste und kleinste Lichtgeschwindigkeit) und ein Kreis mit dem Durchmesser $v_b = \sqrt{e_b}$ (mittlere Lichtgeschwindigkeit). Da letzterer Werth zwischen den beiden ersteren liegt, so muss der Kreis die Ellipse viermal schneiden; legt man rechts und links an beide Curven die gemeinschaftliche Tangente tt Fig. 65 und zieht die Normalen dazu durch die Mitte, so hat man die Richtungen der beiden optischen Axen. Was den Winkel, der von diesen eingeschlossen wird, betrifft, so sieht man aus Fig. 65, dass die Durchschnittspunkte von Kreis und Ellipse weniger von OZ abstehen als von OX, wenn die

Fig. 65.



mittlere Lichtgeschwindigkeit näher an der grössten als an der kleinsten liegt; die Halbirende des spitzen Axenwinkels, welche man die erste Mittellinie oder kurz die Mittellinie nennt, ist in diesem Falle die Axe der kleinsten Elasticität OZ, während OX den stumpfen Winkel der Axen halbirt; solche Krystalle heissen nach S. 91 positive. Liegt dagegen die mittlere Lichtgeschwindigkeit näher an der kleinsten als an der grössten d. h. ist der Halbmesser des Kreises wenig verschieden von der halben kleinen Axe der Ellipse, so liegen die Durchschnittspunkte der beiden Curven näher an OZ (s. Fig. 66); die Axe der grössten Elasticität ist erste Mittellinie der optischen Axen, die der kleinsten zweite Mittellinie (oder Supplementarlinie), d. h. sie halbirt den stumpfen Winkel. Die zweiaxigen Krystalle dieser zweiten Klasse heissen nach S. 91 negative. Es zeigt sich somit, dass die Grösse des Winkels der optischen Axen nur davon abhängt, ob v_b näher an v_a oder an v_c liegt, also bestimmt ist, sobald man das Verhältniss $v_a : v_b : v_c = \sqrt{e_a} : \sqrt{e_b} : \sqrt{e_c}$ kennt. Die Gleichung, durch welche man jene Grösse aus den Geschwindigkeiten zu berechnen hat, wird weiterhin angegeben werden.

Fig. 66.



Hiermit wäre nun die Durchschnittsfigur der Wellenfläche erst mit einem Hauptschnitt, der Axenebene XOZ, gegeben, und nunmehr diejenige mit den beiden anderen, dazu senkrechten, aufzusuchen. Betrachten wir zunächst den Hauptschnitt XOY, in welchem die Axen der grössten und der mittleren Elasticität liegen. Auch hier liefert die Theorie das Resultat, dass die Elasticitätsverhältnisse gegen diese Ebene sich symmetrisch ändern, und somit ein in derselben sich fortpflanzender Strahl stets in zwei zerfällt, deren einer im Hauptschnitt XOY, deren anderer senkrecht dazu schwingt. Die Schwingungsrichtung des letzteren ist also stets dieselbe von seiner Richtung gegen OX und OY unabhängig, und zwar ist sie die Axe der kleinsten Elasticität, also pflanzt sich dieser, der ordinäre Strahl mit constanter Geschwindigkeit, welche gleich der kleinsten Lichtgeschwindigkeit im Krystall ist, fort. Nach Verlauf einer bestimmten Zeit wird er also bis zum Umfange eines Kreises gelangt sein, dessen Durchmesser proportional der kleinsten Lichtgeschwindigkeit v_c ist. Die andere

durch die Doppelbrechung entstehende Vibration, deren Schwingungsrichtung in den Hauptschnitt fällt, muss, da diese Richtung stets senkrecht zum Strahl steht, also mit dessen Lage gegen *OX* und *OY* wechselt, nach verschiedenen Richtungen verschieden schnell sich fortpflanzen; es ist dies ein extraordinärer Strahl. Ist die Richtung seiner Fortpflanzung *OX*, so ist die seiner Schwingungen *OY*, seine Geschwindigkeit also die mittlere; ist die erste Richtung *OY*, so ist die der Vibration || *OX*, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit also die grösste. Da sich hier die Geschwindigkeit mit der Richtung nach einem analogen Gesetze ändert, als im ersten Hauptschnitt, so ist die Curve, bis zu deren Umfang die extraordinäre Lichtbewegung in obiger Zeit gelangt ist, eine Ellipse, deren grosse und kleine Axe proportional der grössten und mittleren Lichtgeschwindigkeit ist. Die Durchschnittsfigur der Wellenfläche mit dem Hauptschnitt *XOY* ist also diese Ellipse, welche den Kreis mit dem Durchmesser v_c völlig einschliesst, Fig. 67.

Fig. 67.

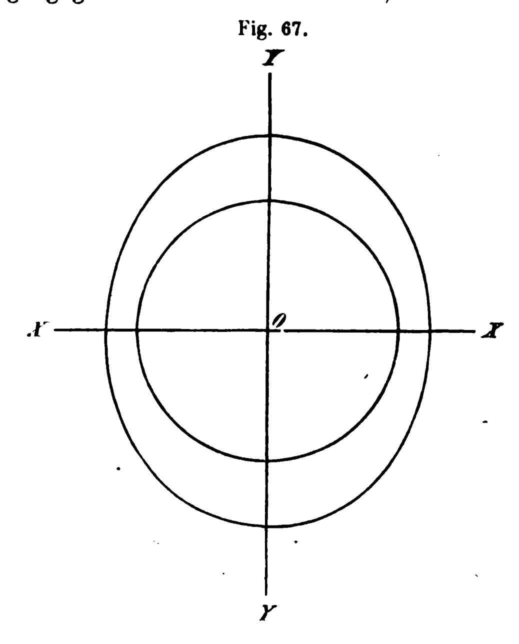
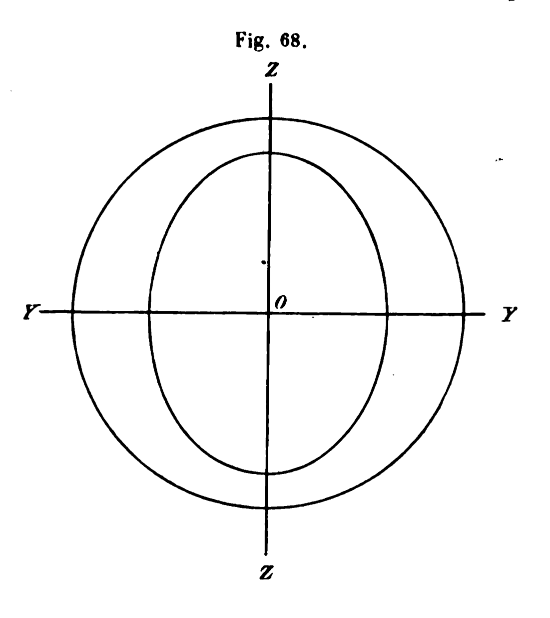


Fig. 68.



Im dritten Hauptschnitt *YOZ* endlich liefern alle Strahlen irgend welcher Richtung eine ordentliche Welle, welche senkrecht zum Hauptschnitt, also parallel *OX* schwingt, folglich sich nach allen Seiten mit der grössten Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt, d. h. bis zu einem Kreise, dessen Durchmesser proportional v_a. Die ausserordentliche, im Hauptschnitt schwingende Welle hat die Schwingungsrichtung *OZ*, wenn sie sich || *OY* fortpflanzt, also die kleinste Lichtgeschwindigkeit v_c; die

nach OZ sich fortpflanzende schwingt parallel OY, hat also die mittlere Geschwindigkeit v_b. Die Durchschnittsfigur der Wellenfläche mit dem dritten Hauptschnitt ist also ein Kreis, dessen Durchmesser $= v_a$, und eine Ellipse, deren grosse und kleine Axe v_b und v_c sind, welche also gänzlich innerhalb des Kreises liegt, s. Fig. 68.

Um einen mehr zusammenhängenden Eindruck (soweit dies ohne ein Modell möglich ist) von der aus der Theorie abgeleiteten Gestalt der ganzen Wellenfläche zu geben, bis zu welcher sich also nach einer bestimmten Zeit eine in der Mitte beginnende Lichtbewegung von einer bestimmten Farbe fortgepflanzt hat, möge das perspectivische Bild Fig. 69 dienen, in welchem der innerhalb der innersten Schale liegende Raum schraffirt, der zwischen beiden Schalen liegende dagegen weiss gelassen ist. Die Gestalt der Wellenfläche ist vollständig bestimmt, wenn man die grösste, mittlere und kleinste Lichtgeschwindigkeit und deren Richtungen im Krystall kennt. Deren Bestimmung vorausgesetzt (die Methoden derselben werden im nächsten §. besprochen), können wir die Richtung, in welcher jeder beliebig gerichtete, in den Krystall eintretende Strahl gebrochen wird, vermittelst der Huyghens'schen Construction ebenso bestimmen, wie dies S. 58 f. für einaxige Krystalle geschehen ist. Führt man die Construction aus für einen Strahl, dessen Einfallsebene mit einem der drei Hauptschnitte zusammenfällt, z. B. für die parallelen Strahlen DB bis CO (deren Wellenebene OE), Fig. 70, und deren Einfallsebene $\parallel YOZ$ ist, so werden die Wellenebenen der beiden durch Doppelbrechung entstehenden Lichtbewegungen im Moment, in wel-

Fig. 69.

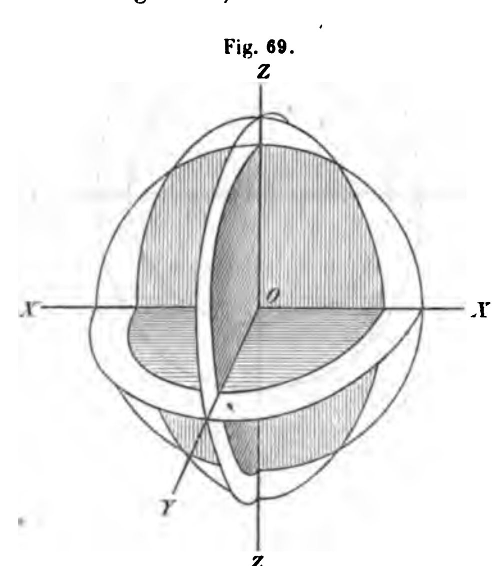
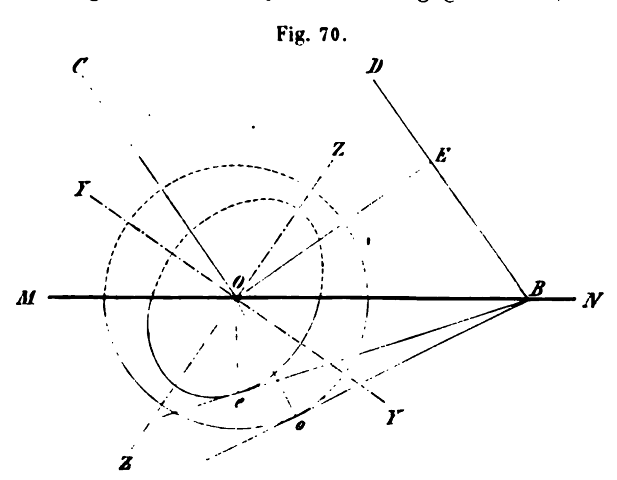


Fig. 70.



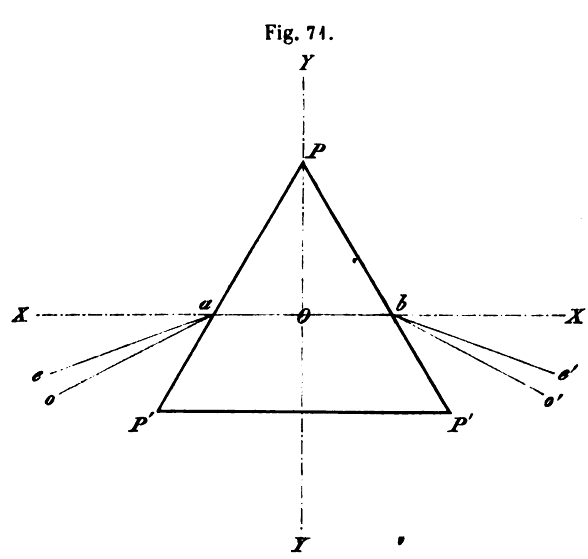
chem *DB* in den Krystall eindringt, die Tangentialebenen von *B* aus an die beiden Schalen der Wellenfläche sein, und man sieht leicht, dass wegen der symmetrischen Gestalt der letzteren in Bezug auf den Hauptschnitt *YOZ*, die beiden Berührungspunkte *o* und *e* in demselben Hauptschnitt liegen, also auch die beiden Strahlen *Oo* und *Oe* zwar abgelenkt werden, aber den Hauptschnitt *YOZ* nicht verlassen. Ist jedoch die Einfallsebene keinem der drei Hauptschnitte parallel, so wird bei analoger Construction, wie vorher, der ihr parallele Durchschnitt der Wellenfläche diese in ungleiche Hälften theilen, so dass die vor und hinter der Ebene der Zeichnung liegenden Hälften nicht symmetrisch zu dieser Ebene liegen. Die Punkte, in welchen die Tangentialebenen, welche die gebrochenen Wellenebenen darstellen, die beiden Schalen der Wellenfläche berühren, liegen alsdann nicht mehr in der Zeichnungsebene, sondern vor oder hinter dieser. Die gebrochenen Strahlen sind demnach beide aus der Einfallsebene abgelenkt, d. h. keiner derselben folgt mehr dem Brechungsgesetz für gewöhnliches Licht, beide sind extraordinär. Einen ordinären Strahl (neben einem ausserordentlichen) erhalten wir also nur dann, wenn die Einfallsebene einem der drei Hauptschnitte parallel ist. Da man mittelst des Brechungsexponenten, der auf dem Brechungsgesetz beruht, die Lichtgeschwindigkeit im Allgemeinen nur von solchen Strahlen bestimmen kann, welche jenem Gesetze folgen, also von ordentlichen, so ist durch die soeben dargelegte Eigenschaft der zweiaxigen Krystalle zugleich die Methode angegeben, in einem solchen die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen.

§. 24. **Bestimmung der Brechungsexponenten zweiaxiger Krystalle.** Schleift man aus einem zweiaxigen Krystall ein Prisma, dessen brechende Kante parallel der Axe der grössten Elasticität ist, und lässt, wie es bei der Bestimmung von Brechungsquotienten üblich, Strahlen auf die eine Fläche desselben fallen, deren Einfallsebene senkrecht zur brechenden Kante steht, so ist diese Ebene parallel dem Hauptschnitt *YOZ*, es tritt demnach hier der Fall ein, dass die beiden im Prisma sich fortpflanzenden Strahlen im Hauptschnitt bleiben, und zwar der eine von ihnen als ordentlicher hindurchgeht; dieser schwingt nach S. 97 f. senkrecht zum Hauptschnitt *YOZ*, also parallel der Axe der grössten Elasticität, er bewegt sich also mit der grössten Lichtgeschwindigkeit $= v_a$. Stellen wir das Prisma so, dass dieser Strahl das Minimum der Ablenkung erfährt, so giebt uns letztere nebst dem brechenden Winkel des Prismas den kleinsten Brechungsexponenten α, d. h. das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Luft zu der grössten Lichtgeschwindigkeit im Krystall. Schleifen wir dagegen ein Prisma, dessen brechende Kante parallel der Axe der mittleren Elasticität ist, so wird dies in gleicher Weise einen ordinären Strahl liefern, der parallel der brechenden Kante schwingt, sich also mit mittlerer Geschwindigkeit durch das Prisma fortpflanzt. Dessen Brechungsexponent wird mit β bezeichnet. Endlich liefert uns ein drittes Prisma, dessen Kante parallel der Axe der kleinsten Elasticität ist,

den Brechungsexponenten γ des ordentlichen Strahls mit der Schwingungsrichtung OZ, d. h. den grössten Brechungsexponenten des Krystalls.

Die drei Brechungsindices α, β, γ der Strahlen, deren Schwingungsrichtung resp. parallel der Axe der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität ist, heissen die Hauptbrechungsquotienten. Da durch die Bestimmung dieser drei Werthe das Verhältniss der grössten, mittleren und kleinsten Lichtgeschwindigkeit im Krystall gegeben ist, so ist die Gestalt der Wellenfläche und damit die Geschwindigkeit jedes anderen Lichtstrahles bekannt.

Fig. 71.

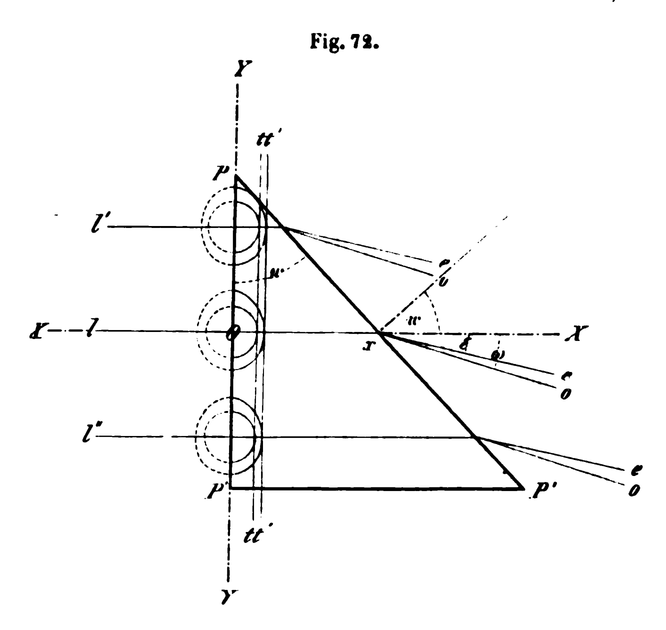


Die Bestimmung der drei Hauptbrechungsindices ist indess auch möglich mit Hülfe nur zweier Prismen, deren Kante ebenfalls je einer Elasticitätsaxe parallel, welche aber ausserdem noch so geschliffen sein müssen, dass der brechende Winkel von einem optischen Hauptschnitt des Krystalls genau halbirt wird. Sei z. B. $PP'P'$ Fig. 71 ein solches Prisma, dessen brechende Kante, senkrecht zur Zeichnungsebene, parallel der Axe der kleinsten Elasticität OZ ist, und dessen Seiten gleiche Winkel mit dem Hauptschnitt YOZ bilden. Ist die Einfallsebene des Lichtes die Ebene der Zeichnung, also der Hauptschnitt XOY, so pflanzen sich beide Strahlen in derselben Ebene fort; der ordinäre mit der senkrecht dazu stehenden Schwingungsrichtung OZ erfährt das Minimum der Ablenkung, wenn er im Prisma von a nach b läuft; er tritt in der Richtung oa ein und in derjenigen bo' aus dem Prisma aus. Drehen wir das letztere so, oder ändern wir den Ort der Lichtquelle derart, dass der extraordinäre Strahl seinerseits das Minimum der Ablenkung (welche in diesem Falle kleiner ist als beim ordinären) erleidet, so tritt er in der Richtung ea in das Prisma und parallel be' aus demselben, also durchläuft er es in derselben Richtung ab, wie vorher der ordentliche Strahl, d. h. in der Richtung XX. Alsdann ist aber seine Schwingungsrichtung offenbar $\parallel OY$, also seine Geschwindigkeit die mittlere v_b; wenn wir also für diese Stellung die Ablenkung messen und den zugehörigen Brechungsexponenten berechnen, so ist dieser genau $= \beta$. Da der ordentliche Strahl uns γ giebt (weil er die Schwingungsrichtung OZ hat), so erhalten wir mit Hülfe dieses einen Prismas zwei der

Hauptbrechungsquotienten. Fügen wir hierzu die Untersuchung eines zweiten Prismas, dessen Flächen parallel OX und gleichgeneigt gegen XOZ, so liefert dies in gleicher Weise α und γ; ein drittes, symmetrisch nach XOY, dessen Kante || OY, α und β. Es sind demnach nur zwei derartiger Prismen nöthig, um alle drei Hauptbrechungsindices zu bestimmen.

Dasselbe ist übrigens auch der Fall, wenn die Prismen noch in einer andern Richtung geschliffen sind, wenn nämlich eine der Seitenflächen zusammenfällt mit einem optischen Hauptschnitt des Krystalls. Sei $PP'P'$ Fig. 72 ein solches Prisma mit dem brechenden Winkel w, dessen Kante

Fig. 72.



parallel OZ und dessen linke Fläche || dem Hauptschnitt YOZ. Lässt man nun parallele Lichtstrahlen l, l', l'' u. s. f. genau senkrecht auf diese Fläche, also parallel XX, auffallen, so sind die im Prisma sich fortpflanzenden beiden Wellenebenen die Tangentialebenen tt und $t't'$ an die Wellenflächen, die von jedem Eintrittspunkt aus alle von gleichen Dimensionen zu construiren sind, weil die auffallende ebene Welle die Eintrittsstellen sämmtlich gleichzeitig trifft. Aus der Construction und der symmetrischen Gestalt der Wellenflächen zu den Hauptschnitten folgt unmittelbar, dass die beiden Tangentialebenen genau senkrecht zur Zeichnungsebene und einander, sowie der Eintrittsfläche des Lichtes genau parallel sind. Die beiden Strahlen erfahren also gar keine Ablenkung, sondern pflanzen sich beide || OX fort, wie in dem Prisma Fig. 71, folglich der eine mit der kleinsten Geschwindigkeit v_c, der andere mit der mittleren v_b, und werden bei ihrem Austritt in x demnach verschieden gebrochen, der eine nach o, der andere nach e. Bestimmt man die Ablenkungen beider aus ihrer ursprünglichen Richtung und bezeichnet diese mit ω und ε, so ist die erstere gleich dem Winkel

Xxo, die zweite gleich Xxe; wie aus Fig. 72 unmittelbar ersichtlich, sind die Brechungsexponenten der beiden Strahlen

$$\gamma = \frac{\sin(\omega + w)}{\sin w}$$
$$\beta = \frac{\sin(\varepsilon + w)}{\sin w}$$

Es sind also durch ein solches Prisma zwei Hauptbrechungsindices zu bestimmen; durch zwei verschiedene, deren eine Seite je einem andern Hauptschnitt parallel, somit alle drei.

Schliesslich ist die Bestimmung der drei Hauptbrechungsquotienten auch noch möglich mit Hülfe des Totalreflectometers, und bei dieser Methode ist sogar nur eine einzige Krystallplatte erforderlich, für welche nur eine Bedingung erfüllt sein muss, die nämlich, dass sie einer optischen Elasticitätsaxe parallel ist. Bringt man eine derartige Platte so in das Instrument, dass jene in ihr liegende Richtung mit der Einfallsebene des Lichtes zusammenfällt, so pflanzt sich, wenn die Platte bis zum Winkel der totalen Reflexion gedreht worden ist, das Licht in der Richtung der betreffenden Elasticitätsaxe fort, wird also in zwei Strahlen zerlegt, die parallel den beiden anderen Elasticitätsaxen schwingen; die Einstellung der doppelten Grenzen der totalen Reflexion liefert also zwei Hauptbrechungsquotienten. Dreht man nun die Platte in ihrer eigenen Ebene um 90° und befestigt sie in dieser Stellung an der Drehungsaxe des Instrumentes (letztere ist alsdann der in die Platte fallenden Elasticitätsaxe parallel), so wird die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes bei der totalen Reflexion zwar im Allgemeinen keiner Elasticitätsaxe parallel sein, da sie aber zu einer solchen senkrecht steht, liegt sie an einem Hauptschnitt; folglich schwingt einer von den beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen, der ordinäre, parallel der Elasticitätsaxe, welche im ersten Falle Fortpflanzungsrichtung war, und die Einstellung der zu diesem Strahl gehörigen Grenze der totalen Reflexion giebt also den dritten Hauptbrechungsquotienten. Um die beiden Grenzen von einander zu unterscheiden, bringt man vor das Fernrohr des Totalreflectometers ein Nicol'sches Prisma, dessen Hauptschnitt senkrecht steht. Dieses lässt nur den vertical schwingenden Strahl hindurch, also erscheint nur diejenige Grenze der totalen Reflexion, welche den gesuchten dritten Hauptbrechungsexponenten liefert.*) Es ist leicht zu übersehen, dass man bei Anwendung einer Platte, welche einem optischen Hauptschnitt parallel ist, jedesmal zwei Hauptbrechungsquotienten erhält, wenn man die Platte so orientirt, dass einmal die eine, das andere Mal die andere von den beiden in der Ebene der Platte liegenden Elasticitätsaxen bei der

*) Es braucht nach den Auseinandersetzungen S. 64—65 kaum bemerkt zu werden, dass bei jeder Bestimmung der Brechungsexponenten eines doppeltbrechenden Körpers die Schwingungsrichtungen der einzelnen Strahlen durch ein Nicol'sches Prisma bestimmt werden.

totalen Reflexion Fortpflanzungsrichtung des Lichtes wird; mit einer solchen Platte kann man also nicht nur alle drei Hauptbrechungsindices, sondern den einen sogar doppelt bestimmen. Von besonderem Interesse sind die Erscheinungen, welche eine parallel der optischen Axenebene geschnittene Krystallplatte im Totalreflectometer zeigt, wenn man dieselbe in ihrer eigenen Ebene drehbar macht. Geht man alsdann von der Richtung einer Elasticitätsaxe aus, so erblickt man zwei Grenzen der totalen Reflexion; dreht man nun die Platte in ihrer Ebene, so nähern sich diese beiden Grenzen einander, weil die beiden in der Grenzschicht der Platte sich fortpflanzenden Strahlen immer weniger verschiedene Geschwindigkeit besitzen; ist die Platte so weit gedreht, dass eine optische Axe Fortpflanzungsrichtung wird, so fallen die beiden Grenzen der totalen Reflexion zusammen, und man erblickt im Gesichtsfeld, ausser der dem ordentlichen Strahl entsprechenden senkrechten Grenze, die, letztere in der Mitte unter spitzem Winkel durchkreuzende, zweite Grenze der totalen Reflexion. Wenn der Durchkreuzungswinkel nicht allzu spitz, d. h. wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ausserordentlichen Strahls sich mit der Richtung rasch ändert (der Krystall eine starke Doppelbrechung besitzt), so bringt demnach eine Drehung der Platte in ihrer eigenen Ebene um 360⁰ nach und nach den ganzen Durchschnitt der Wellenfläche mit dem Hauptschnitt XZ s. Fig. 63, worin natürlich das Verhältniss $v_a : v_c$ stark übertrieben dargestellt ist) zur Anschauung. Auf Grund dieser Methode hat W. Kohlrausch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in zahlreichen Richtungen innerhalb der drei optischen Hauptschnitte der Weinsäure (s. diese) gemessen und die Gestalt der Wellenfläche vollständig übereinstimmend mit der Fresnel'schen Theorie gefunden.

Durch die Kenntniss der drei Hauptbrechungsquotienten, nach welcher der angegebenen Methoden dieselben auch bestimmt worden seien, ist das Verhältniss der grössten, mittleren und kleinsten Lichtgeschwindigkeit gegeben und somit die Gestalt der Wellenfläche, d. h. auch der Winkel der optischen Axen.

Bezeichnen wir mit V den Winkel, welchen eine optische Axe mit der Axe der kleinsten Elasticität (der Schwingungsrichtung der kleinsten Lichtgeschwindigkeit) bildet, so folgt nämlich aus der Gleichung der Elasticitätsfläche, resp. der Wellenfläche:

$$\cos V = \sqrt{\frac{e_b - e_c}{e_a - e_c}} = \sqrt{\frac{v_b^2 - v_c^2}{v_a^2 - v_c^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}}} .$$

Aus dieser Gleichung finden wir demnach den optischen Axenwinkel, wenn α, β und γ bestimmt worden sind.*) Hat man dagegen V selbst

*) Da $\cos 45^0 = V\frac{1}{2}$, so folgt aus obiger Formel, dass V kleiner als 45⁰, d. h. dass die Axe der kleinsten Elasticität erste Mittellinie der optischen Axen ist, wenn der

auf eine weiterhin zu erörternde Weise gemessen und ausserdem nur zwei von den drei Hauptbrechungsquotienten (wenn z. B. die Ausbildung der Krystalle die Anfertigung von Prismen nur nach einer Richtung gestattet), so kann man mittelst derselben Gleichung den dritten Brechungsindex berechnen.

Wir nennen diejenigen Zahlen, durch welche die optischen Eigenschaften eines Krystalls vollständig gegeben sind, die optischen Constanten desselben; bei einem zweiaxigen Krystall sind dies: die Richtungen der drei Axen der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität im Krystall und die Grösse der drei Hauptbrechungsexponenten. Die letzteren sind natürlich andere, wenn das benutzte Licht eine andere Farbe besitzt, und zwar ist die Aenderung mit der Schwingungsdauer für jeden der drei Hauptbrechungsindices eine andere, d. h. die Constanten der Cauchy'schen Dispersionsformel besitzen für α, β und γ verschiedene Werthe; in Folge dessen stehen die Werthe der grössten, mittleren und kleinsten Lichtgeschwindigkeit für eine andere Farbe auch in einem anderen Verhältniss, d. h. die Wellenfläche hat für die letztere eine andere Gestalt, die optischen Axen haben einen andern Winkel, der bei einer Substanz mit der Wellenlänge des Lichtes wächst, bei einer andern abnimmt. Es sind die Brechungsindices α, β und γ daher stets für mehrere Farben zu bestimmen. Was die Lage der drei Hauptschwingungsrichtungen (die der Axen der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität) im Krystall betrifft, so kann dieselbe für verschiedene Farben die gleiche oder eine verschiedene sein. Bestimmt wird dieselbe durch Interferenzerscheinungen, welche zweiaxige Krystallplatten in gewissen Richtungen zeigen, daher diese jetzt zunächst zu besprechen sind.

§. 25. Interferenzerscheinungen zweiaxiger Krystallplatten.

a) Interferenzerscheinungen im parallelen Licht. Eine planparallele Krystallplatte, welche genau senkrecht zu einer der beiden optischen Axen geschliffen ist, wird, im parallelen Licht zwischen gekreuzten Nicols betrachtet, beim Drehen in ihrer Ebene keinen Wechsel zwischen Hell und Dunkel zeigen, da sie nur von Strahlen durchsetzt wird, welche einer Axe parallel gehen, also keine Doppelbrechung erleiden. Dagegen wird eine Platte, nach irgend einer anderen Richtung geschliffen, jeden einfallenden Strahl in zwei normal zu einander schwingende zerlegen. Da im vorliegenden Falle der Strahl stets senkrecht einfällt, so werden die Schwingungsrichtungen der beiden entstehenden Bewegungen parallel der Ebene der Platte sein. Sind nun die Nicols gekreuzt und dreht man die

Zähler des unter dem Wurzelzeichen stehenden Bruches mehr als die Hälfte des Nenners beträgt; dies ist aber der Fall, wenn der mittlere Brechungsexponent β dem kleinsten α näher liegt, als dem grössten γ, d. h. bei den positiven Krystallen. Umgekehrt ist V grösser als 45°, wenn β dem grössten Brechungsindex näher liegt, d. h. bei den negativen Krystallen, deren stumpfer Axenwinkel durch die Axe der kleinsten Elasticität halbirt wird.

Platte in ihrer Ebene so weit, dass je eine solche Schwingungsrichtung der Polarisationsebene eines Nicols parallel ist (derartiger Stellungen giebt es offenbar vier, vergl. die ganz analoge Erscheinung bei einaxigen Krystallen S. 72 f.), so erscheint die Platte dunkel. Kennt man nun die Richtung der Polarisationsebenen der beiden Nicols, so sind auch die Schwingungsrichtungen*) der beiden Strahlen in der Platte gegeben, denn sie sind in der Stellung, in welcher die Platte dunkel erscheint, jenen parallel. Eine Platte, parallel einem optischen Hauptschnitt, muss, wie die Erörterungen des §. 22 zeigen, stets zwei Schwingungsrichtungen liefern, welche den der Platte parallelen optischen Elasticitätsaxen entsprechen; eine Platte, welche nur einer solchen Axe parallel ist, giebt stets eine Schwingung in der Richtung der letzteren, die zweite dazu senkrecht. Die Schwingungsrichtungen einer beliebigen, gegen alle drei optischen Elasticitätsaxen schief geneigten Platte findet man auf Grund des S. 91 mitgetheilten Satzes in folgender Weise: man denke sich je eine Ebene durch den einfallenden Strahl, d. i. die Normale der Platte, und eine der optischen Axen gelegt; die beiden so erhaltenen Ebenen schneiden die Ebene der Platte in zwei, im Allgemeinen einen schiefen Winkel bildenden Geraden; die Halbirungslinien des spitzen und des stumpfen Winkels dieser Geraden sind die Schwingungsrichtungen der Platte.**)

Da offenbar die S. 72 f. über die Erscheinungen bei einer schräg gegen die Axe geschnittenen einaxigen Platte angestellten Betrachtungen für jeden doppeltbrechenden Körper gelten, so muss auch eine zweiaxige Krystallplatte von beliebiger Orientirung beim Drehen um 360° nicht nur viermal dunkel, sondern auch in den Zwischenstellungen farbig erscheinen, wenn sie sehr dünn ist. Die entstehende Farbe muss sich mit der Dicke ändern und bei einer Platte von bestimmter Dicke in das Weiss der höheren Ordnung übergehen. Da die Stelle, bei welcher dies stattfindet, abhängt von der Geschwindigkeitsdifferenz der beiden im Krystall senkrecht zu einander polarisirten Strahlen, so muss es bei einer andern Dicke eintreten, wenn die Richtung der Platte eine andere ist. Während die Erscheinung bei den einaxigen Krystallen mit derselben Dicke eintritt für alle Platten, welche gleichen Winkel mit der Axe einschliessen, ist hier diese Regelmässigkeit nicht mehr vorhanden. Ebenso wenig zeigen natürlich zwei Platten von gleicher Dicke, aber verschiedener Richtung, gleiche Farbe. Da die Phasendifferenz der beiden durch die Doppelbrechung ent-

*) Eine genaue, hierauf beruhende Methode (die stauroskopische) zur Bestimmung der Schwingungsrichtungen soll an einer spätern Stelle auseinandergesetzt werden.

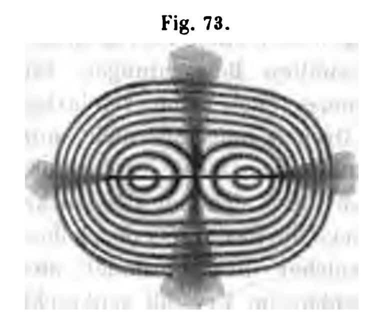
**) Umgekehrt kann man aus den Schwingungsrichtungen einer Platte von bekannter Orientirung gegen die Elasticitätsaxen auf die Lage der optischen Axen schliessen. Liebisch hat neuerdings die Formeln entwickelt, nach denen man aus den Schwingungsrichtungen und den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden, einer solchen Platte parallelen ebenen Wellen die drei Hauptbrechungsindices berechnen kann (Zeitschr. f. Kryst. 7, 433).

stehenden Strahlen am grössten ist, wenn der eine parallel der Axe der grössten, der andere parallel der Axe der kleinsten Elasticität schwingt, so wird bei einer Platte, bei welcher dies stattfindet, nämlich einer der optischen Axenebene parallelen, die geringste Dicke nöthig sein, um das Weiss der höheren Ordnung hervorzubringen.

b) Interferenzerscheinungen im convergenten Licht. Dünne Platten zweiaxiger Krystalle werden, wie schräg gegen die Axe geschliffene einaxige, im einfarbigen Licht Curven gleicher Helligkeit, im weissen solche gleicher Farbe (isochromatische) zeigen, bei Ueberschreitung einer gewissen Dicke das Weiss der höheren Ordnung. Platten, senkrecht zu einer optischen Axe, werden bei gekreuzten Nicols helle und dunkle Ringe, welche aber nicht kreisförmig, sondern elliptisch sind, die Mitte des Gesichtsfeldes umgebend, zeigen.

Von praktischer Wichtigkeit sind hier nur diejenigen Interferenzerscheinungen, welche eine Platte zeigt, deren Ebene senkrecht zur ersten Mittellinie (der Halbirenden des spitzen Winkels der optischen Axen) steht. Betrachten wir dieselbe in homogenem Licht bei gekreuzten Nicols in einer Stellung, bei welcher ihre optische Axenebene parallel der Polarisationsebene eines der beiden Nicols ist, so erblicken wir folgende Erscheinung (Fig. 73). Durch die Mitte des Gesichtsfeldes geht ein schwarzes Kreuz, dessen zwei gegenüberliegende Arme, welche der Axenebene parallel sind, ungleich schmäler und schärfer begrenzt erscheinen, als die senkrecht dazu stehenden, mehr verwaschenen. Die beiden, beiderseits gleichweit von der Mitte des Gesichtsfeldes abstehenden Punkte, wo die in der Richtung je einer optischen Axe durch den Krystall gehenden Strahlen sich vereinigen, sind umgeben von ovalen, dunklen und hellen Ringen, von denen zwei von einem gewissen Abstande die Form einer 8 besitzen, und welche in noch grösserem Abstand die Gestalt der äussersten in Fig. 73 dargestellten Curven haben. Diese krummen Linien, in vorliegendem Falle solche gleicher Helligkeit, werden Lemniscaten genannt. Lässt man die gekreuzte Stellung der Nicols ungeändert, dreht aber die Krystallplatte in ihrer eigenen Ebene, so ändern sich die Ringe gar nicht, sie drehen sich nur einfach mit der Platte, dagegen verwandeln sich die vorher geradlinigen Kreuzesarme in zwei Hyperbeln, welche bei geringer Drehung wie Fig. 74, bei 45° Drehung wie Fig. 75 erscheinen, dabei aber immer durch die beiden Mittelpunkte der Ringsysteme gehen.

Fig. 73.



Diese Interferenzerscheinungen erklären sich in ganz ähnlicher Weise, wie bei den einaxigen Krystallen. Alle Strahlen, welche parallel der einen oder der andern optischen Axe durch den Krystall gehen, welche

also in den Polpunkten der beiden Ringsysteme sich vereinigen, erleiden in der Platte keine Doppelbrechung, also müssen jene beiden Punkte dunkel sein. Dieselben sind um so näher der Mitte des Gesichtsfeldes, je kleiner der Winkel der optischen Axen, um so näher dem Rande, je

Fig. 74.

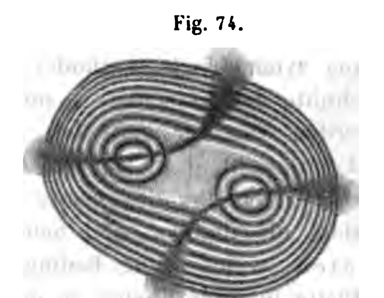
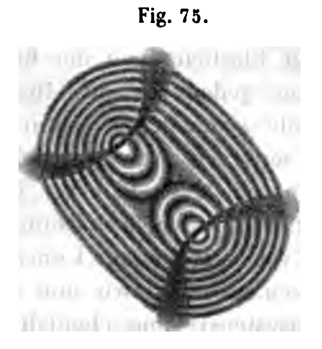


Fig. 75.

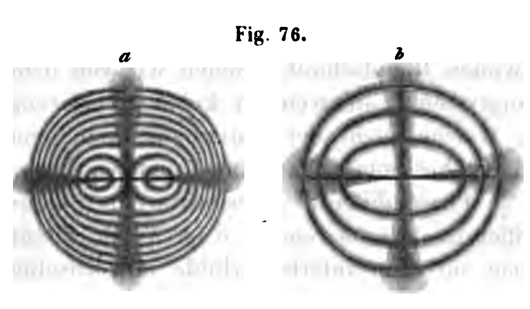


grösser derselbe ist. Ihr Abstand von einander ist ein Maass jenes Winkels. Da der optische Axenwinkel (für eine bestimmte Farbe) bei allen Krystallen einer Substanz derselbe ist, so bleibt auch der Abstand der Mittelpunkte der beiden Ringsysteme derselbe, mag die Platte dick oder dünn sein, wenn sie nur aus demselben Material besteht. Die senkrecht zur Platte durch die Verbindungsgerade der beiden Axenpunkte gelegte Ebene ist derjenige Hauptschnitt, welchen wir die optische Axenebene genannt haben. Alle in dieser Ebene den Krystall durchsetzenden Strahlen werden in zwei zerlegt, von denen einer im Hauptschnitt, der andere senkrecht dazu schwingt. Steht nun die Polarisationsebene des einen Nicols parallel diesem Hauptschnitt, die des andern senkrecht dazu, so wird von jenen beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen wegen des Polarisators nur einer zu Stande kommen, derselbe aber von dem Analysator vollständig verlöscht werden, folglich muss in diesem Falle durch die Mitten der beiden Ringsysteme ein geradliniger, scharf begrenzter, horizontaler (Fig. 73) dunkler Balken gehen. Ebenso erklärt sich der zweite, verticale schwarze Balken, auf welchem sich alle die Strahlen vereinigen, welche den Krystall durchsetzen in der Ebene, senkrecht zur Platte und zur Axenebene, also in dem zweiten Hauptschnitt. Gehen wir von dem Mittelpunkt eines der beiden Ringsysteme, in welchen keine Interferenz stattfindet, nach einer Richtung, welche nicht der optischen Axenebene parallel ist, aus, so werden in einem bestimmten Abstand diejenigen Strahlen sich vereinigen, welche mit $\frac{1}{2}\lambda$ Phasendifferenz interferiren, in grösserem Abstand die mit λ Phasendifferenz interferirenden u. s. f.; in dieser Richtung fortschreitend, muss man auf dem Interferenzbilde abwechselnd Minima und Maxima der Helligkeit treffen. Aendert man aber jetzt die Richtung, in der man von der Mitte ausgeht, so ändert sich damit auch die Differenz der Geschwindigkeit der beiden entstehenden Strahlen bei

demselben Abstande, man erhält somit dieselbe Phasendifferenz, also dasselbe Minimum oder Maximum, bei einem andern Abstande von der Mitte. Während also bei einem einaxigen Krystall die Punkte gleicher Helligkeit auf Kreisen liegen, weil die Aenderung der Elasticität mit der Neigung nach allen Richtungen rings um die Axe gleichartig stattfindet, — müssen hier ovale Curven gleicher Helligkeit entstehen; da aber die Aenderung der Elasticität mit der Richtung symmetrisch stattfindet zu beiden Seiten eines jeden der drei Hauptschnitte des Krystalls, so müssen auch diese Ovale symmetrisch halbirt werden von der optischen Axenebene und dem senkrecht dazu stehenden Hauptschnitt, d. h. von den Richtungen der beiden schwarzen Balken. In der That ergiebt die Theorie in Uebereinstimmung mit der Beobachtung, dass die dunklen und hellen Curven die Form von sogenannten Lemniscaten, welche jene Bedingung erfüllen, besitzen. Drehen wir nun die Platte in ihrer Ebene, so müssen sich die Lemniscatensysteme ebenfalls drehen, da das Zustandekommen derselben ja an bestimmte Richtungen im Krystall geknüpft ist und die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte immer parallel der optischen Axenebene desselben bleiben muss. Die Punkte des Interferenzbildes jedoch, in denen sich die Strahlen vereinigen, deren Schwingungsrichtungen parallel der Polarisationsebene eines Nicols sind und welche daher vollkommen vernichtet werden, liegen nun nicht mehr auf zwei sich rechtwinkelig kreuzenden Geraden, sondern auf zwei Hyperbelzweigen, welche natürlich je durch einen Mittelpunkt der Ringsysteme gehen müssen.

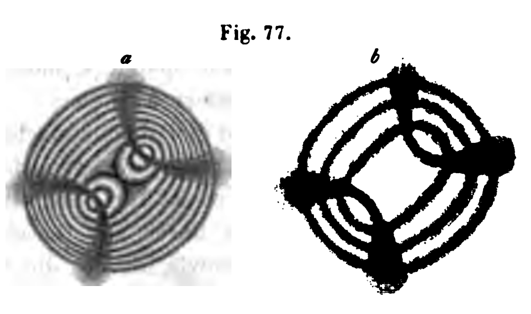
Wenden wir, bei unveränderter Farbe des benutzten Lichtes, eine dickere Platte derselben Substanz an, so müssen das schwarze Kreuz oder die Hyperbeln, sowie der Abstand der beiden Ringcentren, nach dem Bisherigen ganz unverändert bleiben. In einem bestimmten Abstand von der Mitte eines Ringsystems wird zwar die Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Strahlen dieselbe, wie vorher, aber wegen des längeren Weges im Krystall ihre Phasendifferenz grösser sein; an der Stelle, wo bei Anwendung der dünneren Platte also der erste dunkle Ring erschien, tritt bei der dickeren bereits der zweite oder dritte auf. Es wird also die Weite der Ringe um so kleiner sein, je dicker die Platte, um so grösser, je dünner letztere ist. Es wird demnach bei einer bestimmten geringen Dicke einer Platte, deren optischer Axenwinkel klein ist, der Fall eintreten, dass auch die innerste Lemniscate nicht mehr aus zwei getrennten Ovalen besteht, sondern in einer ellipsenähnlichen Form beide Centren umgiebt, wie eine der äussersten Lemniscaten bei dicker Platte. Fig. 76 *b* stellt das Interferenzbild einer so dünnen Platte

Fig. 76.



dar, verglichen mit dem einer dickeren von derselben Substanz, Fig. 76*a*, beide unter Parallelismus der Axenebene mit einem Nicol, während in Fig. 77*a* und *b* das Interferenzbild bei einer Drehung derselben Platten um 45° erscheint.

Fig. 77.



Da die Weite der Ringe von der Differenz der Geschwindigkeit, mit welcher sich die beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen im Krystall fortpflanzen, abhängt, so ist dieselbe, ebenso wie bei den optisch einaxigen, auch bei derselben Dicke verschieden bei verschiedenen Substanzen, d. h. abhängig von der Stärke der Doppelbrechung. Die Ringe sind weiter bei einer Platte, welche aus einer Substanz von geringer Doppelbrechung besteht, als diejenigen, welche eine gleich dicke Platte eines mit stärkerer Doppelbrechung begabten Körpers zeigt.

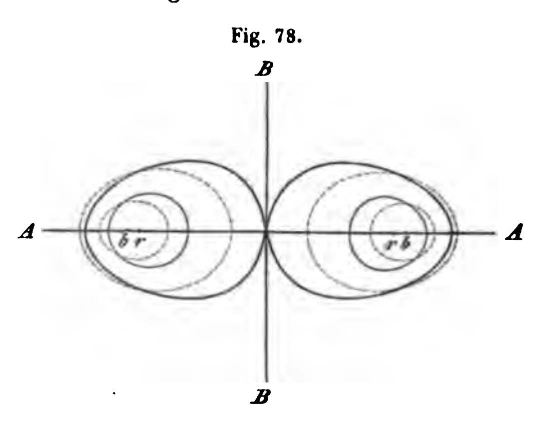
Endlich hängt die Weite der Ringe, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht, noch ab von der Wellenlänge des angewandten Lichtes, ist diese grösser, so sind sie weiter von einander abstehend, und umgekehrt. Aus diesem Grunde fallen die dunklen Ringe für die verschiedenen Farben an verschiedene Stellen; wird die Platte also im weissen Licht untersucht, so werden farbige Ringe entstehen, deren Erklärung ganz dieselbe ist, wie bei den einaxigen Krystallen. Während aber bei letzteren die dunklen Ringe für die verschiedenen Farben sich einfach als concentrische Kreise übereinanderschieben, demnach die isochromatischen Curven wieder Kreise mit demselben Mittelpunkt (dem Ort der optischen Axe) sind, fallen bei den zweiaxigen die Mittelpunkte der Ringsysteme für die verschiedenen Farben nicht zusammen, weil die denselben entsprechenden Winkel der optischen Axen nicht gleich sind. Dadurch sind die Farbenerscheinungen complicirtere, dies aber wieder in verschiedenem Grade, je nachdem die Richtungen der grössten, kleinsten und mittleren Lichtgeschwindigkeit im Krystall für die verschiedenen Farben zusammenfallen oder nicht. Bei denjenigen zweiaxigen Krystallen, bei denen diese drei Richtungen verschiedene sind für verschiedene Farben, sind es also auch die Axenebenen; bei einem solchen Krystall kann eine Platte demnach nur senkrecht zur ersten Mittellinie für eine Farbe stehen; wenn man diese allein benutzt, wird also das Lemniscatensystem genau die Mitte des Gesichtsfeldes zum Mittelpunkt haben, beleuchtet man aber mit einer anderen Farbe, so werden nicht nur die Ringe andere Weite und die Mittelpunkte derselben einen anderen Abstand haben, sondern das ganze Bild wird auch im Gesichtsfeld verschoben sein. Im weissen Lichte werden also Farbencurven entstehen, welche zwar den Lemniscaten ähnlich sind, wenn

die Abweichung der optischen Mittellinien für verschiedene Farben höchstens einige Grade beträgt, wie das gewöhnlich der Fall ist, in welchen aber die Farbenfolge im Einzelnen eine unsymmetrische ist, so dass weder die rechte Seite des Interferenzbildes symmetrisch ist zur linken, noch die obere zur unteren. Die verschiedenen Fälle von Asymmetrie, welche hier möglich sind, können erst später (s. monosymmetrisches und asymmetrisches Krystallsystem) erörtert werden.

Bleiben wir zunächst bei dem einfachsten Falle stehen, dass die drei Elasticitätsaxen, folglich auch die optische Axenebene, für alle Farben gleiche Richtung haben, so ist für jede einzelne Farbe das Interferenzbild symmetrisch zu halbiren durch die Gerade, welche die beiden optischen Axenpunkte verbindet, sowie durch die Gerade, welche jene im Mittelpunkt des Gesichtsfeldes senkrecht schneidet, d. h. durch die beiden schwarzen Balken, welche erscheinen, wenn die Axenebene einem Nicol parallel ist. Da diese Symmetrielinien für alle Farben zusammenfallen, so erscheint im weissen Licht ein Interferenzbild, welches ebenfalls durch dieselben Geraden symmetrisch halbirt wird, d. h. dessen obere Hälfte genau gleich der unteren (in umgekehrter Lage), dessen rechte Seite ebenso gleich der linken ist, s. Fig. 3 der Tafel. Vergleichen wir in diesem Bilde die verschiedenen Stellen einer Lemniscate, z. B. des ersten, die eine optische Axe umgebenden, Farbenringes, so sehen wir, dass sie nicht gleich gefärbt sind, dass die nach der Mitte des Gesichtsfeldes zugekehrte Seite (auch der folgenden Ringe) eine andere Farbenfolge besitzt, als die nach aussen gekehrte, während die obere Hälfte genau gleich und entgegengesetzt der unteren ist. Dies erklärt sich einfach durch den Umstand, dass die Mitten der Ringsysteme für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen. Sei z. B. *AA* Fig. 78 die Richtung der Axenebene (für alle Farben), *BB* die des senkrecht dazu stehenden Hauptschnittes und *rr* die beiden Axenpunkte für Roth, *bb* für Blau, wobei natürlich der Abstand *rb* zu beiden Seiten gleich gross sein muss, weil die Mittellinien der Axen für beide Farben im Mittelpunkte des Bildes zusammenfallen, so mögen die ausgezogenen Curven die dunklen Lemniscaten für Roth, die punktirten diejenigen für Blau sein. Geht man nun von der Mitte eines der beiden Ringsysteme aus, so zeigt die Figur, wenn man nach der Mitte hin sich bewegt, dass zuerst Blau vernichtet wird, erst in grösserem Abstande Roth; dass dagegen, wenn man nach aussen geht, die Auslöschung in umgekehrter Reihenfolge stattfindet. Im weissen Lichte muss also bei einem derartigen Krystall die Farbenfolge des innersten Ringes nach diesen beiden Seiten hin gerade entgegengesetzt sein; ist die Entfernung (Dispersion) der Axen, *rb*, nicht so gross, so muss jene Farbenfolge wenigstens eine verschiedene sein. Die Fig. 78 zeigt ferner, dass die obere Hälfte der Farbenringe genau gleich und entgegengesetzt der unteren sein muss, weil die Verschiebung genau in der Geraden *AA* stattfindet, und dass das rechte Ringsystem ebenso gleich und entgegengesetzt dem linken sein muss, weil die gegen-

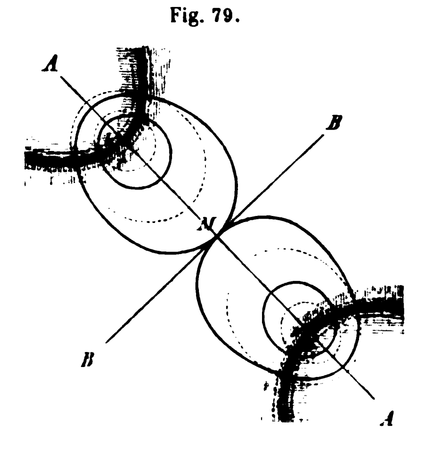
seitige Verschiebung der Ringe zu beiden Seiten der Geraden *BB* stets gleichartig vor sich gehen muss, so dass diese letztere die Systeme für alle Farben genau halbirt. Die Erscheinungen müssen sich demnach so zeigen, wie es die Fig. 3 der Tafel darstellt, auf der die einander zugewandten (inneren) Seiten zweier entsprechender Farbenringe gleich, die nach aussen gewandten ebenfalls gleich, aber mit anderer Farbe, gefärbt sind.

Fig. 78.



Dreht man die Krystallplatte so in ihrer Ebene, dass die Axenebene 45° mit den Nicols bildet, so erscheinen bekanntlich die schwarzen hyperbolischen Büschel, welche durch die Axenpunkte gehen. Sei, wie in Fig. 78, so auch in der dieser Stellung entsprechenden Fig. 79 *AA* die Axenebene, *rr* und *bb* die Axenpunkte für Roth und Blau, die ausgezogenen und die punktirten Curven die dunklen Lemniscaten für dieselben Farben, so sieht man, dass die im Weiss entstehenden Farbenringe ganz dieselben sein müssen, als die in der vorigen Stellung der Platte. Betrachten wir dagegen die dunklen Hyperbeln, so können diese nicht zusammenfallen, da sie für jede Farbe durch die Axenpunkte gehen müssen. In der Fig. sind die beiden im einfachen rothen Lichte erscheinenden Hyperbeln vertical, die für Blau horizontal schraffirt angegeben, und daraus sogleich zu ersehen, dass dieselben sich für die verschiedenen Farben, da die für die übrigen Farben zwischen jenen liegen, theilweise decken, und zwar um so mehr, je kleiner der Abstand *rb* ist, d. h. je weniger die optischen Axenwinkel für die verschiedenen Farben von einander abweichen. Da, wo die Hyperbeln für alle Farben aufeinander fallen, also in der Mitte der hyperbolischen Streifen, wird vollständige Dunkelheit entstehen, nicht so jedoch an beiden Rändern, wo die Auslöschung nur für einen Theil der Farben stattfindet. Die Ränder müssen daher farbig gesäumt erscheinen, wie aus Fig. 4 der Tafel zu ersehen, während die schwarzen Balken bei der ersten Stellung Fig. 3 der Tafel Nichts dergleichen zeigen können. Die Farbensäume der dunklen Hyperbeln sind um so breiter und

Fig. 79.



um so lebhafter gefärbt, je weniger Farben es sind, für welche an einer Stelle die Hyperbeln noch übereinander fallen, d. h. je grösser die Dispersion der Axen, die Verschiedenheit der Axenwinkel für die verschiedenen Farben, ist. Erreicht diese eine solche Grösse, dass auch in der Mitte der hyperbolischen Streifen diese sich nicht mehr für alle Farben decken, so erscheint auch dort kein Schwarz, die Hyperbeln bestehen nur aus Farbenstreifen in bestimmter Reihenfolge von innen nach aussen. Diese Folge muss zugleich den Sinn der Dispersion der Axen erkennen lassen, d. h. ob deren Winkel für die Strahlen des rothen Endes im Spectrum kleiner ist, als für die des violetten Theiles (abgekürzt bezeichnet $\varrho < v$), oder umgekehrt ($\varrho > v$). In Fig. 79 und Fig. 4 der Tafel ist das Interferenzbild eines Krystalls der ersteren Art dargestellt; in diesem erscheint das rothe Licht vollständig ausgelöscht auf den beiden durch die Punkte *rr* gehenden Hyperbeln, ebenso die dem Roth benachbarten Theile des Spectrums (oder wenigstens sehr an Intensität geschwächt), nicht aber die Farben vom andern Ende des Spectrums, nämlich Blau und Violett, welche erst an den mit *bb* bezeichneten Stellen ausgelöscht werden; diese Farben werden also auf den der Geraden *BB* zugewandten Seiten der beiden Hyperbeln als Saum derselben auftreten, an der nach aussen gewendeten concaven dagegen wird ein rother Saum erscheinen, weil hier die blauen Strahlen vollkommen vernichtet werden. Diese Farbensäume treten stets am deutlichsten hervor an dem innerhalb des innersten Farbenringes liegenden Theile der Hyperbeln, wo dieselben am schärfsten begrenzt erscheinen. Beobachtet man daselbst, dass die Innenseite (d. h. die nach der Mitte des Gesichtsfeldes gewendete Seite) der Hyperbeln blau, die Aussenseite roth gefärbt erscheint (s. Fig. 4 der Tafel), so hat man es mit einem Krystall zu thun, dessen optischer Axenwinkel für Roth kleiner ist, als für Blau (Sinn der Dispersion $\varrho < v$), ist dagegen die Innenseite roth, die Aussenseite blau, so ist der Sinn der Dispersion $\varrho > v$, der Axenwinkel für Roth grösser, als für Blau. Je lebhafter und je breiter die Farbensäume sind, desto grösser ist die Stärke der Dispersion. Da der optische Axenwinkel für dieselbe Farbe bei allen Krystallen einer und derselben Substanz gleich ist, so gilt dies auch sowohl für den Sinn, als für die Stärke der Dispersion.

Es giebt Krystalle (Brookit = TiO^2, mellithsaures Ammon u. a.), deren drei Hauptbrechungsindices sich mit der Farbe so ungleich ändern, dass für eine bestimmte Farbe z. B. der vorher kleinste gleich dem mittleren wird, und für noch mehr abweichende Schwingungsdauer diese beiden ihre Rollen tauschen. In Krystallen mit so starker Dispersion muss die Axenebene für einen Theil des Spectrums ein Hauptschnitt, für den andern Theil einer der beiden andern, also senkrecht dazu stehen, für eine bestimmte dazwischenliegende Farbe muss der Krystall einaxig*) sein. Fällt die

*) Ein solcher Krystall ist trotzdem nicht als ein Mittelding zwischen einem einaxigen

erste Mittellinie für alle Farben in eine Richtung zusammen, und bringt man eine zu dieser senkrechte Platte in convergentes polarisirtes Licht, so sieht man im rothen Licht ein gewöhnliches Interferenzbild, im blauen Licht ebenfalls, aber mit senkrecht dazu stehenden Axenbildern, dagegen im weissen Licht ein vollkommen abweichendes Farbenbild, welches in Fig. 5 der Tafel dargestellt ist.

Man ersieht aus Fig. 79 unmittelbar, dass die Lebhaftigkeit und die Reihenfolge der Farben von innen nach aussen absolut die gleichen sein müssen bei beiden Hyperbeln, sobald die Halbirenden des optischen Axenwinkels für alle Farben absolut zusammenfallen in dem Mittelpunkt *M*. Ist dieses jedoch nicht der Fall, besitzt der Krystall auch noch eine Dispersion der Mittellinien, so können die Farbensäume der Hyperbeln nicht mehr gleich sein, und diese Ungleichheit derselben bietet gerade das empfindlichste Mittel dar, eine solche Dispersion der Elasticitätsaxen zu erkennen. Die hierbei auftretenden Farbenerscheinungen werden an einer späteren Stelle eingehend besprochen werden, hier sei nur bemerkt, dass bei derartigen Krystallen eine Platte, senkrecht zur ersten Mittellinie, natürlich nur für eine bestimmte Farbe die richtige Lage der Flächen hat; mit einer solchen Platte ist man nun, wie sogleich gezeigt werden soll, im Stande, den Winkel der optischen Axen zu bestimmen, in diesem Falle also nur für jene Farbe. Da indess die Dispersion der Mittellinien meist nur eine sehr kleine ist, so steht eine Platte, welche senkrecht zur ersten Mittellinie für Gelb geschliffen ist, auch gewöhnlich sehr nahe senkrecht zur ersten Mittellinie für die übrigen Farben, kann also, wenn nicht die höchste Genauigkeit gefordert wird, auch zur Bestimmung des Axenwinkels für Roth, Blau u. s. w. dienen. Ganz genau ist dies natürlich nur der Fall bei denjenigen zweiaxigen Krystallen, bei welchen die Elasticitätsaxen für die verschiedenen Farben zusammenfallen.

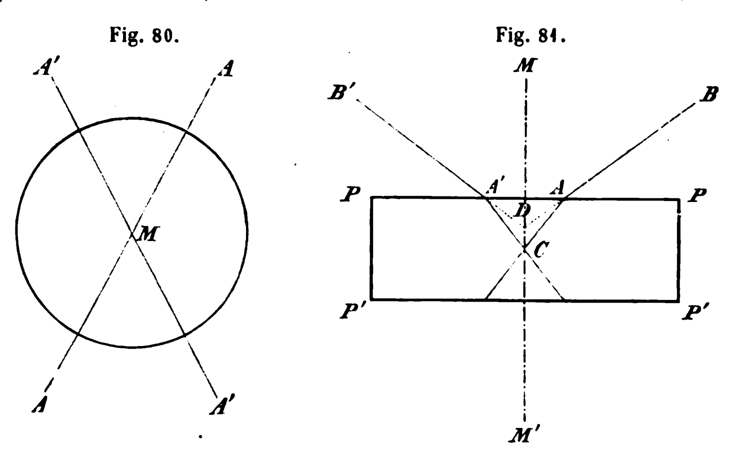
Die im Vorhergehenden beschriebenen Interferenzerscheinungen, welche eine Platte senkrecht zur Halbirenden des spitzen Axenwinkels zeigt*),

und einem zweiaxigen, sondern als vollkommen zur letzteren Klasse gehörig zu betrachten, denn es geht ihm offenbar die Haupteigenschaft der einaxigen Krystalle ab, nämlich nach allen Richtungen, welche normal zur Axe stehen, optisch gleichbeschaffen zu sein. Die zweiaxigen Krystalle unterscheiden sich von jenen dadurch, dass sie in den verschiedenen Richtungen, welche senkrecht zur grössten oder kleinsten Elasticitätsaxe stehen, optisch ungleich beschaffen sind; zwischen gleich und ungleich giebt es aber kein Mittelding.

*) Es ist unschwer einzusehen, dass eine Platte, deren Flächen senkrecht zur Halbirenden des stumpfen Axenwinkels stehen, ganz analoge Interferenzerscheinungen, d. h. Lemniscatensysteme zeigen muss, dass aber die den beiden Axen entsprechenden Centren derselben meist so weit von einander abstehen werden, dass sie nicht mehr in das Gesichtsfeld des Instrumentes fallen. Ist dies jedoch der Fall, so müssen die Farbensäume der dunklen Hyperbeln natürlich den entgegengesetzten Sinn der Dispersion anzeigen, als bei der zur ersten Mittellinie senkrechten Platte.

können nun dazu dienen, zunächst an einem zweiaxigen Krystall die Lage der drei Elasticitätsaxen aufzusuchen. Erblickt man nämlich durch ein paralleles Paar natürlich oder künstlich hergestellter Flächen des Krystalls die Axenbilder symmetrisch im Gesichtsfeld, so ist damit die Richtung einer Elasticitätsaxe, als der Normalen zu dem betreffenden Flächenpaar gegeben, ebenso die Lage der optischen Axenebene, deren Normale die Axe der mittleren Elasticität ist, endlich auch die Richtung der dritten Elasticitätsaxe, welche auf den beiden andern senkrecht steht. Mit der Kenntniss der Lage der drei Hauptschwingungsrichtungen ist nach S. 99 f. die Möglichkeit der Bestimmung der drei Hauptbrechungsindices gegeben, also diejenige der vollständigen Bestimmung der optischen Constanten des Krystalls. Aus diesen kann man, wie S. 103 gezeigt worden ist, zwar den optischen Axenwinkel herleiten, man kann denselben indess auch direct bestimmen durch Methoden, welche in dem folgenden §. auseinander gesetzt werden sollen.

§. 26. **Bestimmung des optischen Axenwinkels.** Die Strahlen, welche sich in der Richtung einer optischen Axe in einem Krystall fortpflanzen, bilden mit denjenigen, welche parallel der zweiten optischen Axe den Krystall durchsetzen, nach dem Austritte beider in die Luft, nur dann

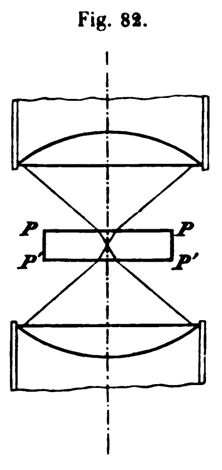


denselben Winkel, wie im Krystall, wenn sie beim Austritt keine Brechung erleiden, d. h. wenn die Fläche, an welcher die ersteren austreten, genau senkrecht zur ersten Axe, die Austrittsfläche der letzteren senkrecht zur zweiten Axe wäre. Solche Ebenen sind aber nicht herzustellen, ohne den Winkel der Axen zu kennen, dessen Bestimmung erst der Zweck der Methode ist. Dagegen treten die in Rede stehenden Strahlen völlig unabgelenkt aus dem Krystall aus, wenn man denselben zu einer Kugel oder zu einem Cylinder abschleift, dessen Axe parallel derjenigen der mittleren Elasticität ist. Diejenigen Strahlen *AA* und *A'A'* Fig. 80, welche genau durch die Mitte der Kugel oder des Cylinders gehen, und zwar parallel den beiden Axen, treffen deren Oberfläche stets in einem Punkte, in welchem dieselbe senkrecht zu jenen steht, werden also nicht gebrochen.

Wenn die Kugel also um eine Axe, senkrecht gegen die Zeichnungsebene von Fig. 80 und durch die Mitte gehend, drehbar wäre, so könnte man, mittelst Einstellens des Axenbildes A und desjenigen von A' in einem festen Polarisationsapparat, durch die hierzu erforderliche Drehung den Winkel AMA' messen. Wegen der Schwierigkeit der Herstellung einer so vollkommenen Kugel oder eines solchen Cylinders bestimmt man jedoch den Winkel der optischen Axen auf andere Weise, nämlich mittelst einer ebenen planparallelen Platte, welche senkrecht zur Halbirenden des spitzen Axenwinkels geschliffen ist.

Sei $PPP'P'$ Fig. 81 der Durchschnitt einer solchen Platte mit der optischen Axenebene, die Normale zur Platte MM' die erste Mittellinie der Axen, so werden die den beiden Axen parallelen Strahlensysteme die Oberfläche unter gleichen, aber entgegengesetzt liegenden Winkeln treffen, also eine gleiche Brechung nach der entgegengesetzten Richtung erleiden. Während sie im Krystall den Winkel ACA', den wahren Winkel der optischen Axen, bilden, schliessen sie nach ihrem Austritt einen grösseren, den sogenannten scheinbaren Axenwinkel BDB' ein, welcher ebenso, wie ACA', von MM' halbirt wird. Den scheinbaren Axenwinkel kann man nun auf folgende Art messen:

Fig. 82.



Man bringe die Platte ($PPP'P'$ Fig. 82 sei ihr Durchschnitt, wie oben) zwischen Sammellinse und Objectiv des Polarisationsinstrumentes so an, dass sie drehbar ist um eine Axe, welche genau senkrecht zur optischen Axenebene und ungefähr durch die Mitte der Platte geht. In Fig. 82 sind nur die benachbarten Theile des Instrumentes im Durchschnitt angegeben, und die Platte in der Stellung, in welcher sie das Interferenzbild symmetrisch zeigt, da die erste Mittellinie mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt. Jene Drehung erzielt man nun dadurch, dass man oberhalb der Zeichnungsebene einen getheilten Kreis fest mit dem Instrument verbindet, durch dessen Mitte eine drehbare Axe hindurchgeht, welche normal zur Zeichnungsebene steht und in eine Pincette endigend die Platte trägt. Die perspectivische Ansicht Fig. 83 wird die Anordnung dieses Apparates und die Möglichkeit, mittelst desselben eine Drehung der Platte zu messen, unmittelbar erkennen lassen. Wird nun jene Axe und somit die Krystallplatte so weit gedreht, dass die Strahlen, welche sie in der Richtung einer optischen Axe durchsetzen, genau parallel der Axe des Instrumentes in das Objectiv eintreten, Fig. 84, so werden diese in der Mitte des Gesichtsfeldes vereinigt werden, der Mittelpunkt des einen Ringsystems wird also genau in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheinen. Diesen Punkt kann man mittelst eines Fadenkreuzes in der Bildebene des Fernrohrs markiren, und die Einstellung des Axenbildes auf den Kreuzpunkt der Fäden gelingt dann besonders

genau, wenn man das Interferenzbild mit den Hyperbeln benutzt, also die gekreuzten Nicols des Instrumentes 45° mit der Axenebene der Platte bilden

Fig. 83.

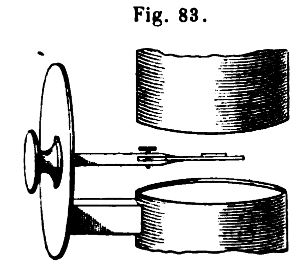
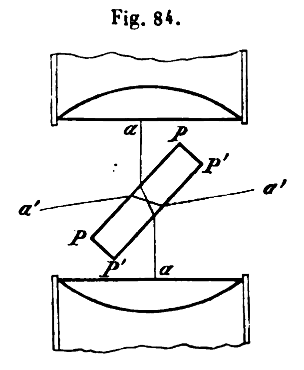
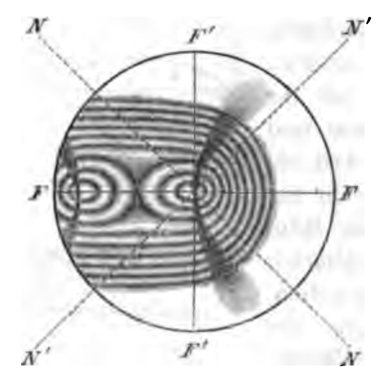


Fig. 84.



lässt. Da die Einstellung einer optischen Axe stets nur für eine bestimmte Farbe geschehen kann, so muss natürlich der Apparat durch homogenes Licht, z. B. eine Natriumflamme, erleuchtet werden. Das Interferenzbild stellt sich alsdann so dar, wie es in Fig. 85 abgebildet ist, worin FF und $F'F'$ das Fadenkreuz des Fernrohrs, NN und $N'N'$ die Schwingungsrichtungen der beiden Nicols bezeichnen. Hat man die Platte soweit gedreht, dass die Mitte der schwarzen Hyperbel und der Verticalfaden absolut zusammenfallen, wie es die Figur zeigt, so hat jene genau die in Fig. 84 bezeichnete Stellung. Dreht man nun zurück bis zur anfänglichen Lage, und ebenso weit nach der andern Seite, bis das zweite Axenbild genau in derselben Weise in der Mitte des Gesichtsfeldes ist, d. h. $a'a'$ Fig. 84 mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt, so hat man zwischen diesen beiden Einstellungen der einen und der andern optischen Axe auf die Mitte offenbar genau um so viel drehen müssen, als der Winkel der Axen nach dem Austritt in Luft beträgt. Die am Kreise abzulesende Drehung giebt also unmittelbar den scheinbaren Axenwinkel für die benutzte Farbe. Beleuchtet man nun das Instrument mit Licht von anderer Farbe, so erhält man wegen der Dispersion der Axen andere Ablesungen für beide Einstellungen und somit einen grösseren oder kleineren Axenwinkel.

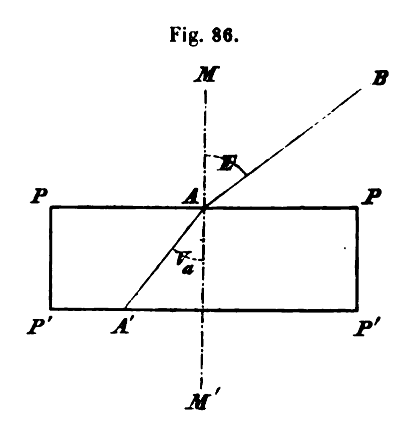
Fig. 85.



Es ist nunmehr das Verhältniss zu bestimmen, in welchem der scheinbare Axenwinkel zum wirklichen steht. Sei $PPP'P'$ Fig. 86 wieder der Durchschnitt der Krystallplatte mit der optischen Axenebene, MM' die erste Mittellinie und zugleich Normale zur Platte, AA' die Richtung einer optischen Axe, so ist offenbar $V_a = A'AM'$ der halbe wahre Axenwinkel,

$E = BAM$ der halbe scheinbare, so dass der wahre (innere) und der scheinbare Winkel der Axen $2V_a$, resp. $2E$ sind. Irgend ein Strahl, der sich im Hauptschnitt $PPP'P'$ fortpflanzt, zerfällt im Krystall in zwei, von denen einer, senkrecht zu jener Ebene, also parallel der mittleren Elasticitätsaxe, schwingend, stets dieselbe Geschwindigkeit hat, während der andere verschiedene hat je nach seiner Richtung. Parallel AA' hat Letzterer jedoch genau dieselbe Geschwindigkeit, wie der erstere, d. h. die mittlere, und da eben deshalb hier gar keine Doppelbrechung eintritt, so hat jeder irgendwie schwingende Strahl, wenn er sich in der Richtung AA' fortpflanzt, die mittlere Lichtgeschwindigkeit, er wird also im Punkte A so gebrochen werden, dass sein Brechungsexponent aus Luft in den Krystall gleich dem mittleren Hauptbrechungsquotienten β ist. Wenn der Strahl $A'A$ gebrochen in die Luft austritt, so ist sein Einfallswinkel V_a, sein Brechungswinkel E, also

Fig. 86.



$$\frac{\sin V_a}{\sin E} = \frac{1}{\beta}$$

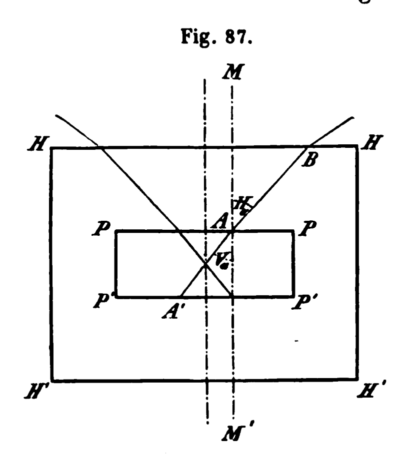
$$\sin E = \beta \cdot \sin V_a.$$

Durch diese Gleichung ist das Verhältniss zwischen dem wahren und dem scheinbaren Axenwinkel in Luft bestimmt. Hat man also sämmtliche drei Hauptbrechungsindices für verschiedene Farben gemessen und daraus den wahren Axenwinkel für dieselben Farben abgeleitet, so ergiebt sich aus obiger Gleichung der scheinbare; bestimmt man nun diesen direct auf die beschriebene Art, so liefert die Vergleichung desselben mit dem nur aus den Brechungsexponenten berechneten Werthe einen Maassstab zur Beurtheilung der Genauigkeit, mit welcher letztere bestimmt worden sind, um so mehr, als die Genauigkeit der Messung der Axenwinkel in den meisten Fällen, wenn man nämlich nur kleine Krystalle zur Anfertigung von Prismen und Platten zur Verfügung hat, grösser ist, als diejenige der Messung der Brechungsindices. Noch wichtiger ist aber die Bestimmung des scheinbaren Axenwinkels in denjenigen Fällen, in denen die Ausbildung der Krystalle die Anfertigung von genügend grossen Prismen zur genauen Bestimmung der Brechungsindices nur nach einer Richtung gestattet, also höchstens zwei der Hauptbrechungsquotienten bestimmt werden können. Sind diese beiden nicht α und γ, sondern α und β, oder β und γ, so vermag man mittelst β aus dem scheinbaren Axenwinkel den wahren, und aus diesem und den beiden gemessenen Brechungsexponenten den dritten zu berechnen, indem man die S. 103 gegebene Gleichung nach letzterem auflöst.

Wenn der Winkel der optischen Axen eine bestimmte Grösse über-

schreitet, können die ihnen parallelen Strahlen in Luft nicht mehr austreten. Denn wenn $\sin V_a = \frac{1}{\beta}$, so ist $\sin E = 1$, also der scheinbare Axenwinkel 180°, von dieser Grösse für V_a ab tritt totale Reflexion jener Strahlen ein, welche Grösse abhängt von dem mittleren Brechungsexponenten des Lichtes beim Uebergang aus dem Krystall in Luft. Würde man den ersteren, statt mit Luft, mit einer Flüssigkeit umgeben, deren optische Dichte weniger von der des Krystalls abweicht, so würden die den optischen Axen entsprechenden Strahlen an der Grenze beider weniger abgelenkt werden, und wäre dieses Mittel optisch dichter, als der Krystall, so würden sie dem Lothe zu gebrochen, d. h. die scheinbaren optischen Axen in diesem Mittel bildeten einen kleineren Winkel, als die wahren. Sei Fig. 87 $PPP'P'$ die Krystallplatte, HH die derselben parallele Grenzfläche des umgebenden Mediums gegen die Luft, so wird ein Strahl $A'A$, parallel einer optischen Axe, in A, wenn MM' das Einfallsloth, gebrochen werden; und zwar wird, wenn man $A'AM' = V_a$ (wie bisher, der halbe Axenwinkel), $MAB = H_a$ (da MM' die Mittellinie, so ist dies der halbe scheinbare Axenwinkel in dem umgebenden Medium), endlich die Geschwindigkeit des Lichtes im Krystall $= v_b$, in dem umgebenden Mittel $= v_h$, in der Luft $= v$ setzt:

Fig. 87.



$$\frac{\sin V_a}{\sin H_a} = \frac{v_b}{v_h}$$

oder, was damit identisch gleich:

$$\frac{\sin V_a}{\sin H_a} = \frac{v_b}{v} \cdot \frac{v}{v_h},$$

und, da $\frac{v}{v_b}$ gleich dem mittleren Brechungsexponenten β, $\frac{v}{v_h}$ gleich dem Brechungsindex aus Luft in das umhüllende Medium, welchen wir n nennen wollen, ist, so folgt

$$\frac{\sin V_a}{\sin H_a} = \frac{1}{\beta} \cdot n$$

(1) $$\sin V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_a \text{ *)}.$$

*) Da $\sin E = \beta \cdot \sin V_a$, so ist, wenn man in obige Gleichung für $\sin V_a$ seinen Werth $\frac{\sin E}{\beta}$ einsetzt:

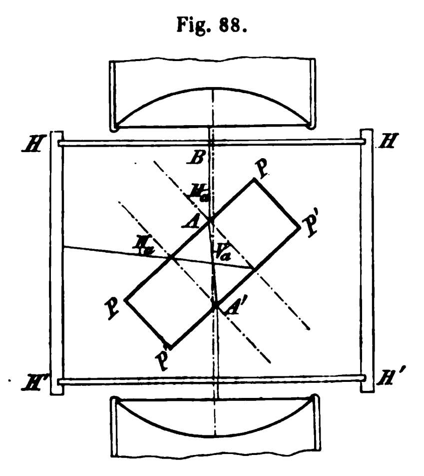
$$n = \frac{\sin E}{\sin H_a}.$$

Hiernach kann man den Brechungsexponenten n des umgebenden Mediums bestimmen

Hiernach können wir den wahren Axenwinkel auch in einem solchen Falle berechnen, dass die Axen nicht mehr in Luft austreten, wenn wir den Krystall, dessen mittleren Brechungsexponenten wir kennen, mit einem stark brechenden Medium, dessen Brechungsindex n für die benutzte Farbe ebenfalls bekannt ist, umgeben, und den Winkel H_a, welchen die Axen in diesem bilden, bestimmen. Dies letztere geschieht auf folgende Weise:

Man umgiebt die Krystallplatte mit einem Gefäss $HHH'H'$, Fig. 88, dessen Vorder- und Hinterwand, HH und $H'H'$ aus planparallelen Glasplatten besteht, und füllt dasselbe mit einem durchsichtigen ungefärbten Oel, dessen Brechungsexponent bekannt ist, an, so dass die Platte sich ganz in demselben befindet, während sie mit dem Apparat zum Messen der Axenwinkel ganz ebenso verbunden ist, als wenn der scheinbare Winkel in Luft bestimmt werden sollte. Dreht man nun die Platte so weit, bis diejenigen Strahlen AB (die Bezeichnungen sind ganz dieselben wie in der vorigen Figur), welche im Krystall sich einer optischen Axe parallel bewegen, der Axe des Polarisationsinstrumentes parallel sind, so erleiden sie weder an der Grenze des Oels gegen die umschliessende Glasplatte HH, noch durch letztere eine Ablenkung, da dieselbe senkrecht zur Axe des Instrumentes steht, es ist diese Stellung also ganz ebenso zu finden, wie bei der Messung des scheinbaren Axenwinkels in Luft, nämlich durch Einstellung der dunklen Hyperbel auf die Mitte des Fadenkreuzes im Gesichtsfeld des Polarisationsinstrumentes. Dreht man nun zurück und nach der entgegengesetzten Seite, bis das zweite Axenbild in gleicher Weise im Gesichtsfeld centrirt erscheint, so ist die ganze hierzu nöthige Drehung offenbar $2H_a$, d. h. der scheinbare Axenwinkel im Oel. Wenn also β und n bekannt sind, so ergiebt sich aus dem so gemessenen H_a nach der oben abgeleiteten Gleichung

Fig. 88.



$$\sin V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_a$$

der wahre Axenwinkel.

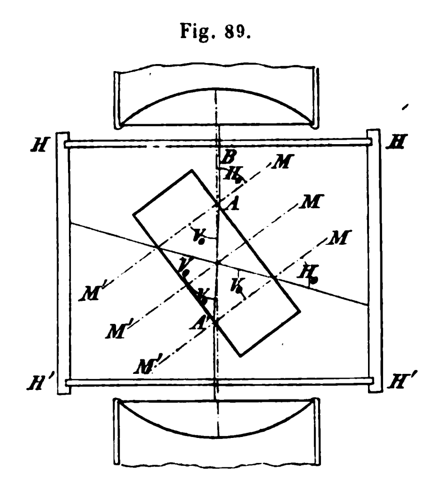
Denselben kann man endlich sogar finden, ohne β und n zu kennen, nämlich mittelst einer zweiten Krystallplatte, deren Flächen senkrecht zur Halbirenden des stumpfen Winkels, der sogenannten zweiten Mittellinie der optischen Axen, geschliffen sind. Bei einer solchen werden die beiden

---

durch Messung des scheinbaren Axenwinkels in Luft und in jener Flüssigkeit mittelst einer und derselben Krystallplatte.

Axen im Allgemeinen nicht mehr in die Luft austreten, wohl aber in Oel, selbst wenn der stumpfe Axenwinkel sehr gross ist, sobald nur der Brechungsexponent des Oels mindestens ebenso gross ist als der des Krystalls. Sei in Fig. 89 eine solche Platte im Oelgefäss dargestellt, ebenfalls drehbar um die Axe der mittleren Elasticität, sei $A'A$ ein Strahl, welcher im Krystall einer optischen Axe parallel läuft, der im Oel in der Richtung AB sich fortpflanzt, so ist, wenn MM' die Normale zur Platte, d. h. die zweite Mittellinie der Axen, $A'AM' = V_o$ die Hälfte des stumpfen wahren Axenwinkels, $MAB = H_o$ die Hälfte des scheinbaren stumpfen Axenwinkels in Oel. Die Messung dieses letzteren geschieht nun ganz so, wie bei der vorigen Platte, durch Drehung und aufeinanderfolgendes Einstellen der beiden Axenbilder. Wenn man dieselben Bezeichnungen für die Lichtgeschwindigkeit und die Brechungsexponenten beibehält, wie oben beim spitzen Axenwinkel, so folgt hier ganz ebenso wie dort:

Fig. 89.



$$\frac{\sin V_o}{\sin H_o} = \frac{v_b}{v_h} = \frac{1}{\beta} \cdot n$$

(2) $$\sin V_o = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_o.$$

Mittelst dieser Gleichung kann man also, wenn man den scheinbaren stumpfen Axenwinkel in Oel bestimmt hat, den wahren berechnen, ebenso wie durch die vorher entwickelte Gleichung aus dem scheinbaren spitzen. Beide Berechnungen setzen aber die Kenntniss des mittleren Brechungsexponenten des Krystalls und desjenigen des Oels voraus. Da die Summe des spitzen und stumpfen Axenwinkels jedoch für dieselbe Farbe stets 180° sein muss, so ist $V_a + V_o = 90°$, also $\sin V_o = \cos V_a$. Setzt man diesen Werth in die Gleichung (2) ein und dividirt die für den spitzen Axenwinkel entwickelte Gleichung (1) durch jene:

(1) $$\sin V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_a$$

(2) $$\cos V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_o$$

so folgt

$$\operatorname{tang} V_a = \frac{\sin H_a}{\sin H_o},$$

d. h. man kann den wahren Winkel der optischen Axen eines Krystalls bestimmen, ohne irgend einen Brechungsexponenten zu kennen. Man schleift nämlich aus demselben zwei Platten, eine senkrecht zur ersten, eine senkrecht zur zweiten Mittellinie, und bestimmt auf die beschriebene Art

bei beiden den scheinbaren Axenwinkel in Oel; der Quotient der Sinus dieser Winkel ist die Tangente des halben gesuchten inneren Axenwinkels. Diese Art der Bestimmung desselben ist deshalb besonders wichtig, weil zur Anfertigung der Prismen, mit denen die Brechungsindices sehr genau gemessen werden können, durchsichtige Krystalle von einer Grösse gehören, wie man sie bei weitem nicht von allen Substanzen besitzt, während die planparallelen Platten für diese Methode fast beliebig klein sein*) und auch leichter in genügender Genauigkeit angefertigt werden können, als richtig orientirte Prismen. Hat man also nur sehr kleine Krystalle zur Verfügung, so begnügt man sich mit der Bestimmung des wahren Axenwinkels nach der beschriebenen Methode und erhält übrigens auch noch den mittleren Hauptbrechungsexponenten β, wenn man mittelst der zur ersten Mittellinie senkrechten Platte den scheinbaren Axenwinkel $2E$ in der Luft bestimmt, nach der Gleichung (s. S. 117)

$$\sin E = \beta \cdot \sin V_a$$
$$\beta = \frac{\sin E}{\sin V_a}.$$

Bestimmt man die optischen Axenwinkel eines zweiaxigen Krystalls, sei es durch vollständige Messung der optischen Constanten (der drei Hauptbrechungsquotienten), sei es durch directe Bestimmung derselben, für verschiedene Farben, so findet man dieselben verschieden, und zwar steigt oder fällt die Grösse des Winkels der Axen stetig mit der Wellenlänge des Lichtes, auf welches sie sich beziehen. Da jeder der drei Hauptbrechungsindices sich mit der Farbe annähernd nach demselben Gesetz ändert, welches S. 36 als Cauchy'sche Dispersionsformel für einfach brechende Medien aufgestellt wurde, nur dass selbstverständlich die Constanten dieser Formel bei jedem derselben andere Werthe besitzen, so liegt die Vermuthung nahe, dass auch die Axenwinkel nach einem ähnlichen Gesetz sich mit der Farbe ändern. In der That entsprechen die Axenwinkel derjenigen Krystalle, bei welchen sie mit der Wellenlänge zunehmen (Sinn der Dispersion $\varrho > v$), ausserordentlich nahe der Formel:

$$V_a = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

derjenigen, deren Axenwinkel mit grösserer Wellenlänge des Lichtes abnimmt ($\varrho < v$):

$$V_a = A - \frac{B}{\lambda^2}.$$

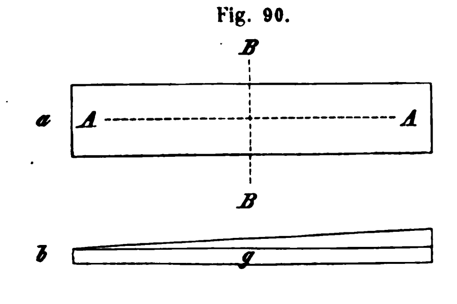
Hat man also den wahren Axenwinkel $2V_a$ einer Substanz für zwei Farben bestimmt, deren Wellenlänge bekannt ist, so kann man, die gefundenen Werthe in die betreffende dieser beiden Gleichungen einsetzend, die Con-

*) Auch zur Bestimmung der Brechungsexponenten mit dem Totalreflectometer dürfen die Krystalle nicht allzu klein sein, weil sonst das von der Platte reflectirte Licht so schwach ist, dass die Grenze der totalen Reflexion nicht mehr zu erkennen ist.

stanten *A* und *B* für den Körper und daraus den Axenwinkel für jede andere Wellenlänge ableiten*).

§. 27. **Bestimmung des Zeichens der Doppelbrechung bei ein- und zweiaxigen Krystallen.** Wenn man eine einaxige Krystallplatte, welche parallel oder schräg zur optischen Axe geschliffen ist, oder eine zweiaxige, deren Flächen der optischen Axenebene parallel sind, im convergenten polarisirten Lichte betrachtet, so erblickt man bekanntlich keine Interferenzerscheinungen, wenn die Platte nicht äusserst dünn ist, weil die hyperbolischen Farbenstreifen sich so vielfach überdecken, dass das Weiss der höheren Ordnung erscheint. In einer solchen Platte zerfällt jeder vertical auf dieselbe auftreffende Lichtstrahl in zwei senkrecht zu einander polarisirte, deren Schwingungsrichtungen durch die Stellungen, in welchen die Platte zwischen gekreuzten Nicols dunkel erscheint, leicht ermittelt werden können. Kann man nun bestimmen, welche von diesen beiden Richtungen die grössere, welche die kleinere optische Elasticität besitzt, so hat man hierdurch ein Mittel, welches in vielen Fällen über den Charakter der Doppelbrechung entscheidet. So in dem Falle einer einaxigen Platte parallel zur Axe, welche positiv ist, wenn die Schwingungsrichtung parallel der Axe die kleinere, die senkrecht dazu die grössere Elasticität besitzt, welche im umgekehrten Falle negativ ist; so ferner bei einer zweiaxigen Platte parallel der Axenebene, welche positiv ist, wenn diejenige Schwingungsrichtung, welche den spitzen Winkel der optischen Axen halbirt, die der kleinsten Elasticität ist. Jenes Mittel, durch welches man bei einer doppeltbrechenden Platte, welche das Weiss der höheren Ordnung zeigt, von den beiden Schwingungsrichtungen bestimmen kann, welche der grösseren Elasticität entspricht, besteht im Hinzufügen verschieden dicker Schichten eines Krystalls von bestimmtem optischen Charakter, welcher durch theilweises Compensiren der Phasendifferenz der ersten Krystallplatte so wirkt, als ob diese dünner würde, und somit die hyperbolischen Interferenzstreifen entstehen lässt. Man verwendet hierzu einen aus Quarz gefertigten Keil, dessen eine Fläche der Axe *AA* parallel ist, s. Fig. 90 *a* Vorderansicht, *b* Längsschnitt. Derselbe ist gewöhnlich, um den dünnsten Theil weniger zerbrechlich zu machen, auf eine rectanguläre Glasplatte *g* aufgekittet.

Fig. 90.

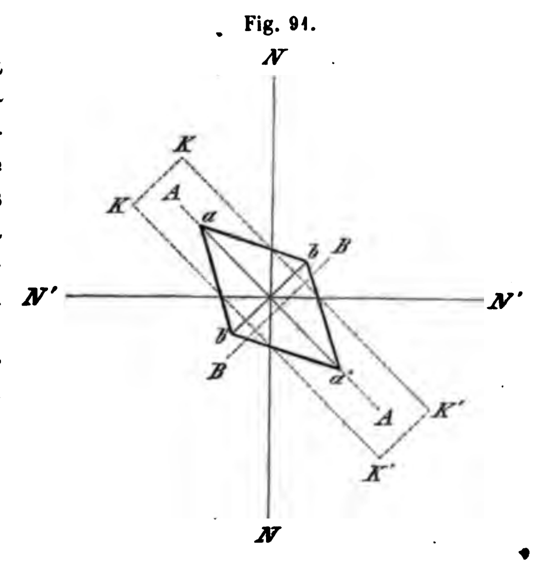


Der Quarz ist ein positiver

*) Es muss indess bemerkt werden, dass einige wenige Substanzen (z. B. Gyps) Ausnahmen von diesem Gesetze darbieten und eine anomale Dispersion der optischen Axen derart zeigen, dass der Winkel derselben für eine bestimmte mittlere Farbe ein Maximum oder Minimum besitzt.

Krystall, die Elasticität parallel seiner optischen Axe ist also am kleinsten, senkrecht dazu am grössten. Jeder in einen solchen Keil an irgend einer Stelle senkrecht einfallende Strahl wird sich demnach in zwei zerlegen, von denen der ordentliche, parallel *BB* schwingend, sich schneller, der ausserordentliche, parallel der Axe *AA* schwingend, sich langsamer fortpflanzt. Die Phasendifferenz, mit welcher die beiden Strahlen aus dem Quarz austreten, wächst nun offenbar mit der Dicke des letzteren, man kann also durch Verschieben des Keils von rechts nach links dieselbe vergrössern, da alsdann eine dickere Stelle des Keils zur Wirksamkeit gelangt. Bringt man nun eine doppeltbrechende Platte *aba'b'* Fig. 91 so in das Polarisationsinstrument, dass ihre Schwingungsrichtungen 45⁰ mit denen der beiden gekreuzten Nicols (*NN* und *N'N'*) bilden, und sei *aa'* die Richtung der grössten Elasticität unter allen in der Ebene *aba'b'* liegenden, *bb'* die der kleinsten, so werden die Vibrationen parallel *aa'* sich rascher im Krystall fortpflanzen als die parallel *bb'*, demnach beim Austritt eine Phasendifferenz beider vorhanden sein. Es sei für diejenigen Strahlen, welche in senkrechter Richtung durch die Platte hindurchgehen, von denen jeder in zwei zerfällt, deren Weg im Krystall gleich lang ist, so dass ihre Phasendifferenz nur von dem Unterschied ihrer Geschwindigkeit abhängt, und welche sämmtlich in der Mitte des Gesichtsfeldes vereinigt werden, die entstehende Differenz ihres Schwingungszustandes $= n\lambda$ (wo n jede ganze oder gebrochene positive Zahl sein kann). Da bei einiger Dicke der Krystallplatte n bereits sehr gross ist, so wird eine Interferenz an derselben Stelle stattfinden für sehr verschiedene Farben, es werden im weissen Licht also keine Farbencurven auftreten, sondern nur Weiss.

Fig. 91.



Schiebt man nun den Quarzkeil *KKK'K'* so ein, dass seine optische Axe *AA* der Schwingungsrichtung *aa'* der Krystallplatte parallel ist, so wird jeder der beiden aus dem Krystall austretenden Strahlen mit unveränderter Schwingungsrichtung sich im Quarz fortpflanzen, der parallel *aa'* schwingende ist aber hier der langsamere, der parallel *bb'* der schneller vorschreitende, die Phasendifferenz, welche beiden im Quarz zu Theil wird, sie möge $n'\lambda$ sein, besitzt also den entgegengesetzten Sinn gegenüber der im Krystall erhaltenen, die Phasendifferenz der beiden Strahlen, nachdem

sie Krystall und Quarz durchlaufen haben, ist also $= (n - n')\lambda$. Die Grösse $n - n'$ kann nun beliebig klein gemacht werden, sobald die Krystallplatte einigermaassen dünn und der Quarzkeil dick genug ist, also durch Verschieben des letzteren parallel AA, so dass eine dickere Stelle in die Mitte kommt. Mit dieser verkleinerten Phasendifferenz treten denn nun die beiden Strahlen in den Analysator und ihr entsprechend interferiren sie nach der Zurückführung auf eine Schwingungsebene. Ist $n - n'$ sehr klein, so tritt ganz dasselbe ein, als ob die Krystallplatte selbst äusserst dünn und kein Quarzkeil vorhanden wäre, d. h. es erscheinen im weissen Licht die hyperbolischen farbigen Interferenzcurven.

Würde man hingegen den Quarzkeil so in das Polarisationsinstrument eingeschoben haben, dass AA parallel der Schwingungsrichtung bb' wäre, so würden dieselben Vibrationen, welche im Krystall gegen die senkrecht dazu stehenden um $n\lambda$ verzögert wurden, auch im Quarz um $n'\lambda$ gegen letztere verzögert werden, also schliesslich eine Phasendifferenz von $(n + n')\lambda$ besitzen und dem entsprechend interferiren. In diesem Falle wirkt demnach der Quarzkeil so, als ob die Krystallplatte dicker geworden wäre, es können also noch weniger, als ohne denselben, Interferenzfarben auftreten.

Wäre nicht aa', wie wir angenommen haben, die Richtung der grössten Elasticität in der Krystallplatte, sondern bb', und aa' die der kleinsten, so wäre Alles umgekehrt, d. h. wir müssten den Quarzkeil, um die Interferenzstreifen zu erhalten, so einschieben, dass AA parallel bb' wird.

Daraus ergiebt sich das Verfahren zur Bestimmung der relativen optischen Elasticität nach den zwei Schwingungsrichtungen einer Platte folgendermaassen: Dieselbe wird in dem Polarisationsinstrument mit convergentem Licht so weit gedreht, bis sie das Maximum der Helligkeit zeigt (denn alsdann bilden ihre Schwingungsrichtungen 45° mit denen der gekreuzten Nicols), dann wird zwischen die Platte und den Analysator der Quarzkeil eingeschoben, einmal mit seiner Längsrichtung parallel der einen, das andere mal parallel der zweiten Schwingungsrichtung der Krystallplatte; diejenige von beiden, der seine Längsrichtung parallel ist, wenn in der Mitte des Gesichtsfeldes die hyperbolischen Farbencurven auftreten, ist die Richtung der grössten Elasticität unter allen der Platte parallelen, die senkrecht dazu stehende die der kleinsten.

Diese Methode setzt eine dickere Krystallplatte und convergentes polarisirtes Licht voraus. Bei mikroskopischen Untersuchungen hat man es oft mit sehr dünnen Schichten krystallisirter Körper zu thun, welche, namentlich wenn auch noch ihre Doppelbrechung schwach ist, nur eine sehr geringe Phasendifferenz der beiden Strahlen, in manchen Fällen nur von einem Bruchtheil einer Wellenlänge, hervorbringen und daher zwischen gekreuzten Nicols nur eine schwache Aufhellung zeigen. Alsdann bedient man sich eines sogenannten empfindlichen Gypsblättchens. Der parallel der optischen Axenebene sehr vollkommen spaltbare, negativ dop-

peltbrechende Gyps gestattet die Herstellung so dünner Blättchen, dass dieselben in diagonaler Stellung, d. h. wenn ihre Schwingungsrichtungen 45° mit denen der gekreuzten Nicols bilden, das Roth der ersten Ordnung zeigen. Fügt man ein solches Blättchen unter den Analysator des Mikroskops ein, so erscheint demnach das Gesichtsfeld desselben roth, und hieran ändern einfach brechende, im Gesichtsfeld vorhandene Körper nichts, während ein auch nur schwach doppeltbrechender Krystall je nach seiner Lage zu den Hauptschnitten des Gypses die von diesem hervorgebrachte Phasendifferenz entweder verringert oder vermehrt und dadurch den Farbenton an der betreffenden Stelle im ersten Falle durch Orange in Hellgelb der 1. Ordnung oder, im zweiten Falle, durch Violett in Blau der 2. Ordnung verwandelt. Es leuchtet ein, dass man auf diesem Wege nicht nur eine sehr schwache Doppelbrechung an Krystallen erkennen kann, sondern, wenn die Richtung der Axe der grössten Elasticität an dem Gypsblättchen bezeichnet ist, auch durch den Sinn der Farbenänderung bestimmen kann, welcher von beiden Strahlen im Krystall der grösseren und welcher der kleineren optischen Elasticität entspricht.

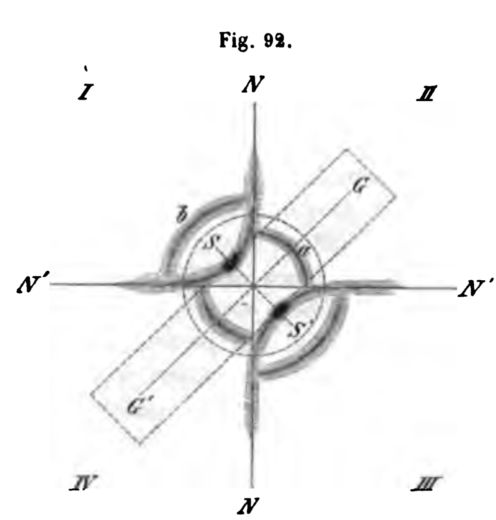
Hat man eine optisch einaxige Krystallplatte, deren Flächen senkrecht zur optischen Axe stehen, zur Bestimmung ihres optischen Charakters zur Verfügung, so kann man diesen dadurch finden, dass man sie auf den Krystallträger des Polarisationsinstrumentes (mit convergentem Licht) und auf dieselbe eine zweite senkrecht zur Axe geschliffene Platte eines anderen einaxigen Krystalls legt, von welchem man das Zeichen der Doppelbrechung kennt. Hat die zu untersuchende Platte denselben optischen Charakter, wie die letztere, so wird der gleiche Strahl (von den beiden senkrecht zu einander schwingenden), welcher in der unteren verzögert wurde, es auch in der oberen, diese wirkt also gerade so, als ob die untere Platte dicker geworden wäre, d. h. die kreisförmigen Farbenringe werden enger sein, als sie erschienen, ehe die Platte von bekanntem optischen Charakter aufgelegt wurde. Ist dagegen die zu untersuchende Krystallplatte von entgegengesetztem optischen Charakter als die bekannte, so wird letztere so wirken, als ob erstere dünner geworden wäre, d. h. die Farbenringe werden weiter werden. Diese Erweiterung oder Verengerung der Farbenringe kann man dadurch sehr leicht erkennbar machen, dass man in der Bildebene des Polarisationsinstrumentes eine Glasplatte mit feinen eingerissenen Linien anbringt, welche man alsdann auf der Interferenzfigur erblickt und so ein Maass zur Bestimmung des Durchmessers der Farbenringe besitzt.

Eine weitere sehr bequeme und zwar die am häufigsten angewendete Methode zur Bestimmung des optischen Charakters einer senkrecht zur Axe geschliffenen einaxigen Platte besteht in der Anwendung eines Viertelundulations-Glimmerblattes, d. h. einer so dünnen Spaltungslamelle von Glimmer, dass die aus einem senkrecht eintretenden Strahl entstehenden beiden Vibrationen nur um $\frac{1}{4}\lambda$ (für mittlere Farben) der eine gegen

den anderen verzögert wird. Der Glimmer ist negativ zweiaxig, d. h. seine Axe der grössten Elasticität halbirt den spitzen Winkel der Axen, und fast genau senkrecht zu jener Richtung ist seine so äusserst vollkommene Spaltbarkeit. Schneidet man das Glimmerblatt in eine rectanguläre Form, so dass die Längsrichtung der optischen Axenebene entspricht, so sind die längeren Kanten desselben parallel der Axe der kleinsten, die kürzeren der der mittleren Elasticität, und dies sind zugleich die beiden Schwingungsrichtungen eines senkrecht zur Platte (parallel der Axe der grössten Elasticität) einfallenden Strahls.

Hat man nun die zu untersuchende, senkrecht zur Axe geschliffene einaxige Krystallplatte im convergenten Licht zwischen gekreuzten Nicols und fügt jene Glimmerplatte in den Gang der Lichtstrahlen ein und zwar zwischen der Platte und dem Analysator, so erhält man im homogenen Licht statt der kreisförmigen dunklen Ringe mit schwarzem Kreuz die in Fig. 92 dargestellte Interferenzfigur, wenn der Krystall **positiv** ist, dagegen die in Fig. 93 dargestellte, wenn er **negativ** ist, und wenn in beiden Fällen das Glimmerblatt die punktirt angedeutete diagonale Lage hat, d. h. seine Längsaxe in den beiden mit *II* und *IV* bezeichneten Quadranten 45° mit den Nicols bildet. Das erstere Interferenzbild unterscheidet sich dadurch von dem gewöhnlichen, dass die dunklen Ringe in den Quadranten *II* und *IV* um etwa ein Viertel des Abstandes zweier benachbarter verengert, diejenigen in den Quadranten *I* und *III* um ebenso viel erweitert, so dass an der Grenze zweier Quadranten stets ein heller an einen dunklen Ring stösst. Statt des schwarzen Kreuzes erscheinen zwei schwarze Flecken, deren Verbindungslinie senkrecht zur Längsrichtung des Glimmers steht. Würde das Glimmerblatt senkrecht zu der in der Figur angedeuteten Lage eingeschoben werden, so dass seine Längsrichtung mitten in die Quadranten *I* und *III* fiele, so würden deren Ringe verengert, die von *II* und *IV* erweitert und in letzteren auch die schwarzen Flecke erscheinen. Bei der das Interferenzbild eines negativen Krystalls darstellenden Fig. 93 liegen die gleiche Erweiterung der Ringe und die dunklen Flecke in denjenigen Quadranten, welche die Längsaxe des Glimmers halbirt, in *II* und *IV*, die Verengerung der Ringe geschieht dagegen in *I* und *III*. Würde das Glimmerblatt so eingeschoben worden sein, dass es die Quadranten *I* und *III* halbirte,

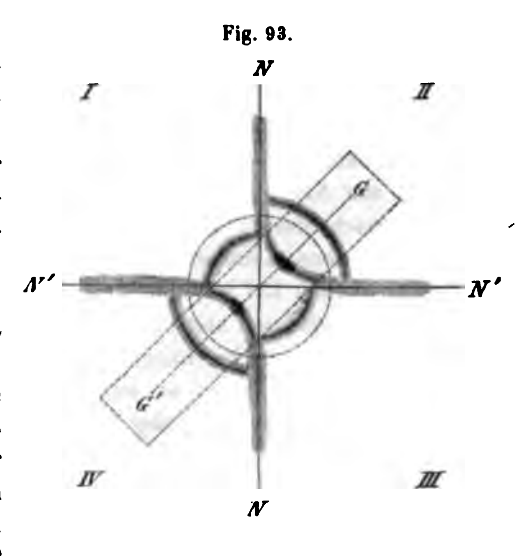
Fig. 92.



so würden in diesen die Erweiterung der Ringe und die dunklen Flecke, in *II* und *IV* die Verengerung eintreten. Was für die dunklen und hellen Ringe im homogenen Licht statt hat, gilt auch für die im weissen Licht erscheinenden Farbenringe, so dass also in letzterem Falle die Ringe gleicher Farbe in derselben Weise erweitert oder verengert werden; die schwarzen Flecke erscheinen ganz ebenso, wie im homogenen Lichte.

Zu einer Erklärung dieser Erscheinung, soweit eine solche hier möglich ist, bleiben wir bei dem einfacheren Fall des homogenen Lichtes stehen. Seien *NN*, *N'N'*, Fig. 92, wie vorher die Richtungen der Nicols, *GG'* die Längsrichtung des Glimmerblattes, so möge der punktirte Kreis den Ort des ersten dunklen Interferenzringes im Gesichtsfelde darstellen, welcher erscheinen würde, wenn keine Viertelundulationsplatte da wäre. Wenn die zu untersuchende Krystallplatte positiv einaxig ist, so entsteht nach dem Früheren dieser Ring dadurch, dass in der entsprechenden Richtung zwei Strahlen mit einander interferiren, von denen der eine, der ausserordentliche, im Hauptschnitt, der andere, der ordentliche, senkrecht dazu schwingt, sich aber um so viel schneller fortpflanzt, dass beide beim Austritt genau eine ganze Wellenlänge Phasendifferenz besitzen. Alsdann tritt nämlich, weil die Interferenz bei gekreuzten Nicols mit entgegengesetzter Phase stattfindet, vollständige Auslöschung ein. An einer Stelle *a*, wo, der Mitte des Gesichtsfeldes etwas näher, der schwarze Kreisquadrant angegeben ist, wird der eine Strahl nur um $\frac{3}{4}\lambda$ gegen den andern verzögert sein; treten nun beide in das Glimmerblatt ein, so kommt zu dieser Verzögerung noch $\frac{1}{4}\lambda$ hinzu, denn der ausserordentliche, im Hauptschnitt und folglich parallel der Axenebene *GG'* des Glimmers schwingende Strahl pflanzt sich in diesem ebenfalls langsamer fort, als der senkrecht dazu vibrirende, da die Richtung *GG'* die Axe der kleinsten Elasticität, *SS'* die der mittleren des Glimmers ist. Die beiden interferirenden Strahlen haben also nach Hinzufügung der Viertelundulationsplatte schon in geringerem Abstand von der Mitte des Gesichtsfeldes eine ganze Wellenlänge Phasendifferenz, der erste dunkle Ring, welcher dieser Verzögerung entspricht, ist also um ebenso viel enger geworden. Betrachten wir nun denjenigen Punkt *b*, in welchem sich Strahlen vereinigen, deren Phasendifferenz $\frac{5}{4}\lambda$ ohne Glimmerblatt sein würde. Hier schwingt der ausserordentliche, sich

Fig. 93.



langsamer fortpflanzende Strahl || SS' (im Hauptschnitt), der ordentliche, sich schneller fortpflanzende, || GG'. Im Glimmer ist aber die Geschwindigkeit des letzteren die kleinere, die des ersten grösser. Die in der Krystallplatte entstandene Phasendifferenz $\frac{5}{4}\lambda$ wird also um $\frac{1}{4}\lambda$ verkleinert, folglich entsteht im Quadranten *I* der erste dunkle Ring erst in dem Abstande des Punktes *b* von der Mitte, er ist weiter geworden, als vorher. In ganz gleicher Weise kommt für jeden folgenden Ring in den Quadranten *II* und *IV* zur Phasendifferenz der Krystallplatte noch $\frac{1}{4}\lambda$ von Seiten des Glimmers hinzu, sie werden sämmtlich enger, während bei allen Ringen in den Quadranten *I* und *III* die entstandene Phasendifferenz durch den Glimmer um $\frac{1}{4}\lambda$ verringert wird, die letzteren also erweitert werden. Bei den negativen Krystallen ist die Elasticität parallel der Axe am grössten, der ausserordentliche Strahl also der schnellere, bei derselben Stellung des Glimmers muss also in den Quadranten *II* und *IV* genau das Gleiche vor sich gehen, als bei positiven in den Quadranten *I* und *III*, und vice versa. Eine vollständige Erklärung*) des ganzen Interferenzbildes, namentlich der Umwandlung des dunklen Kreuzes in zwei schwarze Flecken, kann jedoch nicht gegeben werden, ohne auf eine besondere Art der Polarisation des Lichtes einzugehen, deren Betrachtung hier zu weit führen würde.

Das praktische Verfahren, um den Charakter der Doppelbrechung einer senkrecht zur Axe geschliffenen einaxigen Krystallplatte zu bestimmen, besteht demnach darin, dass man zwischen sie und den Analysator eine Viertelundulations-Glimmerplatte von angegebener Form so einschiebt, dass ihre Längsrichtung 45° mit den beiden Armen des schwarzen Kreuzes bildet. Es erscheinen alsdann statt desselben zwei schwarze Flecke; bildet deren Verbindungslinie mit der Längsrichtung des Glimmers ein Kreuz (+), d. h. steht sie senkrecht dazu, so ist der Krystall positiv (+), ist jene Verbindungslinie identisch mit der Längsrichtung (—), so ist der einaxige Krystall negativ (—). Im ersteren Falle sind die Ringe erweitert in den Quadranten, durch welche die Längsrichtung des Glimmers nicht geht, im letzteren Falle in denjenigen, welche durch die Längsrichtung desselben halbirt werden.

Dieselbe Glimmerplatte kann auch dazu dienen, das Zeichen der Doppelbrechung zu bestimmen bei einer zweiaxigen Krystallplatte, welche senkrecht zur ersten Mittellinie geschliffen ist und daher im convergenten Licht die beiden Axen zeigt. Man stellt zu diesem Zweck die Krystallplatte so im Instrument ein, dass ihre Axenebene der Polarisationsebene des einen Nicols parallel ist, dass sie also die Lemniscaten durchschnitten von einem schwarzen Kreuz zeigt. Alsdann fügt man zwischen dieselbe und den Analysator die Glimmerplatte ein und beobachtet, wenn der zu untersuchende Krystall positiv, d. h. wenn die erste Mittellinie die Axe der kleinsten Elasticität ist, das in Fig. 94 dargestellte Interferenz-

*) Man findet dieselbe u. a. in der Zeitschr. f. Krystall. 5, 72.

bild, in welchem die Farbenringe in den beiden Quadranten erweitert sind, durch welche das Glimmerblatt, dessen Längsrichtung durch die Linie GG' angedeutet ist, nicht geht. Ist der Krystall dagegen negativ, d. h. ist seine erste Mittellinie die Axe der grössten Elasticität, so erscheint bei derselben Lage das Bild Fig. 95, in welchem die Ringe derjenigen beiden Quadranten erweitert sind, welche von der Längsrichtung des Glimmers halbirt werden. Aus dieser Analogie der Erscheinungen mit derjenigen der einaxigen Krystalle ersieht man schon, dass die Erklärung ebenfalls eine jener analoge sein muss, wenn auch die Herleitung bei einem zweiaxigen Krystall eine weit complicirtere ist. Eine einfache Ueberlegung lehrt indess, dass das Interferenzbild, welches eine Platte senkrecht zur zweiten Mittellinie zeigt (meist nur in Oel zu beobachten), durch eine Viertelundulations-Glimmerplatte gerade die entgegengesetzte Veränderung erfahren muss. Die zweite Mittellinie eines positiven Krystalls zeigt daher das Bild Fig. 95, die eines negativen Fig. 94 *).

Fig. 94.

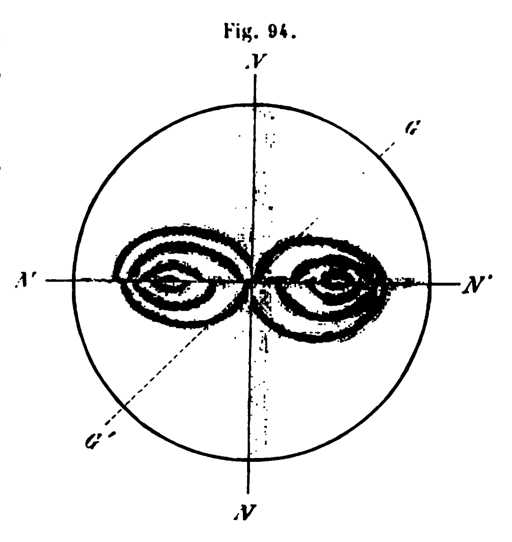


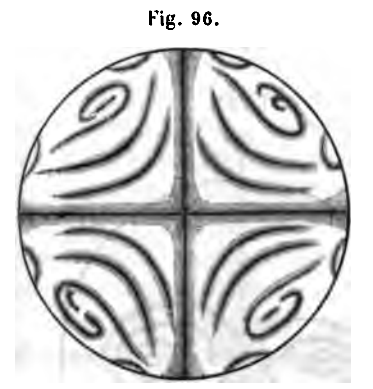
Fig. 95.

*) Man bezeichnet deshalb ziemlich allgemein eine Mittellinie, welche, mit der Viertelundulations-Glimmerplatte untersucht, die Erscheinung Fig. 94 zeigt, als positiv, eine solche, welche die Erscheinung Fig. 95 zeigt, als eine negative, doch ist diese Bezeichnung keine ganz correcte, da die Unterscheidung von »positiv« und »negativ« sich, wie aus der Erklärung S. 91—92 hervorgeht, auf die Aehnlichkeit im optischen Verhalten des ganzen Krystalls mit dem eines einaxigen positiven oder negativen, also nicht auf eine bestimmte Richtung bezieht. Beobachtet man um eine Mittellinie die Erscheinung Fig. 94 und bezeichnet jene als »positive Mittellinie« oder »Mittellinie mit positiver Doppelbrechung«, so bedeutet dieses streng genommen nur, dass diese Mittellinie die Axe der kleinsten Elasticität sei, dass also der Krystall ein positiver sein würde, wenn die Mittellinie die Halbirende des spitzen Axenwinkels wäre.

§. 28. **Herstellung einaxiger und circularpolarisirender Medien aus Combinationen zweiaxiger.** Wir haben in dem Glimmer eine Art zweiaxiger Krystalle kennen gelernt, von welchem man durch seine Spaltbarkeit Platten von jeder beliebigen Dicke herstellen kann, welche senkrecht zur ersten Mittellinie der optischen Axen sind. Legt man zwei einigermaassen dicke Glimmertafeln so übereinander, dass ihre optischen Axenebenen 90° mit einander bilden, und bringt diese Combination in das Polarisationsinstrument mit convergirendem Lichte, so erblickt man vier Axenbilder, mit nur wenig gestörten Lemniscaten; schichtet man aber mehr solcher Paare so übereinander, dass je zwei aufeinander liegende Glimmerplatten rechtwinkelig gekreuzt sind, so erblickt man schon bei 4—5 Paaren eine Interferenzfigur, wie sie in Fig. 96 dargestellt ist, und welche grosse Aehnlichkeit mit derjenigen (Fig. 5 der Tafel) besitzt, die ein Krystall zeigt, dessen optische Axenebenen für verschiedene Farben senkrecht zu einander stehen.

Eine ganz andere Interferenzerscheinung erhält man dagegen, wenn die einzelnen, kreuzweise übereinander geschichteten Glimmerlamellen so dünn sind, dass die beiden durch Doppelbrechung in einer solchen entstehenden Strahlen weniger als eine Wellenlänge Phasendifferenz erhalten. Fallen die Hauptschnitte des Glimmers mit den beiden gekreuzten Nicols des Instrumentes zusammen, so beobachtet man nämlich ein Interferenzbild, welches vollkommen mit dem einer senkrecht zur optischen Axe geschliffenen Platte eines einaxigen Krystalls übereinstimmt, also aus kreisförmigen Farbenringen, durchschnitten von einem dunklen Kreuz, besteht.

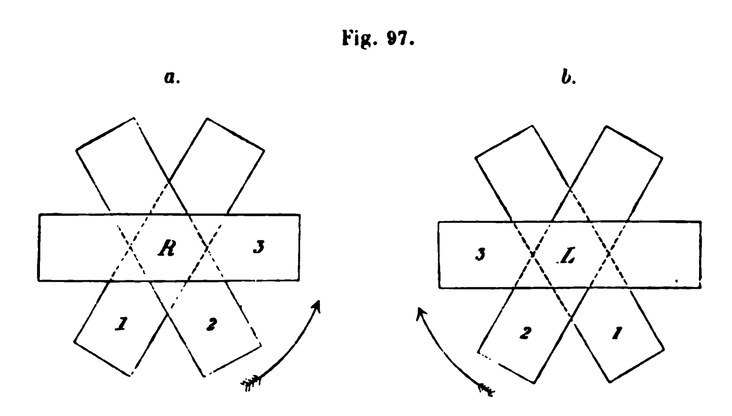
Fig. 96.



Wie Reusch gezeigt hat, kann man auch die Erscheinungen einaxiger circularpolarisirender Krystalle nachahmen mit Hülfe solcher sehr dünner Glimmertafeln. Zu diesem Zwecke muss man sie so aufschichten, dass die Längsrichtungen, welche der Axenebene parallel sind, also mit der zweiten Mittellinie zusammenfallen, bei zwei benachbarten 60° bilden, und die Platten entweder eine von links nach rechts aufsteigende, Fig. 97*a*, oder eine von rechts nach links aufsteigende Treppe bilden, Fig. 97*b*. Diese Präparate verhalten sich nun in der Mitte, wo das Licht durch alle drei Arten von Platten hindurchgeht, wie circularpolarisirende Krystalle, und zwar *R* wie ein rechts-, *L* wie ein linksdrehender Quarz. Beide Präparate auf einander gelegt, zeigen die Airy'schen Spiralen. Die Erscheinungen gleichen denen des Quarzes um so vollkommener, je dünner die Glimmerplatten und je grösser ihre Anzahl ist. So fertigt z. B. Herr Steeg, Optiker in Homburg v. d. H., derartige Combinationen, aus 30 Lamellen bestehend,

welche so dünn sind, dass die Phasendifferenz der doppeltgebrochenen Strahlen in einer solchen nur $\frac{1}{4}\lambda$ beträgt; ein solches Präparat besitzt das Drehungsvermögen einer 8 mm dicken Quarzplatte.

Fig. 97.



In der Natur, besonders in vulkanischen Gesteinen, finden sich oft Kugeln (Sphärolithen) von radialfasriger Textur, deren einzelne im Centrum der Kugel zusammenstossende Fasern je aus einem Krystall bestehen. Schleift man nun aus einem solchen Gebilde eine sehr dünne centrale Platte, und wird jede der radial gestellten, sie zusammensetzenden Fasern von einem einaxigen Krystall, dessen Längsrichtung parallel der optischen Axe, oder von einem zweiaxigen, dessen Längsrichtung eine optische Elasticitätsaxe ist, gebildet, so zeigt eine solche Platte im parallelen Lichte zwischen gekreuzten Nicols eine Interferenzerscheinung, welche an diejenige der homogenen optisch einaxigen Krystallplatten erinnert, nämlich ein dunkles Kreuz, dessen Arme den Hauptschnitten der Nicols parallel sind. Die Erklärung dieser Erscheinung ist eine sehr einfache: diejenigen Fasern, deren Längsrichtung den Polarisationsebenen der Nicols parallel geht, müssen offenbar, da ihre Schwingungsrichtungen parallel und senkrecht zur Längsrichtung sind, dunkel erscheinen, nahezu auch die unmittelbar benachbarten, da deren Schwingungsrichtungen nur wenig mit denen der Nicols divergiren; je grösser indess der Winkel einer Faser mit jenen ist, desto mehr hellt sie das polarisirte Licht auf, und am meisten ist dies der Fall mit den 45° mit jenen bildenden Fasern. In Folge dessen müssen von der Mitte des radialfasrigen Gebildes vier schwarze, nach aussen breiter werdende Arme ausgehen, welche die Fläche in vier Quadranten theilen, deren Helligkeit auf dem mittleren Radius am grössten ist und nach den dunklen Armen hin abnimmt. Da derartige Sphärolithe oft so klein sind, dass selbst bei mikroskopischer Betrachtung der Querschnitte ihre Zusammensetzung aus Fasern nicht erkennbar ist, so kann die beschriebene, bei einem solchen Körper, wenn gekreuzte Nicols angewendet werden, stets eintretende Erscheinung dazu dienen, den radialfasrigen Charakter

eines Sphärolithen zu erkennen. Von dem schwarzen Kreuz der einaxigen Krystalle unterscheidet sich das Phänomen dadurch, dass es im parallelen Lichte erscheint (jenes im convergenten) und dass es an den Ort gebunden ist, also bei einer Verschiebung des Sphärolithen sich mit verschiebt, während jenes unverändert bleibt, wenn man die Krystallplatte in ihrer Ebene verschiebt; es wird dann nur von anderen Theilen der Platte, welche sich aber in derselben Richtung ebenso verhalten, hervorgebracht. Diese Interferenzerscheinung lässt sich sehr leicht nachahmen, wenn man einen parallel seiner Längsrichtung auslöschenden Krystall auf einen radialen Ausschnitt einer undurchsichtigen Scheibe aufkittet und diese zwischen zwei gekreuzten Nicols rasch rotiren lässt, wobei der Krystall schnell nach einander die Lage der einzelnen Fasern einer radialfasrigen Platte einnimmt.

Bei der Erklärung des beschriebenen Phänomens ist vorausgesetzt worden, dass man es mit einer durch das Centrum des Sphärolithen gehenden Platte zu thun habe, welche so dünn ist, dass sie nur aus einer ihrer Ebene parallelen Schicht radial gestellter Fasern besteht; auch wenn diese Bedingung nur nahezu erfüllt ist und die Fasern optisch einaxig sind, so werden die in verschiedenen Abständen von der Mitte das Präparat durchsetzenden Lichtstrahlen die einzelnen Fasern quer, d. i. nahezu senkrecht zur optischen Axe durchlaufen, also nahezu die gleiche Phasendifferenz erhalten. Ist aber die Platte dicker und geht daher eine, oder gehen beide Flächen derselben nicht durch das Centrum des Sphärolithen, so besteht das Präparat in der Mitte aus senkrecht stehenden, rings um diese Mittelaxe aus geneigten Fasern, deren Neigung zunimmt mit ihrer Entfernung von der Mitte. Die durch das Centrum gehenden Strahlen durchsetzen die Krystalle also parallel der optischen Axe, die seitlich durchgehenden unter einem gewissen Winkel mit dieser Richtung, letztere werden folglich in zwei Strahlen zerlegt, deren Phasendifferenz zunimmt mit dem Abstande, den die betreffende Stelle vom Centrum des ganzen Sphärolithen besitzt. Die Folge davon ist, dass wir im parallelen Lichte innerhalb der Peripherie eines solchen Körpers nicht nur ein dunkles Kreuz, sondern auch kreisförmige Farbenringe erblicken, deren Erklärung ganz analog derjenigen bei den homogenen einaxigen Krystallen ist, die aber natürlich, wie das Kreuz, an die betreffende Stelle des Präparates gebunden sind. Da zweiaxige Krystalle, wenn sie sich zu radialfasrigen Sphärolithen zusammensetzen, diese Erscheinung nicht zeigen (weil bei ihnen die zur Längsrichtung normalen Richtungen nicht mehr optisch gleichwerthig sind), so kann dieselbe dazu dienen, zu erkennen, dass die einen Sphärolithen bildenden Fasern optisch einaxig sind, und da ferner die Erscheinung durch eine Viertelundulations-Glimmerplatte ganz in derselben Weise beeinflusst wird, wie die Interferenzfigur eines homogenen einaxigen Krystalls (s. S. 126 f.), so ist man mit Hülfe derselben sogar im Stande, den Sinn der Doppelbrechung der den Sphärolithen zusammensetzenden Krystalle zu bestimmen.

§. 29. **Doppelbrechung in amorphen Körpern durch Druck oder Spannung hervorgebracht.** Nach unseren Annahmen über die Natur des Lichtes steht die Elasticität des Aethers unter dem Einflusse der Elasticität und Dichte des Körpers, zwischen dessen Theilchen er sich befindet. Werden diese geändert, so muss darnach auch jene eine Aenderung erfahren. Unterwerfen wir daher einen amorphen Körper einem allseitig gleichmässigen Drucke, wodurch derselbe ein geringeres Volumen, also grössere Dichte annimmt, so wird der Aether in demselben zwar auch, wie vorher, nach allen Richtungen gleiche Elasticität haben, aber die Grösse dieser Elasticität, also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem Körper wird sich geändert haben. Lassen wir dagegen auf einen amorphen Körper nur in einer bestimmten Richtung einen Druck einwirken, so muss der Körper in dieser eine andere optische Elasticität annehmen, als in denjenigen, in welchen der Druck nicht wirkt, der Körper ist also dann nicht mehr isotrop. Im Glas z. B. wird die optische Elasticität in einer Richtung vergrössert durch einen in dieser wirkenden Druck. Pressen wir einen aus Glas hergestellten Würfel von zwei Seiten aus so zusammen, dass der Druck an allen Stellen der beiden gegenüberliegenden Seitenflächen gleichmässig wirkt, so ist an allen Stellen in seinem Innern die optische Elasticität am grössten in der Richtung des Druckes, nimmt von dieser aus nach allen Seiten ab und ist am kleinsten senkrecht dazu, der Glaswürfel muss also genau dieselben optischen Eigenschaften annehmen, wie sie ein negativer einaxiger Krystall besitzt*). Durch Druck nimmt das Glas also negative Doppelbrechung an. Eine Spannung in einer bestimmten Richtung bewirkt natürlich eine Verkleinerung der optischen Elasticität, durch eine solche wird das Glas positiv doppelbrechend.

Die Erscheinungen der Doppelbrechung, in einem amorphen Körper durch Druck und Spannung hervorgebracht, und zwar beides gleichzeitig, kann man am einfachsten durch folgenden Versuch zur Anschauung bringen. Man nimmt zwei Spiegelglasstreifen von 2—3 Decimeter Länge, ca. ½ Decim. Breite und 5—6 m Dicke, legt zwischen dieselben einen Metalldraht und krümmt sie, am besten durch Klemmschrauben, allmählich bis zur Berührung an den Enden, so dass sie einander die concaven Seiten zukehren (s. folg. S. Fig. 98, welche dieselben von der Seite und von oben darstellt).

Durch diese Krümmung sind die äusseren, convexen Flächen der Platten

*) Sehr schön kann man diese Wirkung des Druckes an weicher Gelatine, einer ebenfalls amorphen Substanz, nachweisen, wenn man eine kreisrunde Platte derselben zwischen Glasplatten auf den Objectträger des Nörremberg'schen Polarisationsapparates bringt und alsdann das Ocularrohr so weit herabschraubt, dass die Platte zusammengepresst wird, dieselbe zeigt dann die normale Interferenzfigur eines einaxigen Krystalls. Eine Mischung von Wachs und Harz, zwischen zwei Glasplatten mässig gepresst, verhält sich ebenso, und ein solches Präparat zeigt die Erscheinung sogar dauernd.

grösser, die inneren concaven dagegen kleiner geworden, als sie vorher waren, jene sind also in der Längsrichtung gespannt, diese in derselben Richtung zusammengepresst Die Fig. 99 zeigt dies deutlicher, da hier die Krümmung so stark dargestellt ist, wie sie mit Glasstreifen in Wirklichkeit nicht vorgenommen werden kann. In der äussersten Glasschicht, z. B. bei a, ist die Spannung || ll gerichtet, also ist die optische Elasticität an dieser Stelle am kleinsten || ll, am grössten (nämlich gleich der im ungepressten Zustande) || qq. An einer weiter nach innen liegenden Stelle b ist immer noch eine Verlängerung nach ll, jedoch eine geringere, vorhanden; die optische Elasticität ist also || ll am kleinsten, senkrecht dazu, || qq, am grössten, aber die Differenz beider ist kleiner. Ungefähr in der Mitte des Glasstreifens bei c und auf allen Punkten der durch c gehenden Linie CcC', wird jene Differenz Null sein, es ist dies diejenige Linie, welche im ungebogenen Zustand des Glasstreifens die gleiche Länge besitzt, also weder eine Pressung noch eine Spannung erfahren hat. Auf der concaven Seite dagegen ist der Glasstreifen durch die Biegung in seiner Längsrichtung zusammengepresst, und zwar in der Linie DD' weniger, als in JJ', denn letztere Linie ist von allen die kürzeste geworden. In d sowohl als in i ist durch die Pressung die Elasticität || $l'l'$ am grössten, senkrecht

Fig. 98.

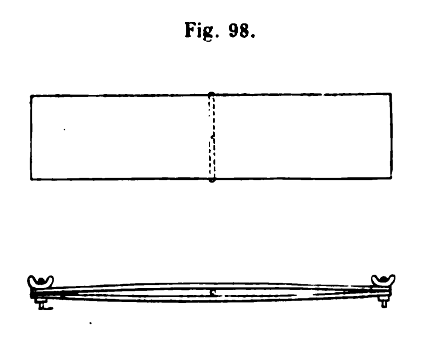


Fig. 99.



dazu || $q'q'$ am kleinsten, aber in i ist die Differenz beider im Maximum. Der Glasstreifen muss also in seiner ganzen Dicke doppeltbrechend sein, bis auf eine Zone, ungefähr in der Mitte; die Doppelbrechung ist am stärksten in der äussersten und der innersten Zone, aber in der einen negativ, in der anderen positiv, und sie nimmt von da an Stärke ab nach Innen bis zu jener neutralen Zone, wo sie gleich Null wird. Bringen wir die so gebogenen Glasstreifen nun derart zwischen zwei gekreuzte Nicols (in das Polarisationsinstrument mit parallelem Licht), dass die Lichtstrahlen parallel der Längsrichtung des Drahtstückes Fig. 98, also durch eine etwa $\frac{1}{2}$ Decim. dicke Glasschicht hindurchgehen, so werden alle Strahlen, mit Ausnahme der in die neutrale Zone fallenden, in je zwei polarisirte zerlegt, welche parallel ll und qq schwingen und sich mit verschiedener

Geschwindigkeit fortpflanzen. Eine noch geringere Biegung, als sie Fig. 98 darstellt, genügt bei den angegebenen Dimensionen bereits, den beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen in der innern und äussern Grenzschicht beim Austritt eine Phasendifferenz von mehreren Wellenlängen zu verleihen, in den der Mitte näheren Zonen natürlich weniger. In einem bestimmten Abstand von der neutralen Zone wird dieselbe genau $= \lambda$ sein, dort wird also bei gekreuzten Nicols vollständige Vernichtung des Lichtes stattfinden, wie in der einfachbrechenden Zone selbst, ebenso in derjenigen, wo die entstehende Phasendifferenz $= 2\lambda$ ist u. s. f. Stellt man die Längsrichtung der Glasstreifen einem der Nicols parallel, so werden natürlich alle Stellen derselben dunkel erscheinen. In jeder anderen Stellung dagegen müssen, wenn das angewandte Licht homogenes war, zwischen den Zonen mit 0, λ, 2λ u. s. f. Phasendifferenz, helle Zonen auftreten, deren Helligkeit am grössten in der Mitte zwischen zwei dunklen sein muss, da dort die Phasendifferenz resp. $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$ u. s. f. ist. Den grössten Unterschied der Intensität zwischen hellen und dunklen Zonen erhält man selbstverständlich, wenn die Längsrichtung der Glasstreifen 45° mit den Schwingungsrichtungen der Nicols bildet.

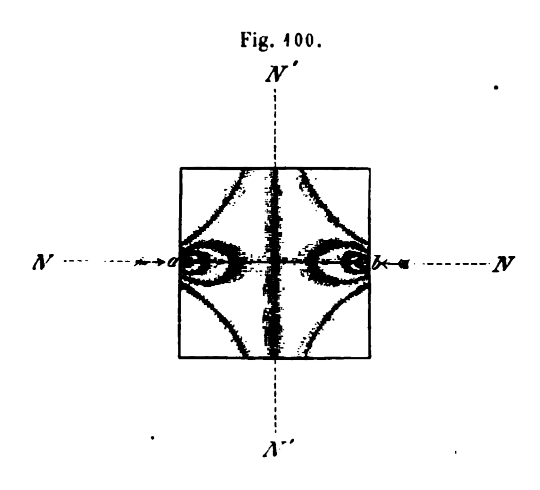
Hieraus ergiebt sich ganz von selbst die Erscheinung im weissen Licht: In der Mitte des Glasstreifens erscheint die neutrale Zone in der ganzen Länge schwarz, zu beiden Seiten, ihr und den Aussenflächen der Glasstreifen parallel, Farbenstreifen, von der Mitte aus nach beiden Seiten genau in derselben Reihenfolge der Farben, wie sie (im convergenten Licht) in den Farbenringen der einaxigen Krystalle, senkrecht zur Axe geschnitten, auftreten.

Presst man ein quadratisches Stück Glas nicht gleichmässig von zwei gegenüberliegenden Flächen, sondern nur von zwei Stellen aus zusammen und bringt es so in paralleles polarisirtes Licht bei gekreuzten Nicols, dass die Gerade zwischen jenen beiden Punkten 45° mit den Nicols einschliesst, so entsteht eine Aufhellung, bei stärkerem Drucke eine Farbe, in der Nähe der beiden gepressten Stellen. Diese Aufhellung wird aber nach allen Seiten von da aus schwächer, d. h. das Glas ist unmittelbar bei denselben am stärksten zusammengepresst, und der Druck nimmt ab mit der Entfernung von ihnen, der mittlere Theil ist gar nicht von ihnen betroffen worden, bleibt also dunkel. Wird jedoch ein stärkerer Druck in der Richtung der Pfeile Fig. 100 s. folg. S. ausgeübt, so werden die benachbarten Glastheilchen in derselben Richtung eine um so viel grössere optische Elasticität haben, als senkrecht dazu, dass die beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen um mehrere Wellenlängen gegen einander verschoben sind, also eine Farbe zweiter oder dritter Ordnung daselbst erscheint; von *a* und *b* aus nimmt aber die Pressung, folglich auch die Stärke der Doppelbrechung nach allen Seiten ab, also erscheinen in grösseren Abständen andere Interferenzfarben, welche zusammen ein Bild isochromati-

scher Curven liefert, Fig. 100, welches mit dem bekannten Lemniscatensystem zweiaxiger Krystalle grosse Aehnlichkeit besitzt.

Umwindet man eine kreisförmige Platte von Glas auf ihrer cylindrischen Seitenfläche mit einer sehr festen Schnur und zieht diese stark an, so wird jene von allen Punkten des Umfanges aus nach dem Centrum hin zusammengepresst, am stärksten am Rand, immer weniger nach der Mitte zu. Im parallelen Licht zeigen alle Stellen gleichen Druckes, d. h. alle auf einem mit dem Umfang der Platte concentrischen Kreise liegenden Punkte, gleiche Farben; es erscheinen also die kreisförmigen isochromatischen Curven mit dem schwarzen Kreuz, genau wie bei den einaxigen Krystallen im convergenten Licht.

Fig. 100.



Durch Erwärmen findet eine Ausdehnung der Körper statt und somit eine Aenderung ihrer Dichte, welche eine solche der optischen Elasticität nach sich zieht. Erwärmt man nun einen isotropen Körper, z. B. ein Stück Glas, ungleichmässig, so treten in demselben durch die ungleichmässige Ausdehnung Spannungen und Pressungen ein, und es zeigen sich dem entsprechende Erscheinungen der Doppelbrechung. Diese lassen sich in dergleichen Körpern auch dauernd machen, indem dieselben stark erhitzt und dann schnell abgekühlt werden (gekühlte Gläser, welche im polarisirten Licht je nach ihrer Gestalt die mannigfaltigsten Interferenzbilder liefern).

Unter den amorphen organischen Körpern giebt es viele, sogenannte colloidale Substanzen, wie Collodium, Gelatine u. a., welche die Eigenschaft haben, beim Uebergang aus dem gelösten in den festen Zustand, bei der Entfernung des Lösungsmittels durch Eintrocknen, eine erhebliche Contraction zu zeigen. Lässt man solche Körper unter Umständen eintrocknen, unter denen sie sich nicht nach allen Richtungen gleichmässig zusammenziehen können, so müssen dieselben in denjenigen Richtungen, in welchen die Contraction verhindert wurde, sich im Zustande der Spannung befinden. Giesst man z. B. eine starke Auflösung von Gelatine warm in einen auf einer Glasplatte liegenden, mit einer Handhabe versehenen Rahmen, hebt nach dem Gerinnen die entstandene Scheibe von der Glasplatte ab und lässt sie in dem Rahmen frei eintrocknen, so haftet dieselbe ringsum an dem letzteren und kann sich also in ihrer Ebene nicht contrahiren. Nach dem vollständigen Erhärten besitzt daher eine solche Platte eine Spannung in allen ihrer Ebene parallelen Richtungen und behält dieselbe auch, wenn sie aus dem Rahmen gelöst wird. Gelänge es, diese Spannung nach allen

jenen Richtungen gleich stark zu machen, so würde eine solche Platte im convergenten polarisirten Lichte das Interferenzbild eines einaxigen Krystalls zeigen müssen; da aber die Gelatine nicht in allen Theilen gleichmässig eintrocknet, oft sich auch an einzelnen Stellen vom Rande ablöst, so sind es immer nur einzelne Partien in grösseren Platten, welche gleichmässig genug gespannt geblieben sind, um jene Erscheinung zu zeigen. Käufliche Gelatineplatten, wie sie von Lithographen gebraucht werden, zeigen zuweilen deutlich das dunkle Kreuz und, wenn mehrere derselben über einander geschichtet werden, auch die Farbenringe; die Doppelbrechung in diesen Platten ist negativ, woraus hervorgeht, dass, ebenso wie im Glase, auch in der Gelatine Spannung eine Verkleinerung der optischen Elasticität hervorbringt. Bei den im Rahmen erstarrten Platten ist dagegen im Allgemeinen die Spannung in verschiedenen der Platte parallelen Richtungen ungleich, daher auch die optische Elasticität innerhalb dieser Ebene verschieden; während dieselbe senkrecht zur Platte am grössten ist, erreicht sie in der Ebene der Platte parallel der Richtung der maximalen Spannung ihr Minimum, senkrecht dazu einen mittleren Werth; die Platte besitzt also die optischen Elasticitätsverhältnisse eines zweiaxigen Krystalls. In der That zeigen alle Stellen einer solchen Platte, in denen auf eine gewisse Erstreckung hin die Spannungsverhältnisse nahezu constant sind, im convergenten polarisirten Lichte das Interferenzbild zweiaxiger Krystalle, verschiedene Stellen einer und derselben Platte aber mit verschiedenem Axenwinkel und verschiedener Richtung der Axenebene, weil mit dem Ort in der Platte auch das Verhältniss, in welchem die Spannung nach verschiedenen Richtungen steht, und die Orientirung der Maximalspannung wechselt; endlich hängt die Vertheilung der Spannungsverhältnisse natürlich auch ab von der Form des Rahmens, in welchem die Erstarrung erfolgte. Bei dünnen Platten reducirt sich wegen der schwachen Doppelbrechung die Interferenzerscheinung auf das Auftreten des dunklen Kreuzes resp. der Hyperbeln auf hellem Grunde (je nachdem die optische Axenebene an der betreffenden Stelle einem Nicolhauptschnitte parallel geht oder beide schief durchschneidet); man beobachtet daher gleichsam nur den mittleren Theil der in Fig. 76 *b* und 77 *b* dargestellten Erscheinung; bei dickeren Platten treten aber auch die Farbenringe in das Gesichtsfeld. Aehnliches Verhalten zeigen: Horn, Thierblase (besonders mehrfach über einander gelegt) und andere organische Substanzen. Endlich enthalten auch die gekühlten Gläser Stellen, welche deutliche Axenbilder liefern, und diese lassen da, wo der Axenwinkel einen grösseren Werth erreicht, auch eine deutliche Dispersion der Axen erkennen, woraus zu schliessen, dass der Druck die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes verschiedener Farbe in ungleicher Weise beeinflusst.

§. 30. **Aenderung der optischen Eigenschaften der Krystalle durch Druck oder Spannung.** Die Wirkungen, welche Druck oder Spannung auf die optischen Eigenschaften amorpher Körper ausüben, müssen

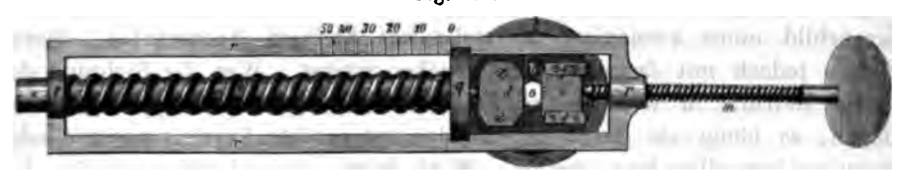
dieselben natürlich auch bei krystallisirten Medien hervorbringen, nur mit dem Unterschiede, dass die letzteren mechanischen Kräften nach verschiedenen Richtungen einen verschiedenen Widerstand entgegensetzen.

a) Betrachten wir zunächst den Fall der einfach brechenden Krystalle. In einem solchen wird ein, in einer bestimmten Richtung ausgeübter Druck, ganz ebenso wie im Glase, Doppelbrechung erzeugen, aber die Grösse derselben wird bei gleichem Drucke verschieden sein, wenn die Richtung, in welcher der Druck wirkt, eine ungleiche ist. Contractionen, wie sie die Ursache der im vorigen §. beschriebenen Erscheinungen bei den colloidalen amorphen Substanzen bilden, wenn auch in einem weit geringeren Grade, scheinen auch bei manchen krystallisirten Körpern während des Actes der Krystallisation einzutreten und zu bewirken, dass dieselben eine schwache Doppelbrechung zeigen, welche man, weil sie mit der gesetzmässigen Abhängigkeit der physikalischen Eigenschaften von der Symmetrie der Krystalle im Widerspruch steht, als anomale Doppelbrechung bezeichnet hat. In den Krystallen des Alauns z. B. tritt diese Erscheinung in der Weise auf, als sei die Substanz des Krystalls gespannt innerhalb gewisser Ebenen, parallel denen die schichtenweise Auflagerung beim Aufbau desselben stattfand. Alsdann müsste die Vertheilung einer solchen anomalen Doppelbrechung in einer gewissen Abhängigkeit von der äusseren Form eines solchen Krystalls stehen, und dies ist in der That bei den hierher gehörigen Substanzen der Fall. Für die Erklärung dieser Erscheinung sind deshalb die Versuche von Interesse, welche man mit amorphen Körpern angestellt hat, denen künstlich eine den Krystallen entsprechende Form gegeben wurde. Klein und Ben Saude fertigten zu diesem Zwecke Hohlformen von Krystallmodellen, füllten dieselben mit Gelatine, nahmen letztere nach 2—3tägigem Trocknen heraus und schnitten daraus in bestimmten Richtungen Platten, welche zur Verhinderung weiteren Eintrocknens in Canadabalsam eingelegt wurden. Diese zeigten denn nun in der That Doppelbrechungserscheinungen, analog denen solcher optisch anomaler Krystalle, welche dieselben Formen wie die Gelatinemodelle besitzen, besonders lassen sie eine Theilung in Sectoren mit verschiedenen Auslöschungsrichtungen erkennen, deren Grenzen eine von der Form des Modells abhängige Lage besitzen.

b) Einaxige Krystalle, in der Richtung ihrer optischen Axe einem gleichmässigen Drucke unterworfen, müssen stärker oder schwächer doppeltbrechend werden, je nachdem das Maximum oder das Minimum der Elasticität des Aethers mit jener Richtung zusammenfällt, müssen aber immer optisch einaxig bleiben. Ganz anders wird dagegen das Verhalten eines solchen Krystalls sein müssen, wenn auf ihn ein Druck senkrecht zur Axe ausgeübt wird. Zur Untersuchung der in diesem Falle eintretenden Erscheinungen dient der von Bücking construirte, in Fig. 101 abgebildete Apparat, welcher zugleich gestattet, die Stärke des auf den Krystall ausgeübten Druckes zu messen.

Derselbe besteht zunächst in einer in der Mitte durchbohrten Messingscheibe *b*, welche an Stelle des drehbaren Krystallträgers mit dem Nörremberg'schen Polarisationsapparate verbunden werden kann. Auf dieser ist eine Stahlplatte *d* festgeschraubt, gegen welche die zu untersuchende, über der Oeffnung *o* befindliche Krystallplatte angelegt und mittelst einer zweiten, zwischen den abgeschrägten Schienen *f* verschiebbaren Platte *e* durch Anziehen der Schraube *m* zusammengepresst wird. Letztere geht durch einen von Messing gefertigten starken Rahmen *r*, welcher an der

Fig. 101.



entgegengesetzten Seite bei *t* eine kreisförmige Durchbohrung besitzt; in dieser ist ein Messingcylinder *n* verschiebbar, dessen Ende eine Scheibe *q* trägt, in welche der Rahmen *r* so eingelassen ist, dass *q* sich nur verschieben, nicht drehen lässt. Um den Cylinder *n* ist eine starke Spiralfeder gewunden, welche in gespanntem Zustande gegen den Querbalken *t* des Rahmens und gegen die Messingplatte *q* drückt; letztere trägt auf der dem Cylinder entgegengesetzten Seite in ihrer Mitte einen Bolzen, der in eine Vertiefung der Platte *d* hineinragt. Wird nun nach Einfügung der Krystallplatte die Schraube *m* angezogen, so wird der Rahmen *r* dem Kopfe der Schraube genähert und dadurch die Spiralfeder comprimirt; ihre Spannung wirkt durch *q* auf die Platte *d*, sowie durch *m* auf die Platte *e* und somit auch auf den zwischen den beiden Platten befindlichen Krystall. An der einen längeren Seite des Rahmens ist eine Theilung angebracht, deren Nullpunkt derjenigen Stellung der Scheibe *q* entspricht, in welcher die Feder ungespannt ist: an derselben kann die Spannung der Feder und damit der auf den Krystall ausgeübte Druck direct in Kilogrammen abgelesen werden.

Mit Hülfe dieses Apparates ist es leicht, sich von dem im Anfang des vorigen §. angeführten optischen Verhalten eines gepressten Glaswürfels*) zu überzeugen. Um nun dasjenige eines einaxigen Krystalls zu prüfen, schleift man aus einem solchen einen kleinen Würfel derart, dass zwei Seitenpaare desselben der optischen Axe parallel, das dritte dazu senkrecht ist. Bringt man diesen Würfel so zwischen die beiden Stahlplatten *d* und *e*, dass zwei Flächen der ersteren Art an den letzteren anliegen und die optische Axe des Krystalls senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht, so erfährt der

*) Es ist aber, um einem solchen überall gleichmässige Pressung zu ertheilen, nothwendig, dass derselbe sehr genau planparallel und ebenso die pressenden Stahlflächen vollkommen eben seien, weil sonst der Druck nur an einzelnen Stellen angreift.

Krystall beim Anziehen der Schraube eine in allen Theilen gleichmässige Pressung, deren Richtung senkrecht zu seiner optischen Axe steht. Ist nun der Druckapparat mit dem Polarisationsinstrument (für convergentes Licht) verbunden, so erblickt man in diesem die normale Interferenzerscheinung des einaxigen Krystalls, so lange die Platte noch keiner Pressung unterworfen ist. Zieht man dagegen die Schraube an, so beginnen die kreisförmigen Farbenringe sich elliptisch zu verlängern, und wenn die Richtung der Verlängerung diagonal zu den Hauptschnitten der Nicols des Instrumentes liegt, so gehen die Arme des schwarzen Kreuzes in der Mitte auseinander und verwandeln sich in Hyperbeln, kurz, es entsteht das Interferenzbild eines zweiaxigen Krystalls mit kleinem Axenwinkel, dessen Grösse jedoch mit Zunahme des Druckes wächst. Was die Richtung der Ebene betrifft, in welcher die beiden nun vorhandenen optischen Axen liegen, so hängt sie davon ab, ob der untersuchte Krystall positive oder negative Doppelbrechung besass. Wird durch einen Druck, wie in den im vorigen §. besprochenen amorphen Körpern, die optische Elasticität in der betreffenden Richtung vergrössert, so muss bei den beiden Arten von einaxigen Krystallen die Lage der entstehenden optischen Axenebene gerade die entgegengesetzte sein, wie leicht einzusehen. Bei den positiven Krystallen nämlich ist die kleinste optische Elasticität in der Axe vorhanden, in allen innerhalb der dazu senkrechten Ebene liegenden Richtungen die grösste; wird nun in einer der letzteren die Elasticität durch den Druck noch weiter vergrössert, so wird diese Richtung die Axe der grössten, die dazu senkrecht in derselben Ebene gelegene die der mittleren, die frühere optische Axe bleibt die Richtung der kleinsten Elasticität; da die optischen Axen eines zweiaxigen Körpers stets in der Ebene der grössten und kleinsten Elasticität liegen, so müssen die beiden Axen in Folge des Druckes in einer Ebene aus einander gehen, welche der Druckrichtung parallel ist. Da der durch Pressung hervorgebrachte Axenwinkel immer klein ist, so bleibt die frühere optische Axe stets erste Mittellinie, also ist der zweiaxige Krystall, welcher aus dem positiven einaxigen entsteht, ebenfalls positiv. Bei den negativen Krystallen enthält die zur optischen Axe senkrechte Ebene alle Richtungen der kleinsten Elasticität; in der Druckrichtung wird die Elasticität vergrössert, folglich wird diese jetzt mittlere, die dazu senkrecht in derselben Ebene gelegene wird kleinste, die frühere optische Axe bleibt die der grössten Elasticität; die beiden optischen Axen gehen demnach in einer zur Druckrichtung senkrechten Ebene aus einander, und es entsteht ein negativ zweiaxiger Krystall.

Dieses Verhalten zeigen nun, obiger Voraussetzung über die Wirkung des Druckes auf die optische Elasticität der Krystalle entsprechend, alle bisher untersuchten einaxigen Krystalle, und zwar haben die Versuche Bücking's gelehrt, dass ein verhältnissmässig geringer Druck im Stande ist, in einem einaxigen Krystall einen kleinen Axenwinkel hervorzurufen, dass aber ein sehr viel stärkerer Druck nöthig ist, um den Axenwinkel

weiter zu vergrössern, dass also die Aenderung des letzteren nicht proportional dem Drucke vor sich geht.

Wie unter den Krystallen der ersten Klasse sich anomale vorfinden, welche Doppelbrechung zeigen, so kommen auch unter denjenigen, welche der Symmetrie ihrer Krystallformen nach zu den optisch einaxigen gehören, solche vor, deren optische Eigenschaften hiermit in Widerspruch stehen. Dieselben besitzen gewöhnlich zwar in einzelnen Partien die normale Einaxigkeit, in den übrigen jedoch erweisen sie sich als zweiaxig, und zwar oft mit um so grösserem Axenwinkel, je weiter man sich von den ersteren Partien entfernt; die aus solchen Krystallen geschnittenen Platten erscheinen zumeist, im polarisirten Lichte betrachtet, in mehrere Felder getheilt, in denen die Lage der optischen Axenebene verschieden ist, und welche durch normal sich verhaltende Schichten von einander getrennt werden. Die Lage der Axenebene in diesen verschiedenen Sectoren zeigt im Allgemeinen eine bestimmte Beziehung zu der äusseren Form des Krystalls, und es liegt also nahe, diese Anomalien der optischen Eigenschaften in derselben Weise, wie bei den anomalen Krystallen der ersten Klasse, durch Spannungen zu erklären, hervorgebracht von Contractionen, welche in bestimmten Richtungen während der Bildung des Krystalls stattfanden.

Mallard hat in neuerer Zeit diese Anomalien auf eine andere Art zu erklären versucht: Sehr häufig stellt die regelmässige Verwachsung mehrerer Krystalle ein Gebilde dar, welches äusserlich einer einfachen Krystallform von höherer Symmetrie vollkommen gleicht und sich von einem solchen nur dadurch unterscheidet, dass es, wie die optische Untersuchung zeigt, aus mehreren Theilen von verschiedener Orientirung zusammengesetzt ist. In solchen Gebilden steht demnach ebenfalls die optische Beschaffenheit des Innern im Widerspruch mit der Symmetrie der äusseren Gestalt, und es ist unzweifelhaft, dass manche von den Krystallen, welche man als »optisch anomale« bezeichnet hat, nichts Anderes sind als Verwachsungen mehrerer Krystalle von niederer Symmetrie, deren Aussenform anscheinend eine höhere Symmetrie darstellt (Pseudosymmetrie). Diese Deutung hat aber nun Mallard auf alle Substanzen angewendet, deren optische Eigenschaften mit der Symmetrie der äusseren Formen nicht harmoniren, und hat beispielsweise angenommen, dass die ihrer Symmetrie nach einaxigen Krystalle, deren abweichendes optisches Verhalten oben beschrieben wurde, aus mehreren zweiaxigen Krystallen von verschiedener Orientirung zusammengesetzt seien. Um das Auftreten von wirklich einaxigen Partien in denselben zu erklären, nimmt er an, dass in solchen die Substanz der benachbarten Sectoren innig in einander gelagert sei, so dass diese Partien aus demselben Grunde einaxig erscheinen, wie eine Combination zahlreicher, in gekreuzter Stellung über einander gelegter dünner Glimmerlamellen (s. S. 130). Für gewisse der sich so verhaltenden Krystalle, besonders diejenigen, in denen die Grösse des Axenwinkels von Stelle zu Stelle variirt, dürfte jedoch die Erklärung ihrer optischen Anomalie durch Spannung die einfachere sein.

Besonders interessante Resultate liefert die Anwendung eines Druckes auf solche einaxige Krystalle, welche die Polarisationsebene des Lichtes drehen, z. B. Quarz. Dieser ist positiv, erhält also, wenn er senkrecht zur Axe gepresst wird, zwei Axen in der der Druckrichtung parallelen Ebene. Das entstehende Axenbild zeigt dann in der Mitte der die beiden Axen umgebenden Ringe ebenso eine Färbung, welche sich beim Drehen des

Analysators ändert, wie die Mitte des Interferenzbildes einer ungepressten Quarzplatte, daher auch in der Richtung der beiden optischen Axen eine Drehung der Polarisationsebene des Lichtes stattfinden muss. Die Versuche von Mach und Merten haben gezeigt, dass in diesen Richtungen nicht je zwei circular, sondern zwei elliptisch schwingende Strahlen von entgegengesetztem Sinne der Bewegung sich fortpflanzen und beim Austritt sich zu einer einzigen elliptischen Vibration zusammensetzen, deren grosse Bahnaxe im Sinne des Strahles von grösserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit gedreht ist, wobei der Gangunterschied durch den Druck sogar vermehrt worden ist, verglichen mit dem der beiden circularen Strahlen im normalen Quarz.

c) Optisch zweiaxige Krystalle, in der Richtung einer ihrer Elasticitätsaxen einem Drucke unterworfen, müssen, da hierdurch eine der Grössen e_a, e_b, e_c (grösste, mittlere, kleinste Elasticität), also das Verhältniss $e_a : e_b : e_c$, von welchem die Grösse des optischen Axenwinkels abhängt, geändert wird, eine Aenderung des Axenwinkels erfahren. Die bisher mit dem Bücking-schen Apparat untersuchten Krystalle haben gezeigt, dass auch bei ihnen die optische Elasticität durch Druck vergrössert wird. Schleift man z. B. aus einem negativen Krystall einen Würfel, dessen Seiten den drei optischen Hauptschnitten parallel sind, und bringt denselben so in das Instrument, dass die erste Mittellinie senkrecht steht, im Polarisationsapparat also das Interferenzbild mit den Lemniscaten sichtbar ist, und presst den Krystall in der Richtung der mittleren Elasticität, also senkrecht zur Axenebene, so wird die Elasticität in dieser Richtung grösser, nähert sich also der grössten, d. i. derjenigen in der ersten Mittellinie, also muss der Axenwinkel zunehmen. Dreht man nun den Krystall um die erste Mittellinie um 90° und presst ihn von den beiden andern Seitenflächen aus, d. h. in der Richtung der kleinsten Elasticität, so muss diese grösser werden, sich also der mittleren nähern; die beiden zur ersten Mittellinie senkrechten, im Instrument horizontalen Elasticitätsaxen sind folglich dann weniger von einander verschieden, der Krystall nähert sich in seinen optischen Eigenschaften einem solchen, in dem diese beiden Richtungen optisch gleichwerthig sind, d. h. einem einaxigen Krystall, dessen grösste Elasticität in der senkrechten Richtung (parallel der ersten Mittellinie) gelegen ist, der Axenwinkel muss somit kleiner werden. Es leuchtet ein, dass bei einem kleinen Axenwinkel, d. h. wenn e_b und e_c schon von vorn herein wenig verschieden sind, ein gewisser Druck genügen wird, um beide ganz gleich zu machen; alsdann ist der Krystall in einen negativ einaxigen verwandelt. Steigert man den Druck noch weiter, so wird das frühere e_c grösser als e_b und somit die Axe der mittleren Elasticität, die optischen Axen müssen also wieder aus einander gehen, aber in einer zu der früheren senkrechten Ebene. Bei demjenigen Druck, unter welchem $e_b = e_c$, ist aber der Krystall nur einaxig für eine bestimmte Farbe, da die durch Druck hervorgebrachte Aenderung der Fortpflanzungsverhältnisse des

Lichtes für verschiedene Farben eine ungleiche ist; wendet man also einen Druck an, durch den der Krystall für mittlere Farben einaxig wird, so liegen die optischen Axen für den einen Theil des Spectrums noch in der früheren Ebene, für den andern sind sie bereits in der neuen Axenebene aus einander getreten; eine solche Platte verhält sich also, wenn ihre Dispersion gross genug ist, wie die S. 112 beschriebenen Substanzen mit gekreuzten Axenebenen.

Bei positiven Krystallen muss, wie eine analoge Betrachtung lehrt, ein Druck senkrecht zur Ebene der Axen den Winkel derselben verkleinern (bei kleinem Anfangswinkel der Axen den Krystall in einen positiv einaxigen umwandeln), ein Druck parallel der Axenebene den Axenwinkel vergrössern.

Wenn die für die »optisch anomalen« Krystalle der ersten und zweiten Klasse gegebene Erklärung ihrer Anomalie durch Spannung richtig ist, so steht zu erwarten, dass auch unter den zweiaxigen Krystallen solche vorkommen, welche durch eine Contraction während ihrer Bildung eine Aenderung der optischen Elasticität in bestimmten Richtungen erfahren haben. Da ein derartiger Einfluss, in der Richtung einer Elasticitätsaxe wirkend, eine Veränderung des optischen Axenwinkels erzeugt, müssten solche Substanzen in verschiedenen Krystallen und ein und derselbe Krystall an verschiedenen Stellen, die eine verschiedene Spannung besitzen, abweichende Werthe des optischen Axenwinkels liefern. In der That dürften sich hierdurch die oft ziemlich beträchtlichen Differenzen in den Messungen der optischen Axenwinkel erklären, welche sich bei einer und derselben chemisch identischen Substanz zuweilen ergeben.

Wie man aus den vorstehenden Erörterungen dieses und des vorigen §. ersieht, ist ein Theil der durch Druck oder Spannung hervorgebrachten Phänomene leicht von den ihnen ähnlichen, normalen optischen Erscheinungen der doppeltbrechenden Krystalle zu unterscheiden, da jene an bestimmte Stellen des Körpers, diese an bestimmte Richtungen, nicht an die Stelle, gebunden sind. Der mit einer straffen Schnur umspannte Glascylinder (S. 136) zeigt dieselbe Interferenzfigur, wie ein einaxiger Krystall, aber im parallelen Lichte, und dieselbe verschiebt sich mit der Platte, während die eines einaxigen Krystalls im convergenten Lichte erscheint und unverändert bleibt, wenn man die Platte sich selbst parallel verschiebt, da diese sich in allen parallelen Richtungen gleich verhält. In einem homogenen Krystall können wir aus diesem Grunde im parallelen Lichte wohl eine Farbe, Helligkeit oder Dunkelheit nachahmen, aber niemals (wenn alle convergenten Strahlen abgehalten werden) eine Interferenzfigur.

Wirkt jedoch auf einen Körper ein einseitiger Druck an allen Stellen gleichmässig, so werden dadurch Erscheinungen hervorgebracht, welche

vollkommen identisch sind mit denjenigen homogener Krystalle. Hätte eine bei der Bildung eines Krystalls stattgefundene Contraction eine in allen Theilen gleichmässige Spannung desselben erzeugt, so würden wir daher einen solchen Krystall durch Nichts von einem normalen unterscheiden können. Wie indessen die obige Beschreibung der »optisch anomalen« Krystalle zeigt, haben derartige Wirkungen meist an verschiedenen Stellen in verschiedenem Grade stattgefunden und die optischen Eigenschaften erweisen sich daher nicht nur von der Richtung, sondern auch vom Ort im Krystall abhängig.

§. 31. **Die Absorption des Lichtes in Krystallen.** Das Licht erleidet auf seinem Wege in jedem Körper eine Schwächung seiner Intensität, eine theilweise Absorption; ist diese sehr gering, so nennen wir den Körper durchsichtig, ist sie so stark, dass schon nach Zurücklegung einer kurzen Strecke die Lichtbewegung vernichtet ist, so nennen wir ihn undurchsichtig*); zweitens trifft diese Absorption die verschiedenfarbigen Lichtstrahlen in verschiedenem Grade, so dass das aus dem Körper austretende Licht nicht nur nicht mehr die frühere Helligkeit, sondern auch nicht mehr die frühere Farbe hat. Ist die Verschiedenheit der Stärke der Absorption in Bezug auf die verschiedenen Wellenlängen des Lichtes nur sehr gering, so werden dieselben sich zu einem Farbeneindruck zusammensetzen, der von dem des eintretenden Lichtes so wenig verschieden ist, dass wir beide nicht zu unterscheiden vermögen; alsdann nennen wir den Körper farblos. Einen absolut farblosen Stoff giebt es aber ebenso wenig, wie einen absolut durchsichtigen, und selbst bei den uns völlig farblos erscheinenden werden die verschiedenen Farben des Weiss nicht genau in gleichem Grade absorbirt, so dass die stärker absorbirten an Intensität merklich gegen die andern zurücktreten, sobald wir nur das weisse Licht auf einer sehr langen Strecke durch den Körper hindurchgehen lassen, und dass sie dann nicht mehr den Eindruck des Weiss, sondern den einer Farbe liefern. Sehr viele Substanzen absorbiren aber die verschiedenen Lichtarten so verschieden, dass das weisse Licht schon in dünnen Schichten derselben lebhaft gefärbt wird, dies sind diejenigen, die man besonders farbige Substanzen nennt. Manche absorbiren nur Licht einer oder mehrerer bestimmter Wellenlängen, dieses aber bei einiger Dicke der Schicht vollständig, so dass das durch sie hindurchgegangene Licht, durch ein stark dispergirendes Prisma zerlegt, ein Spectrum liefert, welches durch dunkle Streifen unterbrochen ist (Absorptionsspectrum). Andere absorbiren die Mehrzahl der Farben weit stärker, als eine oder mehrere, so dass diese allein im Spectrum als helle Streifen oder Banden erscheinen. Es giebt

*) Hieraus geht hervor, dass beide Worte nur relative Begriffe bezeichnen, und dass es weder einen absolut durchsichtigen, noch einen absolut undurchsichtigen Körper giebt.

aber keinen Körper, der nur das Licht einer bestimmten Wellenlänge hindurchliesse und alle übrigen gleich stark absorbirte, der also zur Erzeugung wirklich einfarbigen Lichtes dienen könnte. Manche rothe Gläser absorbiren zwar alle Farben ausser Roth so gut wie vollständig, aber dass das hindurchgelassene Licht noch aus Strahlen von, wenn auch nicht sehr viel, verschiedener Wellenlänge besteht, geht aus der spectralen Zerlegung hervor, welche stets eine breite rothe Bande liefert. Absolut homogenes Licht erhält man nicht durch Absorption, sondern nur durch Emission von glühenden Körpern, z. B. den früher bereits deshalb erwähnten glühenden Metalldämpfen.

Die Färbung eines Krystalls kann entweder eine allochromatische, seiner Substanz an und für sich nicht zukommende, sondern von der Beimischung eines fremden Stoffs herrührende, — oder eine idiochromatische, d. h. eine solche sein, welche ein nothwendiges Attribut seiner stofflichen Natur ist. Zu letzteren gehören die gelben und rothen Farben der chromsauren Salze und vieler organischer Nitro- und Azoverbindungen, die blauen und grünen Farben der Kupfersalze. Bei der allochromatischen Färbung kann der färbende Körper in isolirten kleinen Partikeln eingestreut sein (sind diese regelmässig gelagert, so veranlassen sie einen Schiller nach bestimmten Richtungen, s. S. 42), welche mittelst des Mikroskops im Dünnschliff des umschliessenden Krystalls erkannt werden können, oder der färbende Körper ist gleichsam aufgelöst (dilut) in dem Krystall vorhanden, wie dies betreffs mancher organischer Farbstoffe der Fall ist, und alsdann verhält sich ein derartig gefärbter Krystall in Bezug auf seine von der Farbe abhängigen optischen Erscheinungen, wie die idiochromatisch gefärbten. Die letzteren, d. h. die an allen Stellen gleich, also homogen gefärbten Krystalle sind es, die im Folgenden betrachtet werden sollen. Ihre Körperfarbe, d. i. die Farbe, welche sie den hindurchgehenden weissen Lichtstrahlen verleihen, ist nur dann nach allen Richtungen im Krystall die gleiche, wenn auch die Fortpflanzung der Schwingungen aller beliebiger Richtungen in gleicher Weise, also gleich schnell, vor sich geht: dies ist aber unter den Krystallen nur der Fall bei der ersten Klasse, den optisch isotropen. Bei denen der zweiten und dritten Abtheilung, den ein- und zweiaxigen, sind die optischen Elasticitätsverhältnisse nach verschiedenen Richtungen verschieden, dem entsprechend auch Art und Grösse der Absorption; bei diesen sind Lichtstrahlen, welche eine gleich dicke Schicht, aber in verschiedener Richtung, durchlaufen haben, verschieden hell und verschieden gefärbt. Die letztere Eigenschaft, nach verschiedenen Richtungen verschiedene Farbe zu zeigen, welche also nur den doppeltbrechenden Krystallen zukommen kann, nennt man Pleochroïsmus, dessen Gesetze besonders von Brewster und Haidinger erforscht worden sind. In Bezug auf ihre Körperfarbe sind sonach die drei Klassen von Krystallen getrennt zu behandeln.

a) Farben der einfach brechenden Krystalle: Die Körperfarbe eines solchen ist nach allen Richtungen dieselbe, wenn das Licht eine gleich dicke Schicht durchlaufen hat.

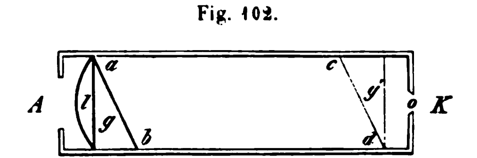
b) Farben der optisch einaxigen Krystalle: Nur diejenigen Strahlen, deren Schwingungsrichtungen gleiche Winkel mit der optischen Axe bilden und welche sich daher im Krystall mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen, erfahren auch die gleiche Absorption. Für das Licht einer bestimmten Farbe ist daher die Absorption am grössten für Schwingungen parallel zur Axe, nimmt ab mit zunehmender Neigung der Schwingungsrichtung gegen die Axe und ist am kleinsten für alle senkrecht zur Axe schwingenden Strahlen — oder das Umgekehrte findet statt: die Minimalabsorption erleiden die parallel der Axe, die Maximalabsorption die senkrecht dazu schwingenden Strahlen. Im Allgemeinen gilt die von Babinet aufgestellte Regel, dass die einaxigen Krystalle mit positiver Doppelbrechung den ersten der beiden auseinandergesetzten Fälle repräsentiren, also den extraordinären Strahl stärker absorbiren, während in den negativen Krystallen die Schwingungen senkrecht zur Axe, also die ordinären Strahlen am meisten geschwächt werden. Kürzer lässt sich diese Regel auch so ausdrücken, dass in einaxigen Krystallen der stärker gebrochene Strahl auch stärker absorbirt wird.

Gehen weisse Lichtstrahlen in der Richtung der optischen Axe durch den Krystall, so erleiden sie eine bestimmte Absorption, je nach der Natur des Krystalls; nennen wir die bei einer bestimmten Dicke entstehende Farbe A. Die Schwingungsrichtung dieser Strahlen ist, wenn auch in allen möglichen Azimuthen, doch stets senkrecht zur Axe, und diese Richtungen sind alle gleichwerthig, entsprechen also derselben Absorption. Ein Lichtstrahl, welcher durch eine gleich dicke Schicht desselben Krystalls, aber senkrecht zur Axe, hindurchgeht, wird in zwei zerlegt, von denen einer senkrecht, der andere parallel zur optischen Axe schwingt. Der erstere, welche Richtung er auch sonst habe, zeigt die Absorptionsfarbe A, der zweite eine andere, welche wir B nennen wollen und welche nach Obigem offenbar von allen Absorptionsfarben desselben Krystalls diejenige ist, welche am meisten von A abweicht. Betrachten wir den Krystall so, dass das Licht durch denselben in der Richtung, senkrecht zur Axe, fällt, so gelangen beide polarisirte Strahlen, der mit der Farbe A und der mit der Farbe B, gleichzeitig in unser Auge, und wir vermögen sie nicht von einander zu trennen, sondern erhalten einen Gesammteindruck einer Farbe, welche wir mit $A + B$ bezeichnen wollen. Die beiden Farben A und $A + B$, d. h. die Körperfarbe des Krystalls parallel und senkrecht zur Axe, sind nun offenbar um so mehr verschieden, je mehr A und B selbst von einander abweichen. In den zwischenliegenden Richtungen ist nun die Körperfarbe des Krystalls auch eine zwischenliegende, um so näher an A, je näher die Richtung, in welcher das Licht hindurchfällt, derjenigen der

Axe ist, und umgekehrt*). Ist die Farbe A wenig von B verschieden, so ist sie noch weniger abweichend von der Mischfarbe $A + B$, und in solchen Fällen scheint, ohne weitere Hülfsmittel betrachtet, der Krystall nach allen Richtungen die gleiche Körperfarbe zu besitzen. Ganz besonders ist dies der Fall bei den sogenannten farblosen Substanzen, weil bei diesen der ganze Betrag der Absorption schon unmerklich ist, ihre Verschiedenheit nach verschiedenen Richtungen sich also jeder Beobachtung entzieht. Starken Pleochroïsmus, d. h. grosse Verschiedenheit der Körperfarbe mit der Richtung, können daher nur stark absorbirende, d. i. lebhaft gefärbte Krystalle zeigen; auch unter diesen giebt es viele, welche nur geringen Grad des Pleochroïsmus besitzen, bei denen also die Körperfarben parallel und senkrecht zur Axe sehr ähnliche sind.

Um in den letzterwähnten Fällen das Vorhandensein des Pleochroïsmus, durch welches zugleich das der Doppelbrechung constatirt ist, zu erkennen, muss man sich eines kleinen Apparates bedienen, welcher von Haidinger construirt worden ist und Dichroskop oder dichroskopische Lupe genannt wird. Derselbe besteht aus einem Rhomboëder von Kalkspath, dessen Durchschnitt *abcd* in Fig. 102 ebenso dargestellt ist, wie in Fig. 28 S. 47, so dass *ab* und *cd* die kurzen Diagonalen zweier gegenüberliegender Rhombenflächen sind. Dieses ist in einer Fassung (einem Messingrohr) befestigt, und vor und hinter demselben je ein Glaskeil, g und g', den Kalkspath berührend, so angebracht, dass die Ein- und Austrittsfläche der Lichtstrahlen senkrecht zu den Rhomboëderkanten *ac* und *bd* stehen, an denselben also keine Brechung derjenigen Strahlen, welche diesen Kanten parallel durch das Instrument gehen, stattfindet.

Fig. 102.

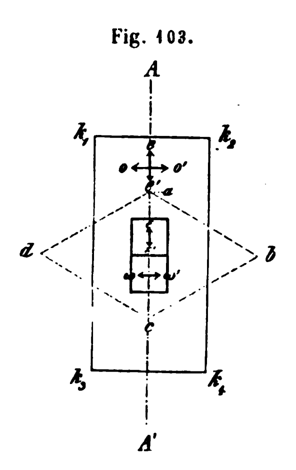


Die Fassung hat vorn eine weite runde Oeffnung zum Hineinsehen, wobei das Auge sich in A befindet, hinten dagegen nur eine 2—3 Millim. lange und breite quadratische Oeffnung o, durch welche das Licht einfällt, wenn dieselbe gegen den hellen Himmel oder eine andere Lichtquelle gerichtet wird. Dicht vor dem Glaskeil g befindet sich eine planconvexe Linse, vermittelst deren das in A befindliche Auge ein vergrössertes virtuelles Bild der hellen Oeffnung o in der Entfernung der deutlichen Sehweite sehen würde, wenn der Kalkspath nicht vorhanden wäre. Durch dessen Doppelbrechung erscheinen jedoch zwei solcher Bilder, und da das ausserordentliche im Hauptschnitt abgelenkt wird, das eine genau über dem andern. Die Länge des Kalkspaths wird nun so gewählt, dass die beiden Bilder sich nicht theilweise decken, sondern der obere Rand des unteren den unteren des oberen Bildes berührt.

*) Es ist daher nicht ganz correct, diese Erscheinung mit dem Namen »Dichroïsmus«, wie vielfach geschieht, zu belegen, weil es sich nicht um zwei Farben handelt, sondern um eine continuirliche Farbenreihe zwischen zwei Extremen.

Hält man nun einen einaxigen Krystall so vor die kleine Oeffnung*), dass die parallel der Längsaxe der Lupe hindurchgehenden Strahlen ihn vorher in einer zu seiner optischen Axe normalen Richtung durchsetzen, und dass seine Axe parallel dem Hauptschnitt des Kalkspaths ist, so treten die beiden im Krystall entstehenden Strahlen so in den Kalkspath ein, dass die Schwingungsrichtung des ordinären parallel ist der des ordinären im Kalkspath, und ebenso die des extraordinären mit der des gleichen in letzterem zusammenfällt. Es erleidet also keiner von beiden eine neue Zerlegung im Kalkspath und somit wird von den beiden Bildern der hellen Oeffnung in der dichroskopischen Lupe das eine nur von den Strahlen gebildet, welche parallel der Axe des davor gehaltenen Krystalls schwingend aus diesem austraten, das zweite nur von denen, deren Schwingungsrichtung in demselben Krystall senkrecht zur Axe war. Die Farbe des letzteren muss also die früher mit A, die des ersteren die mit B bezeichnete sein. Man ersieht dies leicht aus Fig. 103, in welcher $k_1 k_2 k_3 k_4$ den Umriss des zu untersuchenden Krystalls, AA' die Richtung seiner optischen Axe, folglich oo' die Schwingungsrichtung des ordinären, ee' die des extraordinären aus demselben austretenden Strahles darstellen; $abcd$ ist der Querschnitt des Kalkspathrhomboëders, dessen Hauptschnitt dem des Krystalls parallel ist; $\omega\omega'$ ist die Schwingungsrichtung des Lichtes in dem einen, $\varepsilon\varepsilon'$ die in dem zweiten Bilde der quadratischen, vom Krystall verdeckten Oeffnung. Dreht man nun den letzteren um die Axe des Dichroskops als Drehungsaxe, so bildet dann oo' und ee' mit $\omega\omega'$ und $\varepsilon\varepsilon'$ einen Winkel, jeder der beiden Strahlen wird im Kalkspath doppelt gebrochen und trägt somit zu jedem der beiden Bilder bei; wenn jener Winkel 45° beträgt, so ist die Componente jedes Strahles zu jedem der beiden Bilder die Hälfte von dessen Helligkeit, also sind diese genau von gleicher Färbung, und zwar von derjenigen $A + B$, welche der Krystall in der betreffenden Richtung auch dem nicht mit der Lupe bewaffneten Auge zeigt. Bei 90° Drehung zeigen beide Bilder des Dichroskops wieder die grösste Differenz der Färbung, aber die Farben beider sind vertauscht u. s. f.

Fig. 103.



Jedesmal also, wenn die optische Axe des auf Pleochroïsmus zu untersuchenden Krystalls einer der Schwingungsrichtungen der beiden im Kalk-

*) Nach dem Vorschlage von V. von Lang umgiebt man das Ende K des Rohres (Fig. 102) vortheilhaft noch mit einer drehbaren Metallkappe, welche mit einer kreisförmigen Oeffnung versehen ist; über dieser befestigt man den Krystall mit Wachs und kann nun seine richtige Stellung durch Drehen der Kappe leicht bewirken.

spath sich fortpflanzenden Strahlen parallel ist, zeigt das eine Bild die Farbe *A*, das andere die Farbe *B*. Da nun diese sich mehr von einander unterscheiden, als die ohne Dichroskop parallel und normal zur Axe im Krystall sichtbaren Farben *A* und $A + B$, da man ausserdem in diesem Instrument beide Färbungen gleichzeitig und unmittelbar nebeneinander sieht, wobei sehr geringe Verschiedenheiten ihrer Nuancen noch erkennbar sind, — so leuchtet ein, dass man mittelst dieses einfachen Apparates den Dichroïsmus eines Krystalls noch constatiren kann, selbst wenn er ziemlich schwach ist, während schon eine sehr bedeutende Verschiedenheit der Absorption, wie sie nur eine beschränkte Zahl von Substanzen zeigt, dazu gehört, um sie ohne Dichroskop zu erkennen.

Es ist leicht einzusehen, dass, wenn man den Krystall so vor die Oeffnung des beschriebenen Instrumentes hält, dass die Lichtstrahlen ihn schräg zu seiner optischen Axe durchsetzen, die Farbe des einen Bildes *A*, die andere eine zwischen *A* und *B* liegende Tinte sein wird; endlich, wenn das Licht den Krystall parallel der Axe durchläuft, bei jeder Drehung desselben in seiner Ebene, beide Bilder die gleiche Farbe *A* zeigen müssen.

Als Beispiele sehr stark pleochroïtischer einaxiger Krystalle mögen zwei Mineralien erwähnt werden: der Chlorit oder Pennin, dessen Körperfarbe, durch eine Platte senkrecht zur Axe gesehen, smaragdgrün, durch eine der Axe parallele Platte braunroth erscheint, und der in sehr verschiedener Färbung vorkommende Turmalin, von dem manche Varietäten zugleich ein Beispiel diluter Färbung durch fremde Farbstoffe darbieten. Bei letzteren, wie bei den durch ihren Eisengehalt und daher idiochromatisch gefärbten, wird der ordinäre Strahl so stark absorbirt, dass Turmalinplatten, parallel zur Axe geschnitten, fast nur extraordinäres Licht durchlassen (vergl. S. 63)*).

Bei gewissen Krystallen mit starkem Pleochroïsmus kann man auch mittelst einer zur optischen Axe senkrechten Platte die Verschiedenheit der Absorption der parallel und der geneigt zur Axe sie durchsetzenden Strahlen wahrnehmen. Hält man z. B. eine Platte von Magnesiumplatincyanür, in der angegebenen Richtung geschnitten oder gespalten (die Krystalle dieses Salzes spalten vollkommen nach der zur Axe senkrechten Ebene), nahe an das Auge und blickt durch dieselbe auf eine weisse Fläche (am besten eine gleichmässig weisse Wolkenschicht des Himmels), so sieht man einen kreisrunden violetten Fleck auf zinnoberrothem Grunde. Die Er-

*) Einige Turmalinvarietäten würden wegen ihrer starken Absorption ein geeignetes Material darbieten, um durch genaue Messungen nachzuweisen, nach welchem Gesetze sich die Absorption mit der Neigung gegen die optische Axe ändert. Dahin gerichtete Versuche haben jedoch bisher deshalb keine genügenden Resultate geliefert, weil gewöhnlich in diesen Krystallen die Färbung an verschiedenen Stellen ungleich stark, und daher die an Platten von verschiedener Neigung zur Axe, selbst wenn sie aus demselben Krystall geschnitten werden, gewonnenen Resultate nicht mit einander vergleichbar sind.

klärung dieser Erscheinung ist folgende: Das Magnesiumplatincyanür lässt blaue Strahlen nur in der Richtung der Axe und unter sehr kleiner Neigung dagegen hindurch und auch hier nur bei geringer Dicke der Platte, sonst nur rothe Strahlen; in Folge dessen wird das in der Axe durchgehende weisse Licht violett, bei einer gewissen Neigung zu dieser aber wird das Blau sowohl wegen der zunehmenden Dicke der durchlaufenen Schicht als wegen der Abweichung von der Axe absorbirt, und es bleibt nur noch Roth übrig. Hält man einen Nicol vor oder hinter die Platte, so wird von den in der Schwingungsebene des Nicols zur Axe geneigten Strahlen der ordinäre, also violett gefärbte Antheil ausgelöscht, von den in einer dazu senkrechten Ebene geneigten Strahlen derselbe Antheil hindurchgelassen; alsdann erscheinen in der Schwingungsrichtung des Nicols auf dem violetten Grunde zwei rothe Büschel von ähnlicher Form, wie die in Fig. 104 (S. 153) abgebildeten.

c) Farben der optisch zweiaxigen Krystalle: In dieser Klasse ist die Absorption des Lichtes in den drei sogenannten Elasticitätsaxen eine verschiedene, also ebenso die Farben, welche das der einen oder der andern parallel schwingende Licht zeigt. Nennen wir A die Farbe der Strahlen, welche im Krystall als Schwingungsrichtung die Axe der grössten Elasticität a haben, B die derjenigen, welche parallel der mittleren b, C die derjenigen, welche parallel der kleinsten Elasticitätsaxe c schwingen, so werden wir im Dichroskop durch eine Platte, senkrecht zur Axe der mittleren Elasticität, wenn a und c parallel den Schwingungsrichtungen des Kalkspaths sind, in dem einen Bild die Farbe A, im andern C sehen. Wenden wir aber eine normal zu c geschnittene Platte an, so zeigt das eine Bild, bei der analogen Stellung des Krystalls gegen das Instrument, A, das andere B. Endlich zeigt eine senkrecht zu a geschliffene Platte die Färbungen B und C getrennt, wenn sie so vor die Oeffnung der dichroskopischen Lupe gehalten wird, dass b oder c dem Hauptschnitt des in derselben befindlichen Kalkspaths parallel ist. Es genügt also bei Anwendung des Dichroskops schon die Beobachtung des Krystalls in zwei jener Richtungen, um die drei sogenannten »Axenfarben« zu bestimmen, d. h. die Farben, welche durch die Absorption der nach den drei Elasticitätsaxen schwingenden weissen Lichtstrahlen entstehen.

Ohne Dichroskop dagegen vermögen wir keine dieser drei Farben getrennt zu sehen, denn wenn wir z. B. durch eine zu a normale Platte des Krystalls hindurchblicken, so erhalten wir zugleich die $\parallel b$ schwingenden Strahlen mit der Farbe B und die $\parallel c$ schwingenden mit der Farbe C ins Auge, also werden wir eine aus beiden gemischte Färbung, $B + C$, sehen; ganz ebenso zeigt uns eine normal zu b geschnittene Platte eine Mischfarbe $A + C$, und eine Platte, deren Flächen senkrecht auf der Axe der kleinsten Elasticität stehen, $A + B$*). Es ist nun klar, dass die aus zwei Axen-

*) Haidinger nannte diese gemischte Farbe, welche eine Krystallplatte ohne

farben gemischten Farbeneindrücke, nämlich $A + B$, $A + C$ und $B + C$, weniger von einander verschieden sein werden, als die Axenfarben selbst. Aus denselben Gründen, welche oben bei den einaxigen Krystallen angeführt wurden, kann man daher mit dem Dichroskop weit geringere Grade des Pleochroïsmus noch erkennen, als ohne dieses Instrument. Mit demselben kann man zugleich, wenn starker Pleochroïsmus vorhanden ist, sehr leicht einen einaxigen Krystall von einem zweiaxigen unterscheiden, indem bei einem der letzteren Art keine Richtung existirt, in welcher die durchgehenden Strahlen bei jeder Drehung des Krystalls zwei genau gleichgefärbte Bilder liefern, wie dies mit den der optischen Axe der ersteren parallelen Strahlen der Fall ist.

Ebenfalls auf der verschiedenen Absorption des Lichtes, dessen Schwingungen verschieden im Krystall gerichtet sind, beruht eine Methode zur Unterscheidung einaxiger von zweiaxigen Krystallen, welche man nach ihrem Entdecker die »Dove'sche Probe« genannt hat. Dieselbe ist besonders vortheilhaft zu verwenden bei gewissen Varietäten des Glimmers, deren mittlere und kleinste Elasticität ihrem Werthe nach so wenig von einander abweichen, deren Axenwinkel in Folge dessen so klein ist, dass die Lemniscaten nur schwer von Kreisen, die Krystalle im convergenten Licht also kaum von einaxigen unterschieden werden können. Bringt man eine senkrecht zur ersten Mittellinie stehende, beim Glimmer durch die Spaltbarkeit zu erhaltende Platte eines solchen Krystalls an die Stelle des Analysators im Polarisationsinstrument (mit parallelem Licht), und auf den Krystallträger ein gekühltes Glas (s. S. 136), wobei jene Platte so auf das Instrument zu legen ist, dass die parallelen Lichtstrahlen dieselbe in der Richtung der Mittellinie durchlaufen, — so würde das Interferenzbild des gekühlten Glases nicht sichtbar sein, wenn die Platte einaxig wäre, und demnach die Schwingungen aller Azimuthe gleichartig absorbirt würden, ebenso wenig, als ob eine einfach brechende Platte statt des Analysators verwendet worden wäre. Ist aber der Glimmer zweiaxig, wenn auch der Axenwinkel noch so klein, so wird jeder Strahl durch denselben in zwei, deren Schwingungen parallel der mittleren und der kleinsten Elasticitätsaxe stattfinden, zerlegt. Von diesen würde der eine, wenn er allein hindurchginge, ein Interferenzbild des gekühlten Glases liefern, der andere, weil seine Schwingungen normal zu denen des ersteren stehen, das supplementäre Interferenzbild zu dem ersten (vgl. S. 79). Diese beiden Bilder müssten sich, wenn die beiden Schwingungen im Krystall genau die gleiche Absorption erleiden würden, vollständig aufheben: das Letztere ist aber nicht der Fall, wenn der Krystall zweiaxig ist, und wegen der verschieden

---

Dichroskop zeigt, ihre Flächenfarbe; durch das genannte Instrument wird also die Flächenfarbe einer Platte, welche einem optischen Hauptschnitt parallel ist, in ihre Axenfarben zerlegt, allgemein die Flächenfarbe einer Platte von beliebiger Orientirung in diejenigen beiden Farben, welche den Schwingungsrichtungen der Platte entsprechen.

starken und verschiedenfarbigen Absorption der parallel der mittleren und kleinsten Elasticitätsaxe stattfindenden Vibrationen, erscheint, wenn auch nur lichtschwach, das eine der beiden Bilder. Hierdurch ist aber die zweiaxige Natur des betreffenden Glimmers unzweifelhaft dargethan.

Was die Körperfarben der zweiaxigen Krystalle in anderen Directionen, als den drei Elasticitätsaxen, betrifft, so ändern sich diese mit der Richtung ganz analog der Lichtgeschwindigkeit. Wenn die Richtung innerhalb eines der drei Hauptschnitte liegt, so ist die Farbe eine Nuance, die zwischen zwei Axenfarben liegt, nämlich denjenigen, deren Schwingungen parallel jenem Hauptschnitt stattfinden. In einer Richtung, welche in keinen der drei Hauptschnitte fällt, zeigt der Krystall eine Absorption, welche zwischen derjenigen der drei Axenfarben, welche die grösste Verschiedenheit darstellen, liegt; es existiren also im Krystall alle möglichen Farbentinten zwischen denjenigen der drei am meisten von einander verschiedenen, daher der nicht selten gebrauchte Name »Trichroïsmus« für die Farbenerscheinungen der zweiaxigen Krystalle ebenso wenig correct ist, wie der Name »Dichroïsmus« für diejenigen der einaxigen.

Unter den optisch zweiaxigen Körpern mit besonders starkem Pleochroïsmus mögen als Beispiele aufgeführt werden: der Cordierit (wegen dieser Eigenschaft auch »Dichroit« genannt), dessen Färbung einem dilut vertheilten fremden Körper zuzuschreiben ist, und welcher folgende Axenfarben zeigt: *a* hellgelb bis gelbbraun, entsprechend den Schwingungen parallel der Axe der grössten Elasticität, *b* hellblau (Absorptionsfarbe der Schwingungen parallel der mittleren Elasticität) und *c* dunkelblau (Schwingungen parallel der kleinsten Elasticität, die somit am stärksten absorbirt werden); der Epidot, welcher in der schönen eisenhaltigen Varietät vom Sulzbachthal zeigt: *a* gelb, *b* braun, *c* grün; endlich der zur Amphibolgruppe gehörige Glaukophan mit den Axenfarben: *a* hellgrüngelb, *b* violett, *c* ultramarinblau.

Da die Art und die Intensität der Farbentöne ausser von der Richtung der Schwingungen noch von der Dicke der Platte abhängt, so sind dieselben in vorstehenden, wie in den früheren Beispielen, nur ganz allgemein bezeichnet. Genauere Angaben derselben könnten, wie neuerdings vorgeschlagen wurde, durch Anführung derjenigen Nummer von Radde's internationaler Farbenskala*), mit welcher der betreffende Farbenton am besten übereinstimmt, gewonnen werden; eine eigentliche Bestimmung der Absorptionsfarbe würde aber natürlich die spectrale Zerlegung des

*) Da transparente Farben, wie man sie in pleochroïtischen Krystallen beobachtet, sich nicht sehr leicht mit Farben im auffallenden Lichte, wie sie die Radde'sche Farbenskala zeigt, vergleichen lassen, würde es für die Gewinnung schärferer Angaben über die Absorptionsfarbe der Krystalle wünschenswerth sein, Vergleichsfarben anzuwenden, welche aus verschiedenfarbigen Gläsern gefertigt wären; diese müssten spitz keilförmig geschliffen werden, um die Bestimmung der Intensität der betreffenden Farbe durch Angabe der Stelle, d. h. der Dicke des Glases, zu ermöglichen.

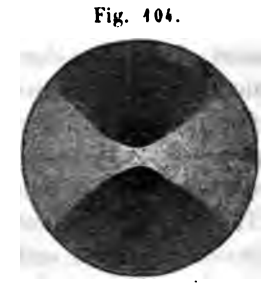
durch den Krystall gegangenen Lichtes und die Messung der Lichtstärke in den einzelnen Theilen des Spectrums erfordern. In beiden Fällen wäre es nöthig, die Dicke der untersuchten Krystallplatte zu bestimmen und anzugeben.

Will man einen mikroskopischen Krystall, z. B. im Dünnschliff eines Gesteins, auf Pleochroïsmus prüfen, so empfiehlt sich die von Tschermak vorgeschlagene Methode, das in das Mikroskop einfallende Licht durch einen Nicol zu polarisiren; indem man den drehbaren Objecttisch mit dem Präparat so bewegt, dass einmal die eine, einmal die andere Schwingungsrichtung des betreffenden Krystalldurchschnittes mit dem Hauptschnitt des Polarisators zusammenfällt, ruft man in dem Krystall nach einander die beiden, seinen Schwingungsrichtungen entsprechenden Absorptionsfarben hervor, während man im Dichroskop dieselben neben einander beobachtet.

Da man durch Druck oder Spannung amorphe Körper in doppeltbrechende verwandeln kann, so müssen dieselben, wenn sie zugleich eine ausgesprochene Farbe besitzen, mehr oder weniger stark pleochroïtisch werden. In der That beobachtet man, dass eine Kautschuk- oder Guttaperchaplatte, nach einer Richtung gespannt, mit der Haidinger'schen Lupe betrachtet, zwei deutlich verschieden gefärbte Bilder liefert (Kundt's temporärer Dichroïsmus); ferner erhält man stark dichroïtische Präparate, wenn man gewisse amorphe Farbstoffe, wie chrysaminsaures Kalium oder Ammonium, Indigocarmin und Alizarin, auf eine Glasplatte in bestimmter Richtung aufstreicht, wobei dieselben in Folge des ausgeübten Druckes dauernd doppeltbrechend werden (Haidinger, Freiherr von Seherr-Thoss). Auch in einfachbrechenden Krystallen, wenn sie geschmeidig sind, wie Chlorsilber, kann durch Druck Pleochroïsmus von einer gewissen Dauer hervorgerufen werden (von Lasaulx).

Büschelerscheinungen. Hält man eine senkrecht zu einer der beiden optischen Axen geschliffene Platte von brasilianischem Andalusit oder von dem oben erwähnten Epidot dicht vor das Auge und gegen den hellen Himmel gerichtet, so erblickt man auf farbigem Grunde zwei dunkle Büschel von der in Fig. 104 dargestellten Form, welche nach der Mitte zu Spuren von Ringen erkennen lassen. Weniger intensiv kann man dieselbe Erscheinung noch bei verschiedenen anderen pleochroïtischen Mineralien beobachten, besonders schön endlich bei dem sogenannten »Sénarmont'schen Salz, d. i. salpetersaures Strontium, welches aus einem Auszuge von Campecheholz krystallisirt und durch Aufnahme des Farbstoffes dieser Lösung roth gefärbt ist. Nimmt man von letzterem statt der zu einer Axe senkrechten Platte eine normal zur ersten Mittellinie geschnittene, so sieht man zwei Doppelbüschel, und bei dem Yttriumplatincyanür, dessen optischer Axenwinkel sehr klein ist, sind jene in Folge

Fig. 104.



dessen einander so nahe, dass sie vier rothe Sectoren bilden, zwischen denen der hier violette Grund in Form eines Kreuzes erscheint. Stets stehen die Büschel senkrecht zur optischen Axenebene und ihre Mittelpunkte entsprechen den Richtungen der Axen; die Erscheinung kann also zur Aufsuchung der Lage der letzteren ohne Polarisationsinstrument benutzt werden.

Ueber die Erklärung dieses nur bei stark pleochroïtischen Krystallen auftretenden Phänomen's s. Bertin, Zeitschr. f. Krystallogr. 3, 466 und Mallard, ebenda 646.

Eine ähnliche Erscheinung wie die Büschel müssen auch radialfasrige Aggregate von Krystallen zeigen, wenn letztere deutlich pleochroïtisch sind. Denken wir uns z. B. eine aus radialgestellten einaxigen Krystallen, welche diese Bedingung erfüllen und deren Längsrichtung der optischen Axe parallel, zusammengesetzte Platte, oder lassen wir einen pleochroïtischen Krystall in der S. 132 angegebenen Weise rotiren, so dass er schnell nach einander die Lage der verschiedenen Krystalle einer solchen Platte einnimmt, und betrachten wir das Gebilde durch einen Nicol oder, was ganz gleichbedeutend ist, lassen wir in dasselbe geradlinig polarisirtes Licht eintreten und beobachten wir ohne Nicol, so muss Folgendes stattfinden. Das Licht, welches durch die mit ihrer Längsrichtung im Hauptschnitt des Nicols liegenden Krystalle hindurchgeht, schwingt deren optischer Axe parallel; während diese also in der Farbe des extraordinären Strahls erscheinen, und nahezu ebenso die benachbarten, wenig mit ihnen divergirenden Krystalle, zerlegen die weiter abstehenden das einfallende Licht in einen ordinären und einen extraordinären Strahl und zeigen folglich eine Mischung der Farben dieser beiden: gehen wir endlich zu den senkrecht zur Schwingungsrichtung der eintretenden Vibrationen stehenden Krystallen über, so finden in diesen die hindurchgehenden Oscillationen senkrecht zur Axe statt, diese Krystalle erscheinen demnach mit der Farbe des ordinären Lichtes. Während man also zwischen gekreuzten Nicols in dem Präparat, wie in jedem radialfasrigen Gebilde, das schwarze Kreuz erblicken würde, sieht man mit einem Nicol, wenn der Pleochroïsmus der Einzelkrystalle genügend stark ist, zwar ebenfalls ein Kreuz, von dem jedoch die beiden Arme, welche der Schwingungsebene des Polarisators parallel sind, die Farbe der extraordinären Strahlen, die beiden andern die Farbe der ordinären Lichtvibrationen besitzen. Auf dieser Eigenschaft pleochroïtischer radialfasriger Gebilde beruhen die »Haidinger'schen Polarisationsbüschel«, welche nach Helmholtz dadurch hervorgebracht werden, dass in dem sogenannten gelben Fleck, dem für das Sehen wichtigsten Theile der Netzhaut des menschlichen Auges, die radiären Nervenfasern, welche in den anderen Theilen der Netzhaut senkrecht zu deren Oberfläche stehen, schräg nach der Mitte des gelben Fleckes convergiren; diese Fasern sind, wie die meisten organischen Fasern, doppeltbrechend, und es muss angenommen werden, dass dieselben von den parallel und senkrecht zu ihrer Axe schwingenden Lichtstrahlen das Blau und Gelb ungleich ab-

sorbiren. In Folge dessen erblickt man, wenn man das Auge auf eine gleichmässig beleuchtete weisse Fläche richtet und zugleich einen Nicol vor dasselbe hält, um geradlinig polarisirtes Licht einfallen zu lassen, von dem Fixirpunkte des Auges ausgehend zwei bräunlichgelbe Büschel, zwischen denen in der dazu senkrechten Richtung bläuliches Licht erscheint. Die ersteren liegen stets in der Polarisationsebene des Nicols, also senkrecht zur Schwingungsrichtung der polarisirten Strahlen und müssen sich daher mit der Drehung des Polarisators ebenfalls drehen; in Folge dessen kann diese Erscheinung dazu dienen, ohne weiteres geradlinig polarisirtes Licht als solches zu erkennen und seine Schwingungsrichtung zu bestimmen. Besonders leicht findet man die Büschel auf, wenn man das Haidinger-sche Dichroskop gegen eine weisse Wolkenschicht richtet; alsdann erscheinen dieselben in den beiden hellen quadratischen Bildern, weil diese senkrecht zu einander polarisirt sind, in gekreuzter Stellung, wie es in Fig. 105 dargestellt ist (die nebenstehenden Pfeile bezeichnen die Schwingungsrichtungen des Lichtes in den beiden Feldern). Es muss bemerkt werden, dass nicht alle Menschen die sehr schwache Erscheinung der Haidinger-schen Büschel zu sehen vermögen, während einzelne Individuen dieselben sogar ohne Nicol, wenn sie ihr Auge gegen den Himmel richten, in Folge der (unvollständigen) Polarisation des von diesem reflectirten Lichtes zu sehen im Stande sind.

Fig. 105.

Oberflächenfarben. Die meisten Körper, gleichviel ob gefärbt oder farblos, ändern das von ihnen reflectirte Licht nicht, so dass, wenn weisses Licht auf eine ebene Oberfläche derselben fällt, es auch als weisses zurückgeworfen wird. Anders verhalten sich bekanntlich die Metalle, indem z. B. das von einer polirten Kupferplatte reflectirte Bild eines weissen Körpers nicht weiss, sondern roth erscheint. Zwischen den Metallen und den gewöhnlichen durchsichtigen Körpern stehen gleichsam in der Mitte diejenigen Substanzen, welche für gewisse Lichtstrahlen durchsichtig, für andere sich den Metallen ähnlich verhalten und sie mit metallischem Glanze reflectiren: solche Medien hat man als Körper mit »Oberflächenfarbe« bezeichnet. Es gehören hierher eine Reihe von Doppelcyanüren des Platins mit anderen Metallen und von Salzen organischer Basen, besonders Anilinfarbstoffe u. a. Zur Erklärung des eigenthümlichen Verhaltens dieser Körper muss man annehmen, dass das reflectirte Licht in denselben bis zu einer gewissen Tiefe eingedrungen sei und dabei eine ungleiche Absorption seiner verschiedenen Farben erfahren habe, welche dann in einem bestimmten Zusammenhange mit der Absorption des durchgelassenen Lichtes stehen müsste. In der That hat Haidinger gefunden, dass die Oberflächenfarbe dieser Medien complementär zu ihrer Körperfarbe ist. Da nun die letztere in den doppeltbrechenden Krystallen für ungleich gerichtete Schwingungen eine verschiedene ist, so muss wegen jener Beziehung auch die Oberflächenfarbe solcher Krystalle mit der Richtung der Schwingungen sich ändern.

Es ist z. B. zu erwarten, dass die Oberflächenfarbe eines einaxigen Krystalles zwar auf allen Flächen, welche der Axe parallel gehen, gleich sei, aber eine andere auf solchen, welche zur Axe geneigt sind, endlich noch eine andere auf der zur Axe senkrechten Ebene. Diese Voraussetzungen werden durch die an solchen Krystallen beobachteten Erscheinungen bestätigt; so zeigt z. B. eine natürliche oder künstliche Oberfläche des Magnesiumplatincyanür, welche der optischen Axe des Krystalls parallel geht, eine blaue Oberflächenfarbe, eine zur Axe senkrechte Fläche eine grüne, während die Körperfarbe der Substanz karminroth ist (mit erkennbarem Pleochroïsmus, indem die ordinären Strahlen mehr bläulich gefärbt sind). Wendet man zur Beobachtung der Oberflächenfarbe das Dichroskop an, so findet man auf der zur Axe senkrechten Fläche gleiche Farbe beider Bilder, auf den zur Axe parallelen verschiedene. Es geht also hieraus hervor, dass das Licht, welches wir in der Oberflächenfarbe beobachten, in den oberflächlichen Schichten des Krystalls eine ähnliche Aenderung erfahren hat, wie das von demselben durchgelassene, indem es in zwei senkrecht zu einander polarisirte (oder wenigstens ähnlich sich verhaltende) und ungleich absorbirte Strahlen zerlegt worden ist. Hiernach ergiebt sich die Beschaffenheit desselben in dem complicirteren Falle zweiaxiger Medien von selbst, und die vorhandenen Beobachtungen an solchen stimmen ebenfalls hiermit überein.

Fluorescenz, Phosphorescenz. Der bei der Absorption des Lichtes in einem Körper anscheinend verloren gehende Theil wird in eine andere Art von Bewegung umgesetzt, besonders in Wärme; bei gewissen Körpern erzeugt derselbe jedoch wieder Licht und zwar solches von einer anderen Schwingungsdauer. Ist dies der Fall, so sendet das Innere des Körpers unter dem Einflusse einer Bestrahlung wiederum Licht aus, aber von einer anderen Farbe, eine Erscheinung, welche man mit dem Namen »Fluorescenz« belegt. Es sind besonders die Auflösungen einer Reihe organischer Substanzen, welche diese Eigenschaft besitzen; dieselbe tritt ferner an dem durch gewisse organische, dilut vertheilte Substanzen gefärbten Flussspath (»Fluorit«) und an dem sogenannten Uranglas auf, in welchen beiden Fällen es sich ebenfalls gleichsam um eine Auflösung der fluorescirenden Substanz, aber in einem festen Körper, handelt. Das Uranglas und die Krystalle des Flussspaths sind einfach brechende Medien, senden also Licht aus, dessen Farbe von der Richtung der Schwingungen unabhängig ist. Anders müssen sich offenbar fluorescirende doppeltbrechende Krystalle verhalten, und in der That beobachtet man bei dem oben erwähnten Magnesiumplatincyanür, welches zugleich Fluorescenz zeigt, dass deren Farbe sich ändert mit dem Winkel, den die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes, welches die Fluorescenz erregt, mit der optischen Axe des Krystalls bildet. Lässt man Sonnenlicht, das durch ein blaues oder violettes Glas gegangen ist, auf die zur Axe normale Fläche eines solchen Krystalls fallen, so leuchtet dieselbe mit scharlachrothem Fluorescenzlicht, in welcher Richtung der eintretende Strahl auch polarisirt

sei; fällt das Licht aber auf eine der Axe parallele Fläche, so zeigt diese eine »dichroïtische Fluorescenz«, indem sie orangegelbes oder scharlachrothes Licht aussendet, je nachdem die Schwingungsrichtung des erregenden Lichtes parallel oder senkrecht zur Axe ist. Dieselben beiden Farben beobachtet man natürlich auch, wenn man, statt das einfallende Licht zu polarisiren, das vom Krystall ausgesandte durch einen Nicol gehen lässt und dessen Schwingungsebene einmal dem Hauptschnitt parallel, das andere mal dazu senkrecht hält, oder wenn man den Krystall durch die Haidinger'sche Lupe betrachtet. Die grüne Oberflächenfarbe verschwindet im violetten Lichte (Lommel).

Bei gewissen Substanzen, in denen unter dem Einflusse der Bestrahlung eine Aussendung von Licht stattfindet, dauert die letztere auch nach dem Aufhören der Bestrahlung noch fort. Unter den Körpern, welche diese Erscheinung, die Phosphorescenz, zeigen, sind auch krystallisirte und doppeltbrechende, daher für solche anzunehmen ist, dass auch diese Lichterscheinung den Gesetzen des Pleochroïsmus unterworfen sei; doch liegen hierüber noch keine Untersuchungen vor, und handelt es sich meistens auch um eine Aussendung von Licht, welches nur eine sehr geringe Intensität besitzt.

Die thermischen Eigenschaften der Krystalle.

§. 32. **Wärmestrahlung, Wärmeleitung.** Die Wärme kann in ihrer Beziehung zu den Krystallen in dreierlei Art zur Wirkung gelangen, nämlich entweder in der Form von Wärmestrahlen, oder als durch Leitung fortgepflanzte Wärme, oder als eine von der zweiten Art der Mittheilung der Wärme herrührende Temperaturerhöhung der Krystalle. Diese letztere ist aber stets von einer Aenderung der Dichte und damit der übrigen physikalischen Eigenschaften begleitet, und die Art und Weise, in welcher diese Aenderung bei den Krystallen stattfindet, ist von besonderer theoretischer und praktischer Wichtigkeit. Im Allgemeinen sei vorausbemerkt, dass in Bezug auf alle ihre thermischen Eigenschaften die Krystalle in genau dieselben drei Hauptabtheilungen zerfallen, wie in Bezug auf ihr optisches Verhalten, und dass die Verschiedenheiten dieser drei Klassen auch vollkommen ihren optischen Differenzen entsprechen. Wir werden daher im Folgenden die auf ihr Verhalten gegen das Licht gegründeten Namen: einfachbrechende, einaxige und zweiaxige Krystalle, für diese drei Klassen derselben beibehalten.

a) **Wärmestrahlung.** Die Strahlen der Wärme, welche wir nach ihren Eigenschaften ebenfalls als Wellenbewegungen ansehen müssen, verhalten sich gegen die Krystalle denen des Lichtes so absolut gleich, dass auf dieses Verhalten nur ganz kurz eingegangen zu werden braucht, um so mehr, als die Methoden, welche dazu dienen, die Veränderungen der Wärmestrahlen

in jenen (ihre Polarisation, ihre Interferenz u. s. f.) zu studiren, nicht entfernt so leicht zu handhaben und so genau sind, wie die optischen, so dass sie nicht, wie diese, zur Unterscheidung der Krystalle praktisch benutzt werden können.

1) Einfachbrechende Krystalle. Die Strahlen der Wärme, sowohl die mit Lichtstrahlen verbundenen, als auch die sogenannten dunklen (nicht leuchtenden), werden an der Oberfläche der Krystalle theilweise reflectirt, und zwar nach demselben Gesetze, wie diejenigen des Lichtes, und theilweise im Innern des Krystalls fortgepflanzt. Hierbei tritt, wenn es sich um einen einfachbrechenden Krystall handelt, nach keiner Richtung in demselben eine Doppelbrechung auf. Wir beobachten aber, wie beim Licht, dass es Wärmestrahlen von verschiedener Brechbarkeit, d. h. verschiedene Wärmefarben, giebt, und können daher ganz analog auch von einem Brechungsexponent des Krystalls für eine bestimmte Wärmefarbe sprechen; dieser ist in einem einfachbrechenden Krystalle in allen Richtungen derselbe, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmestrahlen jeder Farbe ist unabhängig von der Richtung, in welcher er sich im Krystall bewegt.

Nicht alle für das Licht durchsichtigen Körper sind es auch in gleicher Weise für die Wärmestrahlen; diejenigen, welche letztere, namentlich die sogenannten dunklen Strahlen der Wärme, ohne erhebliche Absorption hindurchlassen, nennt man diatherman oder wärmedurchsichtig. Wie die verschiedenen Farben des Lichtes, so werden auch diejenigen der Wärme in den Körpern ungleich absorbirt; wenn diese Ungleichheit jedoch sehr gering ist, so werden dieselben nahe unverändert aus dem Körper austreten, gerade so, wie das weisse Licht nach dem Durchgang durch eine farblose Substanz ungefärbt ist; einen solchen Körper nennen wir wärmefarblos. Die Eigenschaft der Wärmefarblosigkeit, verbunden mit einem hohen Grade von Diathermansie oder Wärmedurchsichtigkeit besitzt nur eine kleine Anzahl von Stoffen, nämlich die Chloride des Kaliums, Natriums und Silbers, KCl, $NaCl$, $AgCl$, sowie das Sulfid des Zinks, ZnS, sämmtlich zur Klasse der optisch isotropen gehörig. Dagegen giebt es viele für das Licht sehr vollkommen farblose Körper, welche von den Wärmefarben einen Theil sehr stark absorbiren, also für letztere Art von Strahlen in ausgesprochener Weise farbig sind. Ein solcher Körper ist z. B. der Alaun $= KAl(SO^4)^2 + 12 H^2O$, dessen ebenfalls einfachbrechende Krystalle für das Licht ganz farblos, für die Wärmestrahlen aber sehr farbig und wenig durchsichtig sind.

Wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so ist auch die Absorption der Wärmestrahlen in den Krystallen der ersten Klasse nach allen Richtungen gleich.

2) Einaxige Krystalle. Die Wärmestrahlen werden in diesen genau in derselben Weise doppelt gebrochen, wie die Lichtstrahlen, und zwar sind die beiden entstehenden Strahlen senkrecht zu einander polarisirt. Nur in

der Richtung der optischen Axe findet auch keine Doppelbrechung der Wärme statt. Es ist die Doppelbrechung der Wärmestrahlen und ihre Polarisation zuerst nachgewiesen an den Krystallen derselben Substanz, an welchen wir anfangs die analogen optischen Erscheinungen erörtert haben, am Kalkspath *).

Der Quarz, welcher die Polarisationsebene des Lichtes dreht, übt dieselbe Wirkung auch auf die Wärmestrahlen, und zwar ist nachgewiesen worden, dass für die dunklen Wärmestrahlen, deren Brechbarkeit kleiner ist, als die des rothen Lichtes, ganz in derselben Weise, wie für Lichtstrahlen, die Drehung abnimmt mit der Brechbarkeit. In Folge dessen wird für solche Wärmestrahlen, welche eine so viel kleinere Brechbarkeit als das äusserste Roth besitzen, wie dieses im Verhältniss zum äussersten Violett, die Drehung fast Null.

3) Zweiaxige Krystalle. Dass auch in den zweiaxigen Krystallen die Strahlen der Wärme in ganz analoger Weise doppelt gebrochen werden, wie die des Lichtes, beweist das Verhalten eines Glimmerblattes zwischen gekreuzten Nicols beim Durchgang von Wärmestrahlen. Gerade so, wie dasselbe beim Drehen vier mal hell und dunkel (jedesmal wenn einer seiner Hauptschnitte dem eines Nicols parallel) wird, so lässt es auch in diesen vier Stellungen keine Wärmestrahlen hindurch, die meisten bei den vier Zwischenstellungen, wenn die Hauptschnitte mit den Nicols 45° einschliessen.

b) **Wärmeleitung.** Um die Abhängigkeit, in welcher die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der geleiteten Wärme in einem Krystall von der Richtung sich befindet, zu studiren, hat Sénarmont folgendes Verfahren angegeben: man legt auf die zu untersuchende Fläche des Krystalls ein sehr kleines Stück reinen Wachses und erwärmt jenen vorsichtig, bis das Wachs schmilzt und sich in einer dünnen Schicht auf der ganzen Fläche ausbreitet, was man durch Neigen, eventuell auch Abgiessen, unterstützen kann. Nach dem Erkalten bildet das Wachs eine dünne und matte Haut auf der Fläche. Nun erwärmt man eine kleine Stelle des Krystalls dadurch, dass man auf dieselbe entweder eine Metallspitze aufsetzt oder in eine daselbst angebrachte Durchbohrung eintreibt und das betreffende Metallstäbchen (ein rechtwinkelig umgebogener Silberdraht eignet sich hierzu besonders) am andern Ende erhitzt, wobei man den Krystall vor directer Erwärmung seitens der Flamme schützen muss. Sobald die Spitze des Drahtes ebenfalls heiss wird, pflanzt sich die Wärme von der Berührungsstelle im Krystall nach allen Seiten fort, so dass das Wachs rings um jene schmilzt; auch nach dem Abkühlen kann man an einem feinen vorstehenden Wulst genau sehen, wie weit das Wachs rings um die Spitze geschmolzen war.

*) In Bezug auf das weitere Detail dieser besonders von Knoblauch untersuchten Erscheinungen, sowie auf die Methoden zur Nachweisung der Doppelbrechung der Wärme, muss auf die ausführlicheren Lehrbücher der Physik (Jamin, Wüllner etc.) verwiesen werden.

Ist nun die Wärmeleitungsfähigkeit des Krystalls dieselbe in allen Richtungen, welche der mit Wachs überzogenen Krystallfläche parallel gehen, so breitet sich auch die zum Schmelzen des Wachses erforderliche Temperatur nach allen Seiten gleich rasch aus, und die entstehende Schmelzfigur ist ein Kreis. Pflanzt sich aber in verschiedenen jener Ebene parallelen Richtungen die Wärme verschieden schnell fort, so können die Punkte, welche gleichzeitig auf die Schmelztemperatur des Wachses erwärmt werden, nicht gleichweit von der Berührungsstelle des Drahtes entfernt sein, sondern sie müssen am weitesten abstehen in der Richtung, in welcher die Wärmeleitung am schnellsten stattfindet, am wenigsten in derjenigen, in welcher sie die langsamste ist. Diese beiden Richtungen stehen nun, wie die Beobachtung lehrt, stets senkrecht auf einander, gerade so, wie die grösste und kleinste Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes innerhalb einer Ebene. In Folge dessen ist alsdann die Schmelzfigur des Wachses stets eine Ellipse, deren grösste Axe der Richtung der grössten Leitungsfähigkeit, deren kleine derjenigen der kleinsten unter allen der Krystallfläche parallelen Richtungen entspricht.

Jannetaz wandte bei seinen zahlreichen Untersuchungen über die Wärmeleitung einen durch den galvanischen Strom erhitzten dünnen Platindraht an, aus zwei Theilen bestehend, die unten zu einer kleinen Kugel zusammengeschmolzen sind; die letztere wird bis zur Berührung mit der Krystallfläche herabgelassen und dann der Strom geschlossen, während gleichzeitig durch einen den glühenden Draht umgebenden Wasserbehälter die directe Wärmestrahlung desselben auf die Platte verhindert wird.

Eine sehr sinnreiche Modification der Sénarmont'schen Methode wurde von Röntgen angegeben. Wenn man nämlich die Krystallfläche anhaucht, so dass der Hauch dieselbe in einer gleichmässigen Schicht überzieht, und auf dieselbe eine stark erwärmte Metallspitze aufsetzt, so beobachtet man, dass der Hauch um die Spitze in einem scharf begrenzten, ellipsenförmigen Raume verdunstet. Unterbricht man den Versuch und streut rasch Lycopodium auf die Platte, so haftet dieses leichte Pulver nur da, wo der Hauch noch nicht verdunstet war, und nach dem vorsichtigen Abklopfen des Krystalls wird die freigelassene elliptische Figur so scharf von dem Pulver begrenzt, dass das Verhältniss der grossen und kleinen Axe der Ellipse in vielen Fällen noch genauer gemessen werden kann, als dies bei der Sénarmont'schen Methode möglich ist. (Das Nähere über die Methode siehe Zeitschr. f. Kryst. 3, 17.)

1) Einfachbrechende Krystalle haben in allen Richtungen gleiches Wärmeleitungsvermögen, folglich ist die isothermische Curve (die Curve, bis zu welcher sich eine Temperatur in einer gewissen Zeit ausgebreitet hat) auf allen Flächen, deren Richtung mag jede beliebige sein, ein Kreis.

2) Einaxige Krystalle. Bei diesen ist in der Richtung der optischen Axe die Wärmeleitung entweder am grössten, nimmt von da an

nach allen Seiten gleichmässig ab und ist am kleinsten in allen Richtungen normal zur Axe (thermisch positive Krystalle), — oder sie ist am kleinsten parallel der Axe, nimmt zu mit der Neigung gegen diese und erreicht ihr Maximum in allen senkrecht zur Axe stehenden Richtungen (thermisch negative Krystalle). In beiden Fällen ist sie gleich in allen Richtungen, welche gleichen Winkel mit der optischen Axe einschliessen. In Folge dessen ist die isothermische Figur nur auf den Flächen, welche normal zur Axe stehen, kreisförmig, auf allen andern eine Ellipse, welche um so mehr von der Kreisform abweicht, je kleineren Winkel die untersuchte Fläche mit der optischen Axe bildet. Die eine der beiden Axen der Ellipse liegt stets im optischen Hauptschnitt der Platte, und zwar die grosse, wenn das Maximum des Wärmeleitungsvermögens parallel zur optischen Axe stattfindet, die kleine dagegen, wenn in dieselbe Richtung das Minimum der Leitungsfähigkeit fällt.

3) Zweiaxige Krystalle. Die Wärmeleitung findet bei diesen ebenfalls in verschiedener Richtung verschieden schnell statt; diejenige, welche dem Maximum, und die, welche dem Minimum des Leitungsvermögens entspricht, stehen normal zu einander; senkrecht zu beiden ist dasselbe ein zwischenliegendes (im Allgemeinen nicht das arithmetische Mittel), das mittlere genannt. Die Wärmeleitungsfähigkeit in beliebigen anderen Richtungen entspricht den Radien eines dreiaxigen Ellipsoides. In denjenigen zweiaxigen Krystallen, in welchen die drei Hauptschwingungsrichtungen für alle Farben des Lichtes zusammenfallen, sind denselben auch die drei Hauptaxen dieses Ellipsoides, d. s. die Richtungen des grössten, mittleren und kleinsten Leitungsvermögens parallel, d. h.: die Richtung der schnellsten Fortpflanzung der geleiteten Wärme fällt zusammen mit der grössten, oder mit der mittleren oder mit der kleinsten Elasticitätsaxe u. s. f. Untersuchen wir also eine Platte eines solchen zweiaxigen Krystalls, welche einem optischen Hauptschnitt parallel geschnitten ist, mittelst der Sénarmont'schen oder Röntgen'schen Methode, so zeigt uns die Lage der isothermischen Figur diejenige der beiden Elasticitätsaxen an, welche der betreffenden Fläche parallel laufen, und ihre Gestalt lehrt uns, welche von beiden das grössere Wärmeleitungsvermögen besitzt.

Es liegt auf der Hand, dass diese Untersuchungsmethode zuweilen in solchen Fällen, in denen wegen der Undurchsichtigkeit der Substanz eine optische Untersuchung unmöglich ist, gute Dienste zur Unterscheidung und Bestimmung, in welche der drei Klassen ein gewisser Krystall gehöre, zu leisten im Stande ist und z. B. bei einaxigen die Lage der Axe zu erkennen gestattet.

§. 33. c) **Ausdehnung durch die Wärme.** Mit Ausnahme sehr weniger*) haben alle Körper in höherer Temperatur ein grösseres Volum,

*) Diese sind unter den festen Körpern der Diamant, welcher bei —42°,3, das Kupferoxydul, welches bei —4°,3, und der Smaragd, welcher bei —4°,2 die grösste

sie dehnen sich aus. Bestimmen wir die Länge l eines aus einem isotropen Körper, z. B. Glas, gefertigten Stabes von rectangulärem Querschnitte, bei 0°, der Temperatur des schmelzenden Eises, und seine Länge l', nachdem er auf 100°, die Temperatur des siedenden Wassers, erhitzt worden ist, so finden wir, dass die durch jene Temperaturdifferenz hervorgebrachte Zunahme seiner Länge, $l' - l$, bei demselben Stoff stets in demselben Verhältniss zur Länge des Stabes steht, also dass

$$\frac{l' - l}{l}$$

eine constante Zahl ist: diese bezeichnen wir mit α und nennen sie den linearen Ausdehnungscoëfficienten des Körpers. Es ist derselbe gleich der Zunahme der Länge eines Stabes aus der betreffenden Substanz, dessen Länge bei $0^0 = 1$ ist. Ein Stab von der Länge l (bei 0°) wird also bei 100° die Länge

$$l\,(1 + \alpha)$$

haben; er wird sich aber in demselben Verhältniss in der Breite ausdehnen; ist sein Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten $b\,d$, also seine Breite bei $0^0 = b$, so ist sie bei 100°:

$$b\,(1 + \alpha)$$

endlich die Dicke bei derselben Temperatur

$$d\,(1 + \alpha),$$

da sie bei $0^0 = d$ war. Während demnach das Volumen des Stabes bei 0°

$$= b\,d\,l,$$

so ist es bei 100°:

$$= b\,d\,l\,(1 + \alpha)^3$$
$$= b\,d\,l\,(1 + 3\,\alpha + 3\,\alpha^2 + \alpha^3).$$

Da aber α stets ein sehr kleiner echter Bruch ist, so sind α^2 und α^3 so ausserordentlich klein, dass man sie vernachlässigen und somit das Volum bei 100°

$$= b\,d\,l\,(1 + 3\,\alpha)$$

setzen kann. Den dreifachen linearen Ausdehnungscoëfficienten $3\,\alpha$ nennt man den kubischen Ausdehnungscoëfficienten. Bei den Krystallen, bei denen es sich wesentlich um Gleichheit oder Verschiedenheit der linearen Ausdehnung in verschiedenen Richtungen handelt, werden wir unter »Ausdehnungscoëfficient« stets den linearen, α, verstehen.

1) Einfachbrechende Krystalle. Der Ausdehnungscoëfficient ist in allen Richtungen der gleiche, wie in einem isotropen Körper. Denken wir uns daher aus einem solchen Krystall eine Kugel geschliffen, so wird diese, auf eine höhere Temperatur gebracht, einen grösseren Durchmesser erhalten, da aber jeder ihrer vorigen, einander gleichen Durchmesser um

Dichtigkeit haben und sich bei weiterer Abkühlung wieder ausdehnen (Fizeau, Poggendorff's Ann. d. Physik, 128. Bd.). Der merkwürdigste Körper in dieser Hinsicht ist jedoch das Jodsilber, welches sich schon bei gewöhnlicher Temperatur zusammenzieht, wenn es erwärmt wird (Fizeau, Poggendorff's Ann. d. Physik, 137. Bd.).

gleich viel gewachsen ist, so bleibt ihre Gestalt nach wie vor die einer Kugel, sie erhält nur ein grösseres Volumen. Denken wir uns aus dem Krystall einen Würfel geschnitten, so wird der Abstand der drei parallelen Flächenpaare, von welchen dieser begrenzt ist, grösser bei erhöhter Temperatur, aber bei allen in gleichem Verhältniss, folglich bleibt der Würfel sich selbst stets ähnlich, wenn sich auch seine Dimensionen sämmtlich vergrössern. Dasselbe gilt für jeden andern aus dem Krystall geschnittenen Körper von beliebiger Gestalt, und da bei solchen Formen, welche einander ähnlich und von ebenen Flächen begrenzt sind, wie die Krystalle, die Winkel, unter welchen die entsprechenden Flächen einander schneiden, dieselben sind, so gilt für einfach brechende Krystalle der Satz: die Winkel, unter welchen deren Flächen zusammenstossen, sind unabhängig von der Temperatur des Krystalls.

2) Einaxige Krystalle. In solchen ist, wenn sie homogen sind, zwar in allen Linien gleicher Richtung der Ausdehnungscoëfficient derselbe, aber in verschiedenen Richtungen verschieden. Wie diese Krystalle sich in Bezug auf die optische Elasticität verhalten, so ist auch die Richtung, in welcher letztere ein Maximum oder Minimum hat, d. h. die optische Axe, entweder diejenige der grössten oder der kleinsten Ausdehnung durch die Wärme.*)

In dem Falle, dass die optische Axe die Richtung des grössten Ausdehnungscoëfficienten ist, nimmt dieser mit der Neigung gegen jene ab, und zwar nach allen Seiten in gleicher Weise, so dass er für alle Richtungen, welche gleiche Winkel mit der Axe bilden, gleich gross ist, und erreicht sein Minimum in allen Richtungen, welche normal zu derselben stehen. Denken wir uns also von einem derartigen einaxigen Krystall, dessen Temperatur 0° ist, eine Kugel geschliffen, und diese auf 100° erwärmt, so sind alsdann ihre Durchmesser nicht mehr gleich, sondern derjenige, welcher der optischen Axe parallel ist, hat die grösste Zunahme seiner Länge erfahren, die übrigen eine um so geringere, je grösser ihre Neigung gegen die Axe ist, diejenigen, welche normal dazu stehen, die geringste. Bei einer höheren Temperatur verwandelt sich die Kugel in ein verlängertes Rotationsellipsoid, entstanden durch Rotation einer Ellipse um ihre grosse Axe, welche zugleich der optischen Axe des Krystalls parallel ist. Es giebt Krystalle, und zu diesen gehört z. B. der Kalkspath, welche sich in der Axe verhältnissmässig stark ausdehnen, senkrecht dazu jedoch eine schwache Zusammenziehung erleiden, wobei aber das gesammte Volumen bei der Temperaturerhöhung zunimmt. Da hier der Ausdehnungscoëfficient in der Axe positiv, senkrecht dazu negativ, so muss es eine bestimmte Neigung dazwischen geben, in welcher er $= 0$ ist; ein Stab, in dieser Richtung aus Kalk-

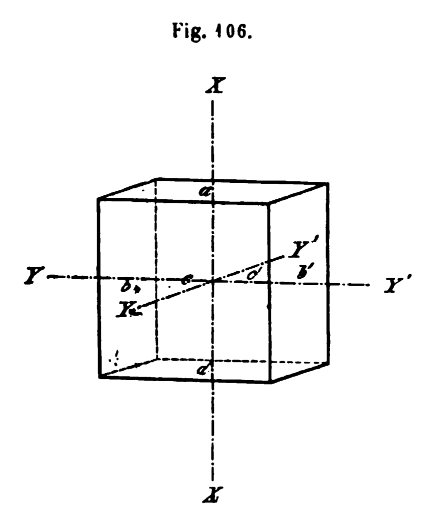
*) Hierbei ist keineswegs bei allen Krystallen, bei denen die optische Axe die der grössten Elasticität ist, dieselbe auch die der grössten Ausdehnung durch die Wärme, sondern es kann auch die der kleinsten sein.

spath geschnitten, ändert also seine Länge nicht, wenn sich seine Temperatur ändert.*)

Ist jedoch die optische Axe die Richtung des kleinsten Ausdehnungscoëfficienten durch die Wärme, so nimmt dieser mit der Neigung gegen jene stetig zu und ist am grössten senkrecht dazu, selbstverständlich gleich nach allen Seiten rings um die Axe. Eine Kugel, bei niedrigerer Temperatur aus einem solchen Krystall geschliffen, wird bei höherer plattgedrückt werden in der Richtung der optischen Axe, sie wird sich in ein Rotationsellipsoid verwandeln, entstanden durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe, welche der optischen parallel ist.

Denken wir uns nunmehr einen einaxigen Krystall der ersten Art, statt von einer Kugelfläche, begrenzt von einem Würfel, d. h. von drei Paar paralleler Flächen, welche gleichweit von einander abstehen, und dessen vier in Fig. 106 vertical gestellte Kanten der optischen Axe des Krystalls parallel sind. Nennen wir die beiden Punkte auf gegenüber liegenden Flächen, deren Verbindungslinie die Normale des Flächenpaares ist, entsprechende Punkte, so liegt auf der Hand, dass alle Geraden zwischen je zwei einander entsprechenden Punkten der horizontalen Flächen a und a' der optischen Axe parallel sind, also sämmtlich denselben Ausdehnungscoëfficienten durch die Wärme haben, und zwar den grössten, welcher mit α bezeichnet werden soll. Der Würfel sei nun hergestellt bei 0°, so dass bei dieser Temperatur alle seine Kanten die Länge s haben, so ist dies auch die Grösse des Abstandes der gegenüberliegenden Flächenpaare, also der Abstand je zweier entsprechender Punkte. Wird nun der Würfel seiner ganzen Masse nach gleichmässig auf 100° erwärmt, so dehnen sich alle Geraden zwischen entsprechenden Punkten der Flächen a und a' soweit aus, dass nunmehr ihre Länge $= s\,(1 + \alpha)$ beträgt; dies ist also jetzt der Abstand der oberen Fläche a von der unteren a', und da nach Obigem alle Geraden gleiche Ausdehnung erfahren, so müssen die Flächen a und a' in ihrer neuen Lage nicht nur einander, sondern auch ihrer früheren parallel bleiben. Die Geraden zwischen entsprechenden Punkten der Flächen b und b'

Fig. 106.

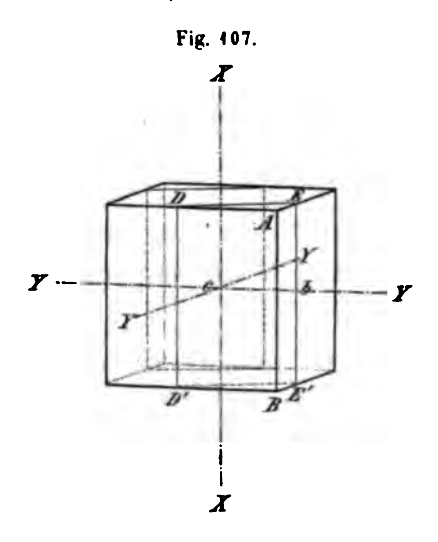


*) Der Ausdehnungscoëfficient des Kalkspaths parallel der Axe ist = 0,00293, derjenige senkrecht dazu = — 0,00049, eine bei 0° hergestellte Kalkspathkugel ist also bei 100° ein Rotationsellipsoid, dessen Axen sich verhalten, wie

$$0{,}99951 : 1{,}00293$$
$$= 1 : 1{,}00342.$$

erfahren ebenfalls sämmtlich gleiche Ausdehnung während der Temperaturerhöhung um 100°, da sie alle normal zur Axe sind, aber ihr Ausdehnungscoëfficient ist der kleinste, den wir mit β bezeichnen wollen, also wird ihre Länge bei $100^0 = s\,(1 + \beta)$ sein, und die beiden Flächen b und b' ebenfalls einander und ihrer früheren Lage parallel bleiben, aber den Abstand $s\,(1 + \beta)$ besitzen. Alle normal zum dritten Flächenpaar, c und c', stehenden Geraden zwischen entsprechenden Punkten dehnen sich um ebenso viel aus, als die letzterwähnten, da sie ebenfalls normal zur optischen Axe sind, also ist bei 100° der Abstand der einander und der früheren Lage parallelen Flächen c und $c' = s\,(1 + \beta)$. Da alle Linien in der Ebene a, z. B. auch die Diagonalen derselben, senkrecht zur Axe sind, so erfahren sie gleiche Ausdehnung, es muss demnach die Fläche a stets die Gestalt eines Quadrates behalten. Die verticalen Flächen dagegen wachsen bei steigender Temperatur mehr in der Höhe, als in der Breite, und da ihre Diagonalen gleiche Winkel mit der Axe bilden, also immer gleich lang bleiben, so müssen sie sich in Rechtecke verwandeln. Da alle Richtungen normal zur Axe gleiche Ausdehnung erfahren, so können die Geraden zwischen entsprechenden Punkten der Seitenfläche jede beliebige Richtung innerhalb der senkrecht zur Axe stehenden Ebene haben, d. h. die beiden Flächenpaare bb' und cc' können ebenfalls jede beliebige Richtung sonst haben, wenn sie nur der optischen Axe parallel sind, so werden sie bei erhöhter Temperatur nur eine parallele Verschiebung erlitten haben. Dasselbe muss aber auch für jedes beliebige andere Flächenpaar, welches der Axe parallel ist, also z. B. für $DD'\,EE'$ Fig. 107 und die derselben parallele Fläche gelten, denn deren entsprechende Punkte, paarweise mit einander verbunden, liefern Gerade, welche ebenfalls alle zur Axe normal sind, also den Ausdehnungscoëfficienten β besitzen, folglich verschieben sich die Fläche $DD'\,EE'$ und die ihr parallele Ebene durch die Erwärmung des Krystalls so, dass beide einander und ihrer früheren Lage parallel bleiben, d. h. dass das Verhältniss

Fig. 107.



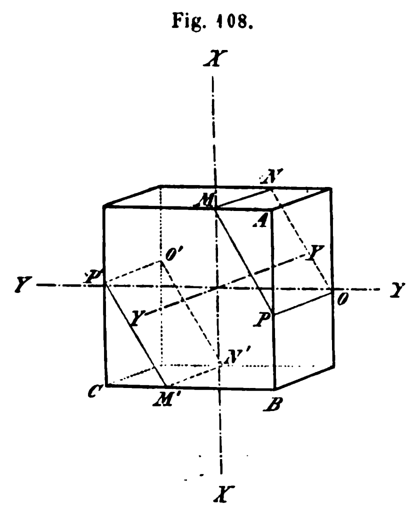
$$AD : AE$$

unverändert bleibt, oder, was dasselbe bedeutet, dass die Winkel, unter welchen $DD'\,EE'$ die Flächen b und c schneidet, keine Aenderung erfahren.

Denken wir uns dagegen an dem Würfel eine Ebene von der Lage $MNOP$ Fig. 108, und deren Parallelfläche $M'N'O'P'$ angeschliffen, und als-

dann den Krystall von 0° auf 100° erwärmt. Sei die Länge AM bei der ersteren Temperatur $= m$, $AP = p$, so ist offenbar $\frac{m}{p}$ die Tangente des Winkels, welche $MNOP$ mit der Fläche b (= vorige Figur) einschliesst (bei 0°). Nach dem Erwärmen ist die erstere Länge, weil sie normal zur Axe ist, $= m(1+\beta)$, die zweite, weil sie der optischen Axe parallel ist, $= p(1+\alpha)$ geworden, also ist bei 100° die Tangente des Winkels zwischen b und $MNOP$

Fig. 108.



$$= \frac{m(1+\beta)}{p(1+\alpha)} = \frac{m}{p} \cdot \frac{1+\beta}{1+\alpha};$$

da aber $\alpha > \beta$, der zweite Bruch also ein echter ist, so ist dieser Werth kleiner, als $\frac{m}{p}$, und da der kleineren Tangente ein kleinerer Winkel entspricht, so folgt daraus, dass die Ebene $MNOP$ die Würfelfläche b unter spitzerem Winkel durchschneidet, dass sie eine steilere Lage hat, als bei 0°. Bei letzterer Temperatur ist $M'C : P'C$ ebenfalls $= \frac{m}{p}$, und da $M'C \parallel AM$, $P'C \parallel AP$, so wird das Verhältniss dieser Längen bei 100°, wie das entsprechende der Parallelfläche,

$$\frac{m}{p} \cdot \frac{1+\beta}{1+\alpha},$$

d. h. die beiden Flächen $MNOP$ und $M'N'O'P'$ sind auch bei der höheren Temperatur einander parallel, aber nicht mehr ihrer früheren Lage, denn sie schneiden nunmehr die der optischen Axe parallele Fläche b des Würfels unter einem kleineren Winkel. Da nun die ganze soeben angestellte Betrachtung für jedes mögliche Längenverhältniss $\frac{m}{p}$ gilt, da ferner die verticalen Würfelflächen im Krystall jede beliebige Richtung haben können, so lange sie der Axe parallel sind, so ist das Gleiche der Fall für jede nach irgend einer Seite schief gegen die optische Axe geneigte Fläche. Es folgt hieraus der Satz: An einem optisch einaxigen Krystall, dessen Axe die Richtung der grössten Ausdehnung durch die Wärme ist, bleiben bei steigender Temperatur alle Flächen, welche parallel oder normal zu jener Richtung sind, sich selbst parallel, alle unter schiefen Winkeln dagegen geneigte Flächen indess nehmen eine steilere Lage an (wenn man sich die optische Axe vertical gestellt denkt). Dabei bleiben alle parallelen Flächenpaare es auch bei allen Temperaturen.

Genau dieselben Betrachtungen, angestellt in Betreff eines solchen einaxigen Krystalls, welcher sich parallel der Axe am wenigsten, senkrecht dazu am stärksten ausdehnt, bei welchem also ein Würfel beim Erwärmen

in der Breite mehr zunimmt, als in der Höhe, weil $\alpha < \beta$, also der für eine schräggeneigte Fläche in Betracht kommende Bruch $\frac{1+\beta}{1+\alpha}$ ein unechter ist, führen uns zu dem Resultat: Bei denjenigen einaxigen Krystallen, welche parallel der Axe den kleinsten Ausdehnungscoëfficienten haben, bleiben ebenfalls alle Flächen, welche die Winkel 0° und 90° mit der optischen Axe bilden, beim Erwärmen sich selbst parallel, dagegen alle unter anderen Winkeln gegen jene geneigten Flächen nehmen eine weniger steile Lage an, wobei alle parallelen Flächenpaare nach wie vor parallel bleiben.

Da bei beiden Arten von einaxigen Krystallen der Ausdehnungscoëfficient in allen Richtungen, welche denselben Winkel mit der optischen Axe bilden, der gleiche ist, so ist die durch Erwärmung hervorgebrachte Aenderung der Neigung gegen jene für alle Flächen, welche denselben Winkel mit ihr einschliessen, genau gleich. Bilden also mehrere Flächen mit der optischen Axe denselben Winkel, so bilden sie bei jeder anderen Temperatur mit jener ebenfalls gleiche Winkel, deren Werth jedoch grösser oder kleiner ist, je nachdem der Krystall in der Richtung der Axe den kleinsten oder grössten Ausdehnungscoëfficienten besitzt. So haben wir z. B. S. 47 in dem Rhomboëder des Kalkspaths eine Krystallform kennen gelernt, deren drei obere und die drei, jenen parallelen, unteren Flächen gleiche Neigung gegen die optische Axe besitzen; in Folge dessen sind die Winkel, in welchen die Flächen an den drei, oben im Punkte *a* Fig. 27 einander schneidenden Kanten zusammentreffen, alle drei gleich, nämlich 105° 4' (innerer Winkel) bei 10°; da der Kalkspath, wie wir S. 163 sahen, zu den Krystallen gehört, welche sich in der Richtung der Axe am stärksten ausdehnen, so müssen beim Erwärmen die oben in *a* zusammenstossenden Flächen gleichmässig eine steilere Lage annehmen, jene drei Kantenwinkel also kleiner werden. Sie betragen in der That bei 110°, also nach einer Temperaturerhöhung um 100°, nur noch 104° 56, und durch diese Aenderung hat **Mitscherlich** zuerst entdeckt, dass die Winkel der einaxigen Krystalle, mit Ausnahme derjenigen zwischen solchen Flächen, die normal oder parallel zur Axe sind, ihrer Grösse nach von der Temperatur des Krystalls abhängig sind.

3) Zweiaxige Krystalle. Auch bei diesen sind die Ausdehnungscoëfficienten in verschiedenen Richtungen verschieden, daher die Neigungswinkel der Krystallflächen mit der Temperatur veränderlich. Da aber alle einander parallelen Richtungen im Krystall sich gleich stark ausdehnen, so müssen zwei parallele Flächen, ihre Lage mag sein, welche sie wolle, auch bei jeder andern Temperatur parallel sein, wenn sie auch eine andere Neigung gegen die übrigen Flächen angenommen haben. Es folgt dies, wie bei den einaxigen Krystallen, daraus, dass die Geraden zwischen entsprechenden Punkten derselben gleiche Richtung haben, folg-

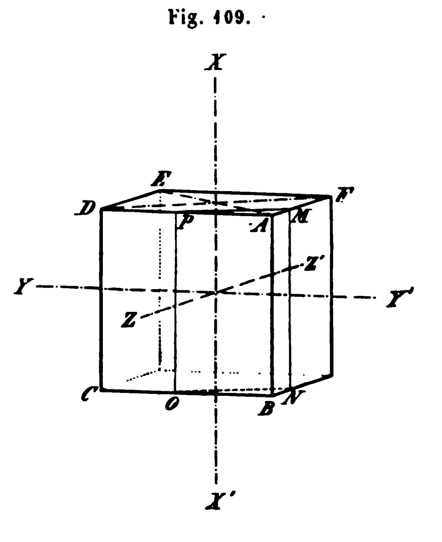
lich alle entsprechenden Punkte der einen von denen der anderen Ebene beim Erwärmen um gleich viel abrücken. Wir haben bei den in Rede stehenden Krystallen, wie in optischer Beziehung, drei Hauptrichtungen oder thermische Axen zu unterscheiden, diejenige der grössten, die der mittleren und die der kleinsten linearen Ausdehnung durch die Wärme. Die Ausdehnungscoëfficienten nach diesen drei Richtungen sollen resp. mit α, β, γ bezeichnet werden.

Am einfachsten gestalten sich die thermischen Verhältnisse bei denjenigen optisch zweiaxigen Krystallen, bei denen die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität des Aethers für die verschiedenen Farben zusammenfallen. Für diese sind nämlich denselben drei Richtungen auch diejenigen mit den Ausdehnungscoëfficienten α, β und γ parallel, so dass mit einer der drei optischen Elasticitätsaxen die Richtung der stärksten thermischen Ausdehnung, mit einer zweiten die der mittleren, mit der dritten endlich die der kleinsten Ausdehnung zusammenfällt. Denken wir uns bei 0^0 aus einem zweiaxigen Krystall eine Kugel vom Durchmesser d geschliffen, so wird dieselbe diese Form nicht mehr besitzen, wenn sie auf eine höhere Temperatur gebracht wird, sondern ihre Oberfläche wird eine Gestalt annehmen, deren Durchmesser nach der Richtung der grössten Ausdehnung $= d(1 + \alpha)$, nach derjenigen der kleinsten $= d(1 + \gamma)$ und senkrecht zu diesen beiden $= d(1 + \beta)$ ist. Der Durchschnitt dieser Form nach den drei zu einander senkrechten thermischen Hauptschnitten, d. h. den Ebenen, welche durch je zwei der Hauptrichtungen der thermischen Ausdehnung bestimmt sind, ist eine Ellipse, aber in jedem derselben eine solche von anderer Form. Die Kugel verwandelt sich durch die Erwärmung in ein dreiaxiges Ellipsoid.

Wenn man aus einem zweiaxigen Krystall, wiederum bei 0^0, einen Würfel herstellt, dessen Kanten sämmtlich die Länge s haben, und von denen vier der Richtung der grössten, vier derjenigen der mittleren und vier der Richtung der kleinsten Ausdehnung parallel sind, und diesen auf 100^0 erwärmt, so muss sich der Abstand desjenigen Flächenpaares, welches normal zu den erst bezeichneten vier Kanten steht, um αs, der des zweiten um βs, endlich der Abstand des dritten Flächenpaares um γs vergrössern, Die Kantenlängen sind jetzt $s(1 + \alpha)$, $s(1 + \beta)$, $s(1 + \gamma)$ geworden, es fragt sich aber, ob die, vorher rechten, Winkel, unter denen sich die Flächen schneiden, noch die gleichen sind. Denkt man sich eine der Würfelflächen, z. B. $ADEF$ Fig. 109', welche bei 0^0 die Gestalt eines Quadrats mit der Seite s hat und parallel der mittleren YY' und kleinsten Ausdehnung ZZ' sei (die Richtung der grössten XX' stehe in der Figur vertical), so sind deren Diagonalen AE und DF Richtungen, welche mit derjenigen der mittleren Ausdehnung gleiche Winkel bilden. Da nun der Ausdehnungscoëfficient in der Ebene $YY'ZZ'$, von der Richtung YY' aus nach beiden Seiten hin, gleichmässig abnimmt, bis er senkrecht zu jener, in der Richtung ZZ' sein Minimum erreicht, so müssen jene beiden Diago-

nalen AE und DF genau denselben Ausdehnungscoëfficienten besitzen, also bei allen Temperaturen gleich lang bleiben; das Quadrat $ADEF$ verwandelt sich bei 100° demnach in ein Rechteck mit den Seiten $s(1+\beta)$ und $s(1+\gamma)$. Wie leicht einzusehen, gilt die analoge Betrachtung, wenn man Y oder Z mit X vertauscht, auch für die anderen Flächen, und daraus folgt der Satz: Die drei aufeinander senkrechten Flächen eines jeden zweiaxigen Krystalls, deren Durchschnittsrichtungen parallel den drei Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Ausdehnung durch die Wärme sind, schneiden einander bei allen Temperaturen unter rechten Winkeln.

Fig. 109.



Es ist unschwer nachzuweisen, dass diese drei Ebenen die einzigen sind, deren gegenseitige Neigung unabhängig von der Temperatur ist.

Sei $MNOP$ Fig. 109 eine Ebene, welche einer der thermischen Axen (in unserem Beispiel XX') parallel ist, mit den beiden anderen beliebige Winkel bildet; derjenige Winkel v, in welchem sich bei 0° $MNOP$ mit $ABCD$ schneidet, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\text{tang } v = \frac{AM}{AP}$$

und, wenn wir $AM = m$, $AP = p$ setzen, durch

$$\text{tang } v = \frac{m}{p}.$$

Wird der Krystall auf 100° erwärmt, so dehnen sich die beiden Längen m und p ungleich stark aus; die erstere, parallel ZZ', erhält die Länge $m(1+\gamma)$, die letztere, parallel YY', wird $p(1+\beta)$; der Winkel der Flächen $MNOP$ mit $ABCD$ wird nunmehr gegeben sein durch die Gleichung

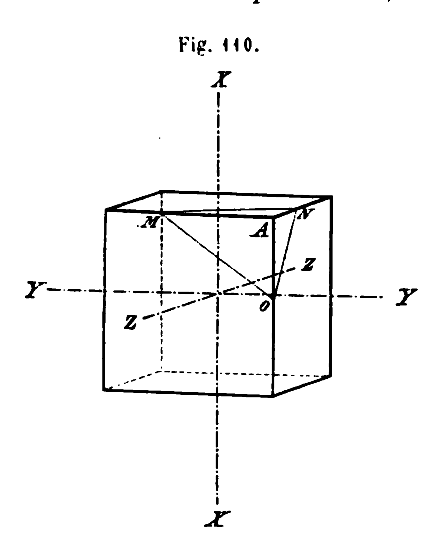
$$\text{tang } v' = \frac{m}{p} \cdot \frac{1+\gamma}{1+\beta}.$$

Da $\frac{1+\gamma}{1+\beta}$ ein echter Bruch ist, muss $v' < v$ sein; durch die Temperaturerhöhung ist der Winkel v, d. i. zugleich derjenige, welchen $MNOP$ mit der Ebene der thermischen Axen XX', YY' bildet, kleiner geworden. Verallgemeinert folgt hieraus der Satz: Alle Krystallflächen zweiaxiger Krystalle, welche einer thermischen Axe parallel, also normal zu einem thermischen Hauptschnitt sind, bleiben es zwar bei allen Temperaturen, aber ihre gegenseitigen Neigungen, sowie die Winkel, welche sie mit den beiden andern thermi-

schen Hauptschnitten bilden, sind beim Erwärmen veränderlich in der Weise, dass sie nach der Seite des relativ grösseren Ausdehnungscoëfficienten hin spitzer, die Supplementwinkel, welche nach der Seite der kleineren Ausdehnung hin liegen, um eben so viel stumpfer werden.

Betrachten wir endlich eine Fläche MNO Fig. 110, welche keiner der thermischen Axen parallel ist, so wird deren Lage gegen jene offenbar gegeben durch das Verhältniss der Längen $AM = m$, $AN = n$ und $AO = o$. Diese drei Längen dehnen sich aber sämmtlich verschieden aus, denn sie werden nach einer Temperaturerhöhung um 100° sein: $m(1 + \beta)$, $n(1 + \gamma)$ und $o(1 + \alpha)$. Da α, β, γ von einander verschieden sind, so ist das die Lage der Fläche bestimmende Verhältniss $AM : AN : AO$ bei höherer Temperatur ein anderes als bei niederer, die Ebene MNO ändert also beim Erwärmen ihre Neigung gegen alle drei thermischen Axen. Da wir über die Lage der in Rede stehenden Fläche keine besondere Voraussetzung gemacht haben, so ergiebt sich hieraus, dass bei einem zweiaxigen Krystall die Neigungswinkel aller Flächen gegen einander, welche keiner der thermischen Axen parallel sind, sich mit der Temperatur ändern.

Fig. 110.



§. 34. **Messung der thermischen Ausdehnung der Krystalle.** Aus der Darlegung des vorigen § ersieht man, dass nur die an einfach brechenden Krystallen bei einer bestimmten Temperatur gemessenen Krystallwinkel für alle andern Gültigkeit haben, während die Messung der Neigung zweier ebenen Flächen eines ein- oder zweiaxigen Krystalls im Allgemeinen nur für die Temperatur richtig ist, welche der Krystall hatte, als die Messung stattfand. Es ist indess der Einfluss derjenigen Temperaturdifferenzen, wie sie in Beobachtungsräumen vorzukommen pflegen, auf die Krystallwinkel in den meisten Fällen geringer, als der Grad der Genauigkeit der Messung selbst beträgt. Es ist also nur bei sehr genauen Messungen die Temperatur während derselben mit in Rechnung zu ziehen.

Aus der Eigenschaft der doppeltbrechenden Krystalle, dass ihre Krystallwinkel Functionen der Temperatur sind, ergiebt sich unmittelbar eine Methode zur Bestimmung der Ausdehnungscoëfficienten, nämlich mittelst der Winkeländerungen beim Erwärmen. Seien an einem einaxigen Krystall zwei gegen die optische Axe gleichgeneigte Ebenen $MNOP$ und $M'N'O'P'$ Fig. 111 (welche genau der Fig. 108 entspricht) vorhanden, und

werde deren Winkel φ bei einer bestimmten niedrigen Temperatur gemessen, so ist offenbar $\frac{1}{2}\varphi = APM$, also

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{AM}{AP}.$$

Sei der Winkel zwischen jenen beiden Flächen bei einer um 100° höheren Temperatur $= \varphi'$ gefunden, so ist nach S. 166

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi' = \frac{AM\,(1+\beta)}{AP\,(1+\alpha)}.$$

Diese Gleichung, in die obere dividirt, liefert

$$(1) \qquad \frac{1+\alpha}{1+\beta} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi'}.$$

Fig. 111.

Wir besitzen hierdurch, nach der Messung von φ und φ', eine Relation zwischen α und β, welche uns zwar das Verhältniss derselben, die relativen Ausdehnungscoëfficienten, nicht aber deren absolute Werthe erkennen lässt. Hierzu ist es nöthig, noch die Volumvermehrung desselben Körpers bei der gleichen Temperaturerhöhung zu bestimmen. Haben wir einen Würfel mit den Kantenlängen s bei der niedrigeren Temperatur so hergestellt, dass vier seiner Flächen der optischen Axe parallel sind, so ist dessen Volumen V

$$V = s^3.$$

Sei sein Volumen V' in der um 100° höheren Temperatur gemessen worden; dieses ist

$$V' = s^3\,(1+\alpha)\,(1+\beta)^2.$$

Diese Gleichung, durch die vorhergehende dividirt, giebt

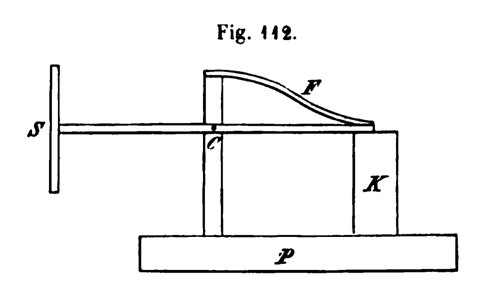
$$(2) \qquad (1+\alpha)\,(1+\beta)^2 = \frac{V'}{V}.$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) kann man die Ausdehnungscoëfficienten α, denjenigen parallel der optischen Axe, und β, den senkrecht dazu, berechnen. Auf diese Weise hat Mitscherlich die S. 164 angeführten Werthe der Ausdehnungscoëfficienten des Kalkspaths bestimmt. Da jedoch hierbei der Krystall von unten her erwärmt wurde, ist keine Sicherheit dafür gegeben, dass er in allen Theilen dieselbe und constante Temperatur besitzt. Genauer kann man jedenfalls die relativen Ausdehnungscoëfficienten bestimmen, wenn man bei der Winkelmessung den Krystall mit heisser Luft von derselben constanten Temperatur umgiebt, wie es bei einer Methode geschieht, welche im III. Theil beschrieben werden soll.

Directe Bestimmungen dieser beiden Zahlen sind ausgeführt worden von Pfaff, welcher die Krystalle nach verschiedenen Richtungen auf eine

Platte *P* Fig. 112 brachte, so dass der Krystall *K* oben von einem in *C* drehbaren Hebel berührt wurde, den eine Feder *F* schwach andrückte; an dem anderen Ende dieses Hebels befand sich ein Spiegel *S*, in welchem mittelst eines Fernrohrs eine entfernte Skala abgelesen wurde. Dehnt sich nun der Krystall durch die Erwärmung aus, so wird der ihn berührende Hebelarm gehoben, der andere gesenkt, so dass im Spiegel ein anderer Skalentheil abgelesen wird. Aus der Länge des Hebelarmes, der Entfernung des Spiegels von der Skala und der Differenz der beiden Ablesungen kann alsdann die Grösse der Ausdehnung des Krystalls berechnet werden.

Fig. 112.



Bei weitem die genaueste Methode jedoch zur directen Bestimmung der absoluten Ausdehnungscoëfficienten ist diejenige von Fizeau. Der Apparat besteht zunächst in einem Dreifuss von Platin, dessen Füsse in Spitzen nach oben endigen, auf welche eine planparallele Glasplatte horizontal aufgelegt ist. Zwischen diesen Füssen auf einer ebenfalls horizontalen Fläche des Dreifusses befindet sich der zu untersuchende Krystall mit einer ebenen Fläche aufliegend. Die nach oben gekehrte Fläche desselben, etwas concav oder convex geschliffen und polirt, befindet sich ganz nahe an der unteren Fläche der planparallelen Glasplatte. Wird diese nun durch schräg einfallendes homogenes Licht, z. B. eine durch Chlornatrium gefärbte Flamme, erleuchtet, so interferiren die an der unteren Fläche der Glasplatte und an der Oberfläche des Krystalls reflectirten Lichtstrahlen derart mit einander, dass ein System dunkler und heller Ringe im zurückgeworfenen Lichte erscheint, deren Lage gegen bestimmte, auf der Glasplatte markirte feste Punkte fixirt wird. Die Lage dieser dunklen Ringe hängt offenbar ab von dem Abstand der unteren Fläche der Glasplatte von der Oberfläche des Krystalles. Wird das Ganze nun in einen, oben durch eine planparallele Glasplatte geschlossenen Raum von höherer Temperatur gebracht, so dehnt sich der Krystall aus und verringert dadurch jenen Abstand; zugleich dehnen sich jedoch auch die Platinfüsse, welche die Glasplatte tragen, aus und vermehren denselben; die Aenderung jenes Abstandes ist daher die Differenz der Ausdehnung des Krystalls in der verticalen Richtung und des Platins. Ist die letztere bestimmt, so kann man aus der Aenderung des Abstandes der unteren Fläche der Glasplatte von der Oberfläche des Krystalls auch die erstere ableiten. Wird jener mehrfach erwähnte Abstand nun durch die Temperaturerhöhung geändert, so wird die Phasendifferenz der interferirenden Lichtstrahlen eine andere, d. h. die Streifen verschieben sich; und wenn man die Zahl der Interferenzfransen zählt, welche an einem bestimmten Punkte der Glas-

platte vorübergezogen sind, bis die Temperatur des Erhitzungsraumes constant geworden ist, so kann man daraus die Aenderung jenes Abstandes mit ausserordentlicher Genauigkeit berechnen, und aus dieser, wie erwähnt, die Ausdehnung des Krystalles in der verticalen Richtung.

Diese äusserst genaue Methode zur Bestimmung der Ausdehnungscoëfficienten war nun besonders geeignet, die Richtigkeit der Schlüsse zu prüfen, welche man bereits früher aus der Constanz oder der Variabilität der Krystallwinkel in Bezug auf die Ausdehnungsverhältnisse der Krystalle gezogen hatte. So wurden von Fizeau nach einander geprüft und vollkommen bestätigt alle die Gesetze, welche über die Ausdehnung der verschiedenen Klassen von Krystallen von S. 163 bis 170 auseinandergesetzt worden sind, und so einleuchtend dieselben auch im Hinblick auf die Analogie der optischen Verhältnisse waren, so können sie doch erst seit Fizeau's Untersuchungen als über jeden Zweifel erhaben betrachtet werden.

§. 35. **Einfluss der Wärme auf die optischen Eigenschaften.** Durch die Erwärmung wird die Dichte und Elasticität aller Körper geändert, und weil der die Lichtbewegungen in denselben fortpflanzende Aether unter dem Einflusse der Körpertheilchen steht, müssen auch dessen Dichte- und Elasticitätsverhältnisse durch die Wärme eine Aenderung erfahren. In der That lehrt die Beobachtung, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem festen Körper bei einer Temperaturänderung desselben eine andere wird, und zwar in der Weise, dass bei einigen der Brechungsexponent mit der Temperaturerhöhung zunimmt, während die Mehrzahl der untersuchten festen Körper, sowie die Flüssigkeiten, hierbei eine Abnahme desselben zeigen. Der Effect ist demnach ganz derselbe, als ob der Körper durch mechanische Kräfte comprimirt oder dilatirt worden wäre. Wie derselbe hierbei, wenn jene Kräfte an allen Stellen gleichmässig wirken, immer ein homogener Körper bleibt, so ist das Gleiche auch der Fall, wenn er in allen Theilen gleichmässig die höhere Temperatur angenommen hat. Es müssen also für denselben auch in anderer Temperatur alle Gesetze für die Bewegung des Lichtes in homogenen Medien gelten; nur die absoluten Zahlenwerthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben sich geändert. Wegen dieser Aenderung muss bei genauen Bestimmungen des Brechungsexponenten eines Körpers stets dessen Temperatur während der Messung angegeben werden. Da die thermischen Ausdehnungsverhältnisse der drei Klassen von Krystallen verschiedene sind, so müssen diese auch in Bezug auf die dadurch bewirkten Aenderungen ihrer optischen Verhältnisse getrennt behandelt werden, wie es im Folgenden geschehen soll.

1) Einfachbrechende Krystalle. Dieselben haben, wie aus der Constanz ihrer Winkel für alle Temperaturen hervorgeht, und wie auch durch die genauen Fizeau'schen Messungen direct bewiesen worden ist, nach allen Richtungen gleichen Ausdehnungscoëfficienten, folglich wird die optische Elasticität durch eine Erwärmung derselben nach allen Richtungen

um gleich viel verändert. Sobald also der Krystall in allen seinen Theilen gleichmässig die höhere Temperatur angenommen hat, ist sein Brechungsexponent kleiner*) als vorher, aber er hat denselben Werth in allen Richtungen, der Krystall ist optisch isotrop geblieben und bleibt es bei allen Temperaturen.

2) Einaxige Krystalle. Genaue Bestimmungen der Aenderung der Brechungsexponenten einaxiger Krystalle durch die Wärme liegen nur vor über den Quarz und Kalkspath. Von ersterem wies Fizeau nach, dass die Brechungsexponenten sowohl des ordinären, als des extraordinären Strahles bei höherer Temperatur kleiner werden, und ihre Abnahme bei beiden wenig verschieden ist. Für den letzteren fand er dagegen, dass beide zunehmen, der des ordentlichen Strahles sehr wenig, der des ausserordentlichen sehr bedeutend (Poggendorff's Ann. d. Physik, 119. und 123. Bd.).

Aus dem Verhalten der einaxigen Krystalle in der Wärme wissen wir, dass sie sich in allen Richtungen, welche gleiche Winkel mit der optischen Axe einschliessen, gleich stark ausdehnen; es ist daher zu erwarten, dass in allen dergleichen Richtungen auch die Aenderung der optischen Elasticität durch die Wärme die gleiche sein muss, sei es, dass sie mit der Temperatur wächst oder abnimmt. Ein bei einer Temperatur einaxiger Krystall muss dann auch bei jeder anderen einaxig bleiben; und das bestätigen die Beobachtungen an allen in ihrem Verhalten gegen die Wärme untersuchten, zahlreichen Krystallen. Da die Ausdehnung senkrecht zur optischen Axe einen andern Werth hat, als parallel derselben, so ist auch die Aenderung, welche die optische Elasticität durch die Erwärmung in der ersteren, von derjenigen, welche sie in der letzteren Richtung erfährt, mehr oder weniger verschieden, d. h. bei einer höheren Temperatur des Krystalls wird die Differenz seiner optischen Elasticität parallel und senkrecht zur Axe, welche wir die Stärke seiner Doppelbrechung nannten, grösser oder kleiner. Ist das letztere der Fall und die Doppelbrechung schon bei gewöhnlicher Temperatur sehr schwach, so giebt es eine solche, bei welcher der Krystall für eine Farbe gleiche Geschwindigkeit des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahls besitzt, aber eben nur für eine bestimmte Wellenlänge, wodurch er nicht aufgehört hat, ein einaxiger Krystall zu sein.

Die Interferenzerscheinungen der einaxigen Krystalle können also durch eine gleichmässige Temperaturerhöhung keine andere Aenderung erfahren, als solche, die aus einer Aenderung der Brechungsexponenten und der doppeltbrechenden Kraft folgen. Es werden demnach die von einer nor-

---

*) Wenigstens ist dies der Fall bei den vier bisher untersuchten krystallisirten Stoffen Chlorkalium, Chlornatrium (deren Brechungsexponent sich sehr stark mit der Temperatur ändert), Flussspath (Fluorcalcium) und Alaun, während das amorphe Glas sich entgegengesetzt verhält (vergl. Stefan, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 63. Bd. II. Abth.).

.l zur Axe geschnittenen Platte hervorgebrachten Farbenringe entweder ger oder weiter werden, sonst aber keine Aenderung erleiden.

Für den circularpolarisirenden Quarz ist nachgewiesen worden, dass :h seine Drehung von der Temperatur abhängt; dieselbe nimmt zu mit ·igender Temperatur und zwar schneller als letztere, aber für alle Farben ·rklich um gleich viel. Die durch das einfachbrechende chlorsaure Naum hervorgebrachte Drehung der Polarisationsebene des Lichtes wächst enfalls mit der Temperatur des Krystalls, und zwar noch stärker als im arz (Sohnke).

3) Zweiaxige Krystalle. In diesen Krystallen ist die Ausdehnung rch die Wärme eine andere in der Richtung der grössten, in derjenigen r mittleren und der der kleinsten optischen Elasticität; folglich erleiden ı drei Hauptbrechungsindices ungleiche Aenderungen, wenn der Krystall f eine höhere Temperatur gebracht wird. Beim Aragonit, wo dies zuerst rch die Messungen Rudberg's nachgewiesen worden ist, entspricht der :htung der grössten, mittleren und kleinsten Ausdehnung durch die ärme die kleinste, grösste und mittlere Abnahme des Brechungsexponten, beim Gyps nach Dufet's Beobachtungen der grössten, mittleren d kleinsten Ausdehnung auch die grösste, mittlere und kleinste Abnahme r Brechung der jenen Richtungen parallel schwingenden Strahlen, nur len hier die Richtungen der Maxima und Minima nicht genau zusammen. ɘ drei isomorphen Mineralien Schwerspath (schwefelsaures Baryum), Cölen (schwefelsaures Strontium) und Anglesit (schwefelsaures Blei) zeigen ch den Untersuchungen von Arzruni sämmtlich die stärkste Abnahme i dem grössten Brechungsexponenten γ, die kleinste bei α, aber das Verltniss der Ausdehnung durch die Wärme in den drei Hauptschwingungshtungen ist nicht übereinstimmend; denn während bei dem ersten dieser rper diejenige der mittleren Lichtgeschwindigkeit die grösste Ausdehng erfährt, ist es bei dem Anglesit die Axe der kleinsten Elasticität, die h am meisten ausdehnt. Hieraus, wie aus der Thatsache, dass bei einem eil der festen Körper (Glas, Kalkspath) die Brechungsexponenten in herer Temperatur zunehmen, während sie bei den übrigen kleiner wern, ersieht man, dass die Beziehungen zwischen den Aenderungen der rperlichen Dichte und denen der Elasticität des Aethers jedenfalls sehr licirte sein müssen.

Dass die durch die Wärme hervorgebrachte Aenderung der optischen lasticität in den drei Hauptschwingungsrichtungen bei allen zweiaxigen rystallen eine ungleich grosse ist, kann leicht auf indirectem Wege nach-wiesen werden, und dieser Beweis ist bereits für zahlreiche Substanzen bracht worden. Wenn nämlich die drei Hauptbrechungsexponenten :h die Erwärmung ungleich geändert werden, so ändert sich auch · Verhältniss zu einander; von diesem hängt aber die Grösse des optien Axenwinkels ab, es muss also auch dieser eine Function der mperatur sein, d. h. grösser oder kleiner werden, wenn der Krystall

erwärmt wird. Um dies zu constatiren, muss man die §. 26 beschriebene Methode mit einer solchen Aenderung anwenden, dass sich bei der Messung des Axenwinkels der Krystall in einer constanten höheren Temperatur befindet. Dies geschieht dadurch, dass man zwischen die Sammellinse und das Objectiv des horizontalen Polarisationsinstrumentes einen nach beiden Seiten weit hervorragenden Metallkasten einschiebt, in dessen Vorder- und Hinterwand je eine planparallele Glasplatte eingefügt ist, so dass man wie vorher durch das Instrument das Licht fallen lassen kann. Ist der Krystall nun zwischen diesen beiden Glasplatten, im Innern des Kastens, centrirt und drehbar befestigt, und die Luft in dem letzteren erhitzt und durch längere Zeit hindurch auf constanter (durch eingesetzte Thermometer gemessener) Temperatur gehalten, wodurch also auch die Krystallplatte in allen ihren Theilen dieselbe angenommen hat, so ergiebt die Messung, ganz ebenso angestellt, wie bei gewöhnlicher Temperatur, die jener entsprechende Grösse des Axenwinkels.

Die Bestimmung des Winkels der optischen Axen bei verschiedenen Temperaturen mittelst eines derartigen Erhitzungsapparates (dessen Einrichtung im III. Abschnitt eingehender beschrieben werden soll) hat nun gezeigt, dass in der That sich dessen Grösse bei allen untersuchten Körpern*) mit der Temperatur ändert, bei einigen so wenig, dass der Unterschied kaum durch die Messung constatirt werden konnte, bei der grössten Zahl um mehrere Grade bei einer Erwärmung auf 100°, während es endlich auch Krystalle giebt, deren optischer Axenwinkel sich schon bei geringerer Erwärmung um viele Grade ändert. Unter diesen befindet sich z. B. der Gyps, dessen Axenwinkel beim Erwärmen so rasch abnimmt, dass er schon bei einer noch unter 100° C. befindlichen Temperatur gleich Null wird, so dass bei einem gewissen Wärmegrade der kleinste Brechungsexponent für eine bestimmte Farbe gleich dem mittleren wird. Der Krystall ist dann temporär einaxig, aber natürlich wegen der Dispersion der Axen bei einer Temperatur nur für eine Farbe, nicht für die übrigen; während ein eigentlicher d. h. permanent einaxiger Krystall es bekanntlich für alle Farben und für alle Temperaturen ist. Wird ein Gypskrystall nun noch weiter erwärmt, so dass der vorher kleinste Brechungsexponent noch weiter zunimmt, demnach grösser wird, als der vorher mittlere, so ist nun die optische Axenebene senkrecht zu ihrer vorigen Lage, d. h. die optischen Axen gehen bei weiterer Erwärmung in der normalen Ebene auseinander, und man sieht leicht ein, dass die Axen für diejenige Farbe, für welche vorher deren Winkel den kleinsten Werth hatte, nunmehr den grössten Winkel, verglichen mit dem der anderen Farben, einschliessen.

Bei manchen Substanzen, deren optischer Axenwinkel eine beträchtliche Aenderung durch die Temperatur erleidet, beobachtet man die zuerst von Des Cloizeaux wahrgenommene Erscheinung, dass die Krystalle nach

*) Diese Untersuchungen sind namentlich von Des Cloizeaux angestellt worden.

dem Abkühlen nicht mehr genau ihre früheren optischen Eigenschaften annehmen, sondern permanent gewordene Aenderungen des optischen Axenwinkels zurückbleiben. Wahrscheinlich erklärt sich dieses Phänomen durch das Entstehen innerer Spannungen bei der Abkühlung von einer beträchtlich höheren Temperatur, welche mit einer erheblichen Ausdehnung des Körpers verbunden war. Die Krystalle des Feldspaths, bei welchen die Erscheinung besonders deutlich auftritt, zeigen sie nämlich nur dann, wenn sie bis zu schwacher Rothgluth erhitzt worden sind. Ist eine solche permanente Aenderung eingetreten, so hat der Krystall dabei noch die Fähigkeit behalten, temporäre Aenderungen des optischen Axenwinkels zu erleiden, nur dass dieser natürlich bei einer bestimmten Temperatur sich um so viel weniger ändern kann, wie vorher, als der Betrag der entstandenen permanenten Aenderung ausmacht.

Die magnetischen und elektrischen Eigenschaften der Krystalle.

§. 36. **Magnetische Eigenschaften der Krystalle.** Wenn man ein aus einem amorphen Körper, z. B. Glas, gefertigtes Stäbchen horizontal drehbar zwischen die beiden Pole eines Magneten*) an einem dünnen verticalen Faden (z. B. einem Coconfaden) aufhängt, so erhält dasselbe selbst eine Art Polarität, so dass seine beiden Enden entweder von den beiden Magnetpolen angezogen oder beide von diesen abgestossen werden. In ersterem Falle, welcher z. B. eintritt, wenn das Stäbchen aus eisenhaltigem Glase besteht, suchen sich beide Enden den Magnetpolen so sehr als möglich zu nähern, d. h. das Stäbchen dreht sich, bis es genau mit seiner Längsaxe in der Verbindungslinie der Magnetpole (der magnetischen Axe) steht; die angenommene Stellung, in welcher es verharrt, da in dieser offenbar seine Enden den Polen am nächsten stehen, nennt man deshalb die axiale Stellung. Besteht das Stäbchen dagegen aus eisenfreiem Glase, so werden seine Enden von beiden Polen des Magneten gleich stark abgestossen, dasselbe kann sich also nur in derjenigen Stellung in Ruhe befinden, in welcher beide Enden die grösstmögliche Entfernung von den Polen haben. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn die Längsrichtung normal zur magnetischen Axe ist, das Stäbchen dreht sich also in der horizontalen Ebene, bis es quer gegen jene Axe steht; diese Stellung nennt man die äquatoriale.

*) Man wählt hierzu einen Elektromagneten, bestehend aus zwei von dem galvanischen Strome umflossenen verticalen Eisencylindern, welche unten durch ein horizontales Eisenstück zu einem Hufeisen verbunden sind und oben in zwei einander zugekehrte Spitzen endigen, deren Abstand nur so gross ist, dass das horizontale Stäbchen eben noch zwischen denselben schwingen kann.

Nach diesem Verhalten im »magnetischen Felde« werden alle Substanzen in zwei Klassen eingetheilt, von denen man diejenigen, welche von den Magnetpolen angezogen werden, die paramagnetischen, die davon abgestossenen die diamagnetischen nennt. Hängt man eine aus irgend einem amorphen Stoffe, sei es ein para- oder ein diamagnetischer, gefertigte Kugel genau in die Mitte zwischen zwei Magnetpole, so wird dieselbe in jeder Lage in Ruhe bleiben, da sie sich in allen ihren Durchmessern gleichmässig verhält, diese aber gleich lang sind, folglich sämmtlich gleichen Grad der Polarität annehmen. Es ist hierbei also keine Ursache zu einer Drehung vorhanden.

Anders verhalten sich dagegen (wie Plücker zuerst nachgewiesen) im Allgemeinen die Krystalle, deren Magnetismus oder Diamagnetismus nämlich ebenso von der Richtung in denselben abhängig ist, als die übrigen physikalischen Eigenschaften. Sie zerfallen auch hierbei wieder in dieselben drei, getrennt zu behandelnden Klassen:

1) Die einfachbrechenden Krystalle haben nach allen Richtungen gleichen Grad des Para- oder des Diamagnetismus, folglich verhalten sie sich genau wie amorphe Körper, d. h. eine Kugel nimmt zwischen den Polen keine bestimmte Stellung an. Um zu bestimmen, ob die Substanz para- oder diamagnetisch ist, genügt es also, ein Stäbchen aus derselben in irgend einer Richtung herauszuschneiden, zwischen die Magnetpole zu hängen und zu beobachten, ob es sich axial oder äquatorial einstellt.

2) Die einaxigen Krystalle haben in der Richtung der Axe den stärksten Para- oder Diamagnetismus, senkrecht dazu (nach allen Seiten gleich) den geringsten, oder umgekehrt ist die eine oder die andere Eigenschaft in der ersteren Richtung im Minimum, in der letzteren im Maximum. Eine Kugel, aus einem einaxigen Krystall geschnitten, wird also nur dann zwischen den Polen eines Magneten in jeder Stellung in Ruhe bleiben, wenn sie so aufgehängt wird, dass sie sich nur um ihre optische Axe drehen kann, weil dann alle in der horizontalen Drehungsebene liegende Richtungen magnetisch gleichwerthig sind. Wird sie dagegen so aufgehängt, dass die Axe in der Drehungsebene liegt, so wird sie stets eine ganz bestimmte Einstellung annehmen. Es stellt sich nämlich die Richtung ihrer optischen Axe,

A) wenn der Krystall paramagnetisch ist, und *a*) seine Axe der Richtung des stärksten Magnetismus entspricht, axial; *b*) wenn dabei seine Axe das Minimum des Magnetismus zeigt, äquatorial;

B) wenn der Krystall diamagnetisch ist, und *a*) in der Axe den stärksten Diamagnetismus zeigt, äquatorial; *b*) wenn er aber parallel der Axe am schwächsten diamagnetisch ist, axial.

Ganz ebenso verhält sich ein aus dem Krystall geschnittener Würfel, dessen drei Flächenpaare genau gleichen Abstand haben, und deren eines normal zur optischen Axe ist, wenn derselbe so aufgehängt wird, dass die optische Axe sich in der horizontalen Ebene befindet.

3) Die zweiaxigen Krystalle haben, wenn sie ihrer ganzen Masse nach paramagnetisch sind, eine Richtung des stärksten, eine des mittleren und eine des schwächsten Magnetismus; die diamagnetischen ebenso des grössten, mittleren und kleinsten Diamagnetismus; daher ein solcher Krystall, in Kugelform gebracht, wenn er in einer beliebigen Richtung aufgehängt wird, stets eine bestimmte Einstellung annimmt, derart, dass sich unter allen in der Drehungsebene liegenden Richtungen diejenige des relativ stärksten Magnetismus oder schwächsten Diamagnetismus axial stellt.

Bei denjenigen optisch zweiaxigen Körpern, deren optische Elasticitätsaxen für alle Farben zusammenfallen, sind denselben auch die drei magnetischen Axen, d. h. die Richtungen des grössten, mittleren und kleinsten Para- oder Diamagnetismus parallel. Wenn man also aus einem solchen einen Würfel schneidet, dessen Flächen den drei optischen Hauptschnitten parallel sind, und denselben so aufhängt, dass ein Flächenpaar der horizontalen Drehungsebene parallel ist, so stellt er sich zwischen den Magnetpolen stets so ein, dass eines der beiden anderen Flächenpaare axial, das dritte äquatorial wird, und zwar nimmt dasjenige die erstere Stellung an, dessen Normale schwächeren Para- oder stärkeren Diamagnetismus hat, als die Normale zum dritten Flächenpaar. Hängt man nun den Würfel ein ander mal so auf, dass eine andere Elasticitätsaxe vertical ist, so wird die Einstellung lehren, welche der beiden, alsdann horizontalen Elasticitätsaxen grösseren Para- oder Diamagnetismus besitzt. Hierdurch ist nunmehr bestimmt, welche der drei magnetischen Axen die des grössten, mittleren oder kleinsten Para- oder Diamagnetismus ist. (Ausführlicheres vergl. in: Grailich und v. Lang, Orientirung der magnetischen Verhältn. in Kryställ. pp. Sitz.-Ber. der Wiener Akad. 32. Bd. S. 43, 1858.)

§. 37. **Elektrische Eigenschaften der Krystalle.** Wie sich die drei Klassen von Krystallen in magnetischer Beziehung unterscheiden, so ist mit Sicherheit eine analoge Verschiedenheit derselben in ihrem Verhalten zur Elektricität anzunehmen. Doppeltbrechende Krystalle, welche die Elektricität leiten, werden aller Voraussicht nach in den optisch verschiedenen Richtungen auch verschiedene elektrische Leitungsfähigkeit besitzen. Dafür sprechen die Resultate der Versuche, welche G. Wiedemann anstellte:

Bestreut man die ebene Oberfläche eines amorphen Körpers, wie Glas oder Harz, mit einem feinen, schlecht leitenden Pulver, z. B. Lycopodiumsamen, befestigt alsdann senkrecht darauf an einem geeigneten Halter eine isolirte Nähnadel und theilt derselben durch Annäherung des Knopfes einer mit positiver Elektricität geladenen Leydner Flasche Elektricität mit, so wird das Pulver von der elektrisirten Spitze aus abgestossen, und eine kreisförmige, von Strahlen durchzogene Fläche freigelegt. Nimmt man nun statt des amorphen Körpers eine Krystallplatte, so erscheint um die elektrisirte Spitze statt der kreisförmigen Figur im Allgemeinen eine elliptische, deren grösster und kleinster Durchmesser eine bestimmte Orientirung in Bezug auf den Krystall besitzen; z. B. ist bei Platten, aus einaxigen Kry-

stallen parallel der Axe geschnitten, die grosse Axe der Ellipse stets parallel oder senkrecht zur optischen Axe. Allgemein zeigen sich hier die Verhältnisse genau analog denen der Wärmeleitungsfähigkeit, wie sie durch den Sénarmont'schen Versuch (S. 159) sich ergaben. Uebereinstimmend damit erhielt Wiedemann auf Platten einfachbrechender Krystalle immer eine kreisförmige Figur.

Wenn auch directe Untersuchungen über die Verschiedenheit der inneren elektrischen Leitungsfähigkeit eines Krystalls nach verschiedenwerthigen Richtungen zur Zeit noch fehlen, so kennt man dagegen bei krystallisirten Stoffen, welche die Elektricität nicht leiten, Unterschiede im elektrischen Verhalten, welche den optischen Verschiedenheiten entsprechen. Solche Substanzen werden von benachbarten elektrischen Körpern durch Vertheilung (Influenz, Induction) elektrisirt; ihr elektrischer Zustand hört auf, sobald der influenzirende Körper entfernt wird, d. h. sie verhalten sich gegen elektrische Kräfte genau ebenso, wie weiches Eisen gegen magnetische. Man nennt sie diëlektrische Körper (Diëlectrica). Eine Kugel eines isotropen diëlektrischen Stoffes stellt sich zwischen zwei entgegengesetzt elektrisirten Metallflächen (im sogenannten elektrischen Felde) ebenso wenig ein, wie eine Kugel eines isotropen magnetischen Körpers zwischen zwei entgegengesetzten Magnetpolen (im Magnetfelde). Kugeln dagegen, welche aus doppeltbrechenden Krystallen geschliffen sind, geben eine bestimmte Einstellung, d. h. sie werden nach gewissen Richtungen stärker elektrisch erregt, als nach anderen. Im allgemeinsten Falle, dem eines optisch zweiaxigen Krystalls, ergiebt sich eine Richtung der grössten, kleinsten und mittleren Diëlektricitätsconstante, d. h. der grössten, kleinsten und mittleren diëlektrischen Erregung. Diese drei Richtungen, die sogenannten diëlektrischen Axen, fallen, wie aus der von Maxwell aufgestellten »elektromagnetischen Lichttheorie« folgt und wie sich in der That durch die Untersuchungen von Boltzmann und Root als richtig ergeben hat, nach Richtung und relativer Grösse mit den optischen Elasticitätsaxen zusammen.

Hiernach würde es möglich sein, auch auf elektrischem Wege die Krystalle der drei Klassen von einander zu unterscheiden, wegen der hier vorhandenen experimentellen Schwierigkeiten würde aber diese Methode für den praktischen Krystallographen ebenso wenig zu empfehlen sein, wie die Unterscheidung durch die magnetischen Eigenschaften. Für diesen Zweck sind in erster Linie nur die optischen Verhältnisse brauchbar, und in einzelnen Fällen das Verhalten der Krystalle gegenüber der Wärme.

Es giebt indess einige elektrische Eigenschaften der Krystalle, welche für die physikalische Krystallographie von Wichtigkeit sind, weil sie in gesetzmässigem Zusammenhange mit bestimmten Ausbildungsarten der Krystallformen stehen.

Die erste derselben ist die Pyroëlektricität, d. h. die Eigenschaft gewisser Krystalle, während einer Temperaturänderung an der Oberfläche freie Elektricität zu zeigen. Die Abhängigkeit dieser Eigenschaft von der

Richtung erweist sich dadurch, dass ein Krystall an ungleichwerthigen Stellen der Oberfläche, d. h. an den Enden der Durchmesser, welche krystallographisch verschiedenartigen Richtungen entsprechen, im Allgemeinen ungleiche Art oder wenigstens ungleich starke Spannung der entstehenden freien Elektricität zeigt. Von besonderem Interesse ist in dieser Beziehung das Verhalten derjenigen Krystalle, welche an beiden Enden einer durch die Symmetrie der Krystalle ausgezeichneten Richtung, einer sogenannten Symmetrieaxe, eine regelmässige Verschiedenheit der morphologischen Entwickelung aufweisen; bei diesen, den sogenannten hemimorphen Krystallen, zeigt sich der polare Gegensatz der beiden Seiten einer solchen Axe auch in elektrischer Beziehung, indem dieselben beim Erwärmen oder Abkühlen des Krystalls entgegengesetzt elektrisch werden, und zwar um so stärker, je schneller sich die Temperatur ändert, und unter Vertauschung der beiden Elektricitäten, wenn der Sinn der Temperaturänderung der entgegengesetzte wird. Man nennt diese Erscheinung polare Pyroëlektricität und bezeichnet diejenigen krystallographischen Richtungen, in welchen jener Gegensatz hervortritt, als elektrische Axen; endlich nennt man denjenigen Pol einer elektrischen Axe, welcher beim Erwärmen des Krystalls positiv, beim Abkühlen negativ elektrisch wird, den analogen, den entgegengesetzten den antilogen. Bei den Krystallen einer und derselben Substanz ist an einen bestimmten Pol der elektrischen Axe stets auch das Auftreten oder Fehlen gewisser Krystallflächen gebunden, daher die Bestimmung der polaren Pyroëlektricität für die krystallographische Untersuchung solcher Substanzen von erheblicher Wichtigkeit ist. Diese Bestimmung ist in ausgedehnter Weise für zahlreiche Substanzen, namentlich von Hankel, mit Hülfe des Elektrometers ausgeführt worden; eine weit bequemere und einfachere Methode derselben ist jedoch in neuerer Zeit von Kundt angewendet worden, daher diese im Folgenden kurz beschrieben werden möge:

Man erwärmt den Krystall im Luftbade auf eine, je nach dessen Substanz verschiedene, höhere Temperatur und bringt ihn dann, nachdem man ihn einige Male durch eine Weingeistflamme gezogen hat, um von seiner Oberfläche die Elektricität zu beseitigen, in einen kälteren Raum. Hat hier die regelmässige Abkühlung begonnen, so bestäubt man den Krystall mit dem zur Hervorbringung der sogenannten Lichtenberg'schen Figuren dienenden Pulver, aus feingesiebtem Schwefel und Mennige bestehend. Von diesen beiden Bestandtheilen des Pulvers setzt sich der Schwefel auf die positiv elektrischen, die Mennige auf die negativ elektrischen Oberflächentheile des Krystalls, so dass jene gelb, diese roth erscheinen, und zwar häuft sich das gelbe oder rothe Pulver um so stärker auf ihnen an, je stärker die elektrische Spannung auf den betreffenden Oberflächentheilen ist. Die nach dieser Methode erhaltenen Figuren lassen sich dann leicht auf ein mit Gummi bestrichenes Papier abdrücken und so dauernd erhalten.

Ebenso wie durch Temperaturänderung, werden nach der Entdeckung von J. und P. Curie die an den beiden Enden einer Symmetrieaxe mor-

phologisch verschieden entwickelten Krystalle auch durch einen in der Richtung dieser Axe wirkenden Druck entgegengesetzt elektrisch. Die Electricität wird nur so lange erzeugt, wie der Druck variirt, und zwar bringt eine Compression des Krystalls an einem bestimmten Ende der elektrischen Axe dieselbe Elektricität hervor, wie eine Abkühlung, während sich die dieser entgegengesetzte bei einer Abnahme des Druckes erzeugt, ebenso wie beim Erwärmen. Auch dieses Verhalten kann durch Bestäuben, z. B. an einer senkrecht zur Axe geschnittenen und in einem Schraubstock nach bestimmter Richtung gepressten Quarzplatte, nach der Kundt'schen Methode sehr leicht zur Erscheinung gebracht werden.

Die Vertheilung der durch Temperaturänderung auf der Oberfläche eines Krystalls entstehenden Elektricität hängt aber, ausser von der Richtung, auch noch ab von der Gestalt desselben und ergiebt sich in Folge dessen verschieden, wenn wir Krystalle derselben Art, aber in verschiedenen Formen, dem Versuch unterwerfen. Zeigt sich hier bereits eine Abhängigkeit vom Ort am Krystall, eine Beziehung, welche wir bei den übrigen, lediglich von der Richtung abhängigen physikalischen Eigenschaften der homogenen Krystalle, vermissen, so tritt dieselbe noch mehr hervor, wenn es sich um inhomogene, optisch anomale Krystalle handelt, bei denen die vorhandenen Spannungen oder Contractionen die Bewegung der Wärme und damit die frei werdende Elektricität beeinflussen. Ebenso ist dies der Fall bei den Verwachsungen mehrerer gleichartiger Krystalle, wobei die Elektricitäten der an der Verwachsungsgrenze gelegenen Partien sich gegenseitig beeinflussen und die Erscheinungen compliciren müssen. Andererseits geben aber auch die an solchen Verwachsungen hervortretenden Abweichungen von dem normalen elektrischen Verhalten einfacher Krystalle ein Mittel an die Hand, in solchen Fällen Krystalle als zusammengesetzt zu erkennen, in denen dies auf anderem Wege nicht möglich wäre (vergl. in der II. Abth. unter »Quarz«).

Während sich die Eigenschaft der Pyroëlektricität nur bei nichtmetallischen Körpern, welche den galvanischen Strom nicht leiten, vorfindet, zeigen einige metallische Stoffe dagegen ein eigenthümliches Verhalten in thermoëlektrischer Beziehung. Man nennt bekanntlich einen galvanischen Strom, welcher entsteht, wenn die Berührungsstelle zweier Metalle, z. B. Antimon und Wismuth, die ausserdem noch durch einen guten metallischen Leiter, z. B. einen Kupferdraht, mit einander verbunden sind, erwärmt wird, einen thermoëlektrischen Strom. Bei den beiden genannten Metallen bewegt sich der Thermostrom an der Berührungsstelle vom Wismuth zum Antimon hin, man nennt daher das Antimon thermoëlektrisch positiv gegen das Wismuth; ersteres ist, wenn auch in verschiedenem Grade (d. h. einen stärkeren oder schwächeren Strom liefernd), positiv gegen alle einfachen Metalle, das Wismuth negativ gegen alle übrigen. Einige Metallverbindungen, z. B. der Eisenkies, FeS^2, verhalten sich nun derart, dass gewisse Krystalle derselben selbst gegen Antimon noch positiv;

andere selbst gegen Wismuth noch thermoëlektrisch negativ sind, so dass zwei derart entgegengesetzte Krystalle, bei gleicher chemischer Beschaffenheit, einander berührend und an der Berührungsstelle erwärmt, einen kräftigeren Thermostrom liefern, als Antimon und Wismuth. Diese Substanzen bilden also zweierlei Krystalle, welche in einem ähnlichen Verhältniss zu einander stehen, wie rechts- und linksdrehende Quarzkrystalle.

Schluss.

§. 38. **Zusammenhang der physikalischen Eigenschaften der Krystalle.** Die physikalischen Eigenschaften der Krystalle, welche den Gegenstand der bisherigen Betrachtungen gebildet haben, zerfallen in zwei Klassen. Zu der ersten derselben gehören diejenigen, welche man als »mechanische« Eigenschaften bezeichnen könnte, d. h. welche sich auf die zwischen den Theilchen eines Krystalls herrschenden anziehenden und abstossenden Kräfte beziehen; von ihnen hängen ab: die Elasticität, die Cohäsion und der Widerstand gegen die Auflösung, welche der Krystall nach verschiedenen Richtungen besitzt. In Bezug auf diese Eigenschaften unterscheiden sich alle Krystalle scharf von den amorphen Körpern dadurch, dass letztere Gleichheit derselben in allen Richtungen zeigen, während in den Krystallen die Grösse der Elasticität, die der Cohäsion u. s. w. von der Richtung abhängen und gesetzmässige Functionen der letzteren darstellen. Die Differenzen einer dieser Eigenschaften nach verschiedenen Richtungen können bei einem krystallisirten Körper sehr geringe sein, so dass sie der Beobachtung entgehen, ohne dass dieser dadurch überhaupt einem amorphen Körper ähnlich wird; denn unter seinen Eigenschaften werden sich dann andere befinden, welche grosse Unterschiede in verschiedenen Richtungen zeigen, während ein amorpher Körper dadurch charakterisirt ist, dass er in Bezug auf alle physikalischen Eigenschaften vollständige Gleichheit in allen Richtungen zeigt.

Die zweite Klasse der physikalischen Eigenschaften umfasst alle übrigen, d. h. die optischen, thermischen, magnetischen u. s. w., und diese unterscheiden sich von denen der ersten Klasse dadurch, dass in Bezug auf sie die Krystalle zwar zum grösseren Theile auch in verschiedenen Richtungen Differenzen zeigen, dass aber die Gesetze der Abhängigkeit derselben von der Richtung weit einfacher sind. Sobald nämlich die zwischen den Theilchen eines Krystalls wirkenden mechanischen Kräfte in mehreren, durch die Symmetrie der Form ausgezeichneten Richtungen gesetzmässig gleich, in diesen also auch Elasticität und Cohäsion gleich gross sind, während sie natürlich in den zwischenliegenden Richtungen andere Werthe annehmen, — alsdann verhalten sich alle Richtungen einer solchen Ebene im Krystall gleich in Bezug auf die optischen, thermischen und anderen Eigenschaften. Die Abhängigkeit dieser von der Richtung im Krystall können wir uns im allgemeinsten Falle, dem der optisch zweiaxigen Krystalle,

immer darstellen durch ein um einen beliebigen Punkt des krystallisirten Mediums construirtes dreiaxiges Ellipsoid, dessen Radius vector in einer beliebigen Richtung der Grösse der betreffenden Eigenschaft in den ihm parallelen Richtungen im Krystall entspricht. Werden zwei der drei Hauptaxen des Ellipsoides gleich, so geht dasselbe in ein Rotationsellipsoid über, und wir haben den speciellen Fall der optisch einaxigen Krystalle. Werden endlich alle drei Hauptaxen gleich, so resultirt eine Kugel, welcher Fall dem in Bezug auf die zweite Klasse der physikalischen Eigenschaften nach allen Richtungen gleichen Verhalten der optisch einfachbrechenden Krystalle entspricht. Für irgend eine einzelne Eigenschaft, z. B. für die optische Elasticität in Bezug auf eine bestimmte Farbe, kann das charakteristische Ellipsoid eines zweiaxigen Krystalls so geringe Differenz zweier Hauptaxen zeigen, dass dasselbe innerhalb der Grenzen der Beobachtungsgenauigkeit die Gestalt eines Rotationsellipsoides besitzt — ja es kann sogar, da die Hauptaxen desselben sich durch die Wärme ungleich ändern, bei einer bestimmten Temperatur genau diese Form annehmen — ohne dass dadurch für den betreffenden Krystall ein Uebergang zur Klasse der einaxigen erzeugt würde, da die charakteristischen Ellipsoide für die übrigen Eigenschaften, die der optischen Elasticität in Bezug auf die übrigen Farben des Lichtes, das der Wärmeleitungsfähigkeit, der Ausdehnung durch die Wärme u. s. f. keineswegs dieselbe Gleichheit zweier Hauptaxen zeigen, resp. durch Temperaturänderung gleichzeitig annehmen. Dasselbe gilt für den scheinbaren Uebergang eines optisch einaxigen Krystalls in einen einfachbrechenden, welcher immer nur in Bezug auf eine physikalische Eigenschaft erfolgt, indem das zugehörige Rotationsellipsoid, dessen Gestalt für die verschiedenen Eigenschaften und für jede derselben bei verschiedener Temperatur eine verschiedene ist, die Form einer Kugel annimmt, — während die einfachbrechenden Krystalle dadurch charakterisirt sind, dass sie in allen optischen, thermischen, magnetischen und elektrischen*) Eigenschaften vollkommene Gleichheit nach jeder Richtung zeigen.

Hieraus geht hervor, dass in Bezug auf sämmtliche physikalische Eigenschaften die krystallisirten Substanzen in drei Klassen zerfallen, welche scharf von einander getrennt sind, so lange es sich um homogene, d. h. in allen parallelen Richtungen gleich beschaffene, und nicht durch äussere

*) Eine Ausnahme hiervon scheinen nach Hankel's Untersuchungen die Erscheinungen der Pyroëlektricität zu bilden, da dieser Beobachter auch bei einfachbrechenden Krystallen, in denen also alle Richtungen optisch und thermisch gleichwerthig sind, in krystallographisch differenten Richtungen Verschiedenheiten der durch Temperaturänderungen hervorgebrachten elektrischen Spannung fand. Bei diesen Beobachtungen spielt aber, wie S. 182 auseinandergesetzt wurde, nicht bloss die Richtung im Krystall, sondern auch die Stelle seiner Oberfläche, an welcher die Elektricität gemessen wird, eine Rolle, da die Vertheilung der Elektricität auch von der zufälligen Ausbildung des Krystalls abhängt. Um von diesem letzteren Einfluss unabhängige Beobachtungen zu gewinnen, müssten dieselben an krystallisirten Substanzen angestellt werden, denen man stets die gleiche Gestalt, und zwar am besten die von Kugeln, gegeben hat.

Kräfte veränderte Krystalle handelt, für welche allein die den Gegenstand der physikalischen Krystallographie bildenden Gesetze des Zusammenhangs der physikalischen mit den geometrischen Eigenschaften gelten. Die gesetzmässigen Beziehungen, in welchen die verschiedenen physikalischen Eigenschaften der Krystalle zu einander stehen, gehen am besten aus der folgenden Zusammenstellung hervor, in welcher die einer jeden Abtheilung zukommenden aufgezählt sind; die allgemeinen Bezeichnungen der drei Klassen von Krystallen sind hierbei nach ihrem optischen Verhalten gewählt, weil dieses für die Krystallographie das weitaus wichtigste ist.

I. Einfachbrechende Krystalle.

Die Elasticität ist in drei auf einander senkrechten Richtungen im Maximum und zeigt Minima in den Richtungen, welche je zwei derselben halbiren, oder ihre gleichen Minima fallen in jene drei Richtungen und in die dazwischen liegenden die Maxima. Analog verhält sich die Cohäsion und die Löslichkeit; infolge dessen sind in jenen drei Richtungen die Cohäsion gleich gross, die Aetzfiguren gleich beschaffen.

Die optische Elasticität ist gleich gross nach allen Richtungen, also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes für alle Farben unabhängig von der Richtung im Krystall (im Falle eines circularpolarisirenden Körpers auch dieselbe Drehung in jeder beliebigen Richtung). Ferner herrscht in allen Richtungen gleiche Absorption des Lichtes, Fortpflanzung der Wärme, thermische Ausdehnung, Magnetismus oder Diamagnetismus u. s. f.

II. Optisch einaxige Krystalle.

(Krystalle mit einer besonders ausgezeichneten Richtung, der physikalischen Hauptaxe.)

In der Hauptaxe erreicht die Elasticität ein Maximum oder Minimum, welches seines Gleichen in keiner weiteren Richtung hat; in der zur Hauptaxe normalen Ebene liegen mehrere, unter einander gleiche Maxima und Minima der Elasticität, und zwar in Richtungen, welche durch die Symmetrieverhältnisse des Krystalls ausgezeichnet sind. Parallel der Hauptaxe ist ferner ein Maximum oder Minimum der Cohäsion, welches einzig im Krystall ist; mit der dazu senkrechten Ebene fallen mehrere unter einander gleiche Maxima und Minima zusammen.

Die optische Elasticität besitzt ihr Maximum (negative Krystalle) oder ihr Minimum (positive Krystalle) in der Richtung der Hauptaxe, nimmt im ersteren Falle von derselben aus ab, und zwar nach allen Seiten gleichmässig, und ist am kleinsten in allen Richtungen senkrecht zu jener; im zweiten Falle nimmt sie zu und ist am grössten in den letzterwähnten Richtungen. Das Verhältniss der beiden Werthe der Elasticität parallel und senkrecht zur Axe ist für die verschiedenen Farben ein verschiedenes und kann sogar bei demselben Körper theils grösser, theils kleiner als 1

sein (s. S. 82). Die Absorption des Lichtes ist am grössten für Schwingungen parallel der Axe und für dazu senkrechte am kleinsten, oder am kleinsten für erstere und am grössten für die letzteren. Die Hauptaxe entspricht dem Maximum oder dem Minimum der Wärmeleitung, alle dazu normalen Richtungen haben gleiche, im ersteren Falle die kleinste, im zweiten Falle die grösste Wärmeleitungsfähigkeit. Bei einer Temperaturerhöhung dehnen sich die Krystalle in der Axe am stärksten, senkrecht dazu am wenigsten aus, oder umgekehrt. Der Magnetismus erreicht in der Axe sein Maximum oder sein Minimum u. s. f.

III. Optisch zweiaxige Krystalle.

Nach drei auf einander normalen Richtungen ungleiche Maxima oder Minima der Elasticität, deren Abhängigkeit von der Richtung in diesen Krystallen eine sehr complicirte ist; dementsprechend ist auch niemals die Cohäsion in mehreren durch die Symmetrie der Krystallformen ausgezeichneten Richtungen gleich gross.

Die optische Elasticität wird für jede Farbe durch ein dreiaxiges Ellipsoid bestimmt; im einfachsten Falle besitzen die Hauptaxen dieser Elasticitätsflächen für die verschiedenen Farben dieselben Richtungen im Krystall; alsdann fallen mit denselben auch die Richtungen des grössten, kleinsten und mittleren Wärmeleitungsvermögens, die thermischen Axen, die Richtungen des grössten, mittleren und kleinsten Magnetismus u. s. w. zusammen. Dies gilt jedoch nur für einen Theil der zweiaxigen Krystalle; bei einem anderen Theil derselben fällt nur eine jener drei Hauptrichtungen für die verschiedenen physikalischen Eigenschaften in die gleiche Richtung; bei den übrigen endlich haben dieselben eine von einander völlig unabhängige Lage im Krystall.

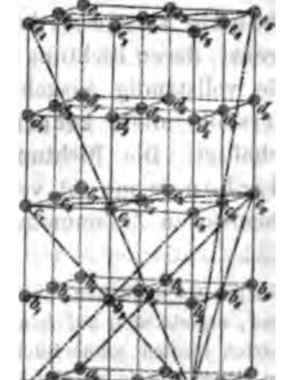
Dieser Zusammenhang der verschiedenen physikalischen Eigenschaften unter einander ermöglicht es, die Zugehörigkeit eines Krystalls zu einer der drei Klassen durch jede physikalische Eigenschaft zu bestimmen, denn dadurch ist seine Zugehörigkeit zu dieser Klasse in Bezug auf alle übrigen Eigenschaften zugleich mit erkannt. Von noch höherer Bedeutung wird dies dadurch, dass, wie in der folgenden Abtheilung gezeigt werden wird, alle Krystalle in Bezug auf ihre geometrischen Formen ebenfalls in drei Klassen zerfallen, und dass diese zugleich identisch sind mit den drei Klassen, in welche die Krystalle nach ihren physikalischen Eigenschaften eingetheilt werden müssen. Hierauf beruht es, dass wir durch die Bestimmung der Zugehörigkeit eines Krystalls zu einer gewissen Klasse in physikalischer Beziehung zugleich auch erkannt haben, in welche Abtheilung er seiner geometrischen Form nach gehört.

II. ABTHEILUNG.

DIE GEOMETRISCHEN EIGENSCHAFTEN DER KRYSTALLE.

§. 39. **Einleitung.** Die nunmehr als bekannt vorausgesetzten physikalischen Eigenschaften der Krystalle führen uns zu der Vorstellung, dass letztere aus der regelmässigen Aneinanderlagerung kleinster Theile (Krystallmoleküle) der betreffenden, den Krystall bildenden Substanz bestehen, wobei die Lagerung derart ist, dass sie um jedes Theilchen in gleicher Weise stattfindet, d. h. dass in allen parallelen Geraden, sie mögen, durch welche Punkte des Krystalls sie wollen, gehen, die Vertheilung der Massentheilchen die gleiche ist. Es folgt dies unmittelbar aus der Eigenschaft der Krystalle, in allen parallelen Richtungen das gleiche physikalische Verhalten zu zeigen. Eine solche regelmässige Anordnung der Krystallmoleküle ist aber nur dann möglich, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: es müssen nach zahlreichen Richtungen Ebenen durch den Krystall gelegt gedacht werden können, in deren jeder die darin liegenden Massentheilchen in netzförmiger Anordnung vertheilt sind, und in allen einander parallelen Ebenen dieser Art muss diese Vertheilung gleichartig sein. Alsdann können wir uns das ganze Aggregat von Massentheilchen, d. h. den Krystall, nach sehr verschiedenen, aber durch die Lagerung der Theilchen vollkommen bestimmten*) Richtungen in gleichartige ebene Schichten zerlegt denken.

Fig. 113.



*) Davon kann man sich am leichtesten eine Vorstellung verschaffen, wenn man sich die regelmässigste Anordnung solcher Massenpunkte denkt, welche möglich ist, nämlich diejenige, nach welcher dieselben die Eckpunkte von Würfeln bilden, wie z. B. die 8 Punkte $a_1a_2a_4a_5b_1b_2b_4b_5$ Fig. 113. Hier sind alle Schichten gleichartig, welche der Ebene $a_1a_3a_7a_9$ parallel sind, da in diesen sämmtlich die Theilchen quadratisch angeordnet erscheinen, ebenso alle Schichten, welche der Ebene $a_1a_7c_3c_9$ parallel sind, in welcher die Theilchen die Eckpunkte gleichgrosser Rectangeln mit den Seiten 1 (wenn der kleinste Abstand zweier Theilchen gleich 1 ist) und $\sqrt{2}$ darstellen; ferner sind gleichartig alle Schichten parallel der Ebene $a_3c_1c_9$, denn in allen sind die Theilchen Eckpunkte gleichseitiger Dreiecke, deren Seiten $= \sqrt{2}$; gleichartig sind alle Schichten parallel der Ebene durch $a_3c_2e_1e_5e_9c_8$, denn deren Theilchen bilden die Eckpunkte von Rhomben, deren Gestalt gleich $a_3c_2e_5c_8$ ist, u. s. f.

Das in dieser Figur dargestellte Beispiel einer Molekularanordnung entspricht offenbar einem krystallisirten Medium, welches nach drei aufeinander senkrechten Richtungen

Das Wachsthum eines Krystalls, z. B. wenn sich ein solcher aus einer Auflösung absetzt, geschieht aber in der Weise, dass sich an alle vorhandenen Theilchen, von diesen in bestimmter Richtung angezogen, neue gleichartig anlagern, so dass alle gleichzeitig angelagerten Schichten des Krystalls auch gleiche Lagerung ihrer Theilchen besitzen. Ist aber die Lagerung der Theilchen in solchen Schichten eine gleichartige, so müssen sie ebene sein; hört also zu einer bestimmten Zeit aus irgend einer Ursache (Mangel an weiterer, noch aufgelöster Substanz, Entfernung des Krystalls aus der Auflösung oder dergl.) das Fortwachsen des Krystalls auf, so muss derselbe nach jener Seite hin mit einer ebenen Fläche endigen, deren Richtung in einer bestimmten Abhängigkeit von der Art der Lagerung der Krystallmoleküle steht. Diese letztere ist aber nur die Folge der anziehenden und abstossenden Kräfte, welche zwischen den Theilchen wirken, und in Folge dessen abhängig von der Natur dieser Theilchen. So führt uns das physikalische Verhalten der Krystalle zu einer Vorstellung über die Art ihrer Zusammensetzung aus kleinsten Theilchen, welche uns vollständig darüber Rechenschaft giebt, warum ein Krystall nach dem Aufhören seines Wachsthums von ebenen Flächen begrenzt erscheint, deren Richtung in bestimmtem Zusammenhang mit der Natur seiner Substanz steht.

Die Begrenzung eines Krystalls nach einer oder mehreren Richtungen kann auch durch einen andern festen Körper bedingt sein, bis an dessen Oberfläche sich das Wachsthum des Krystalls fortgesetzt hat. Dann ist seine Begrenzung nach dieser Seite hin selbstverständlich von der Gestalt und zufälligen Lage jenes Körpers abhängig, kann also auch in keinem gesetzmässigen Zusammenhang mit der Natur derjenigen Substanz, welche den Krystall bildet, stehen. Wird dagegen der Krystall während seines Wachsthums von dem umgebenden Medium schwebend erhalten, wie es z. B. bei manchen aus geschmolzenen Gesteinen bei deren allmählicher Erstarrung sich ausscheidenden Mineralien der Fall ist, so erscheint derselbe vollständig ausgebildet, d. h. nach allen Seiten von ebenen Flächen begrenzt, deren Richtung von der inneren Structur des Krystalls abhängt, und die vollständig ausgebildeten oder in vollständiger Ausbildung gedachten Krystalle allein können es sein, mit denen sich die Krystallographie beschäftigt. Die Richtung jener ebenen Flächen, welche man Krystallflächen nennt, ist von der Natur der Moleküle des Krystalls, also von der chemischen Zusammensetzung der Substanz desselben, abhängig; sie muss

gleiche Beschaffenheit besitzt. Welche verschiedene Arten von Anordnungen möglich sind, ergiebt sich auf rein mathematischem Wege aus der Annahme, dass die krystallisirten Medien (ohne Rücksicht auf ihre Begrenzung) regelmässige Punktsysteme sind, bei denen um jeden Massenpunkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden anderen Massenpunkt — eine Annahme, welche, wie oben auseinandergesetzt, die natürliche Folge des physikalischen Verhaltens der Krystalle ist. Die Herleitung aller möglicher regelmässiger Punktsysteme auf dieser Grundlage findet man in dem Werke: L. Sohnke, Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur, Leipzig 1879.

also im Allgemeinen eine andere sein, wenn die chemische Natur eines Krystalls eine andere ist, d. h. jeder chemischen Verbindung muss eine bestimmte Krystallform zukommen, wobei unter »Krystallform« die Gesammtheit aller der Ebenen zu verstehen ist, welche wir uns durch die kleinsten Theilchen gelegt denken können, so dass jede parallele Ebene, durch ein beliebiges anderes Theilchen gelegt, die übrigen in gleicher Vertheilung enthält. Von dieser »Krystallform« eines Körpers hängen nun aber, wie in diesem Abschnitt eingehend gezeigt werden soll, die physikalischen Eigenschaften seiner Krystalle ab, so dass jene als die wichtigste seiner Eigenschaften erscheint, besonders deshalb, weil es die Krystallform ist, durch welche wir am sichersten zwei einander ähnliche, ihrer chemischen Natur nach jedoch verschiedene Körper von einander unterscheiden können.

Denken wir uns einen Krystall nur aus einer Art von Schichten sich aufbauend, und bleiben wir zunächst bei dem einfachsten in Fig. 113 dargestellten Beispiele der Vertheilung der Moleküle stehen, in welcher sie die Eckpunkte von Würfeln bilden. Hier giebt es offenbar dreierlei Ebenen, in welchen die Punkte quadratisch vertheilt liegen, das sind 1) diejenigen, welche der horizontalen Unter- oder Oberfläche aller jener Würfel parallel sind, 2) die der nach vorn gekehrten verticalen, und 3) die den nach rechts und links gewendeten Seitenflächen parallelen. Diese drei Arten von Ebenen stehen sämmtlich auf einander senkrecht. Findet nun die Anlagerung neuer Theilchen an die zuerst sich ausscheidenden nur in solchen Schichten statt, welche jenen drei Ebenen parallel sind, so muss ein Würfel entstehen, sobald nämlich nach allen sechs Seiten sich solche Schichten anlegen, also ein ringsum ausgebildeter Krystall entstehen kann. Wie viele solcher Schichten sich bilden, d. h. welche Dimensionen der entstehende Krystall erhält, dies hängt offenbar ab von der Quantität der zur Anlagerung disponiblen Materie, von der Zeit, während welcher das Wachsthum stattfand u. s. f., d. h. von äusseren Umständen, welche an und für sich in keiner Beziehung zur chemischen Natur des Stoffes, aus welchem der Krystall sich bildet, stehen.

Dies ist aber nicht nur der Fall mit der Grösse des Krystalls überhaupt, sondern auch mit seiner Ausdehnung nach verschiedenen Richtungen. Damit sich an einen in der Bildung begriffenen würfelförmigen Krystall auf allen sechs Flächen stets in gleicher Zeit gleich dicke Schichten absetzen, dazu würde eine so gleichmässige Zufuhr des Stoffes von allen Seiten nöthig sein, wie sie in Wirklichkeit nicht stattfindet. Es würde daher ein besonderer Zufall sein, wenn ein Krystall jener Gestalt nach allen drei, auf seinen Flächen normal stehenden Richtungen gleich schnell wachsen würde. Der allgemeine Fall ist vielmehr, dass dies mehr oder weniger ungleich stattfindet, so dass an dem fertigen Krystall der Abstand der beiden parallelen Flächen jedes der drei Flächenpaare ein verschiedener ist. Die Gestalt der Flächen ist alsdann nicht die von Quadraten, sondern von Rechtecken, von

denen je zwei an einander stossende verschiedenes Längenverhältniss ihrer Seiten haben. Nichts desto weniger nennen wir in der Krystallographie eine solche Form einen »Würfel«; während dieser in der Stereometrie definirt wird als ein von sechs Quadraten umschlossener Raum, ist ein Würfel in krystallographischem Sinne ein von drei Paaren paralleler Flächen, welche einander unter rechten Winkeln durchschneiden, umschlossener Raum. Wie weit jedes dieser Flächenpaare von einander absteht, d. h. wie breit, lang und hoch der Würfel ist, ob diese Dimensionen nahe gleich oder sehr verschieden sind, ob der Würfel z. B. die Form eines langen, äusserst dünnen rectangulären Stäbchens besitzt, Alles dies ist nur von den äusseren Umständen bei der Bildung des Krystalls abhängig, also für die Betrachtung ganz irrelevant, da es mit der Natur des Krystalls Nichts zu thun hat. Da jede Fläche in diesem Beispiel stets eine Würfelfläche bleibt, welchen Abstand sie auch von ihrer gegenüberliegenden parallelen habe, so folgt aus der bisherigen Betrachtung allgemein, dass eine Krystallfäche ihren krystallographischen Charakter nicht ändert, wenn wir sie uns parallel sich selbst verschoben denken.

Aus den physikalischen Eigenschaften und der aus diesen gefolgerten Art der Zusammensetzung der Krystalle aus kleinsten Theilchen (Molekulartheorie) haben wir also geschlossen, dass bei einem Krystall die Flächen im Allgemeinen nicht gleichen Abstand von irgend einem Punkte desselben haben können, dass dagegen dieselben Arten von Flächen stets dieselbe Richtung haben, d. h. dieselben Winkel mit einander einschliessen müssen. Dies bestätigt denn die Erfahrung vollkommen; die Krystalle einer Substanz von gleicher Form haben die mannigfaltigsten Dimensionen nach den verschiedenen Richtungen, so dass die gleichartigen Flächen oft die verschiedenste Grösse und Gestalt haben, während Eines immer constant bleibt: dies sind die Winkel, unter welchen die Flächen einander schneiden. Diese letzteren sind es daher auch allein, welche die Krystallform bestimmen, Alles andere ist nur von zufälligen Umständen abhängig, welche bei der Bildung des Krystalls stattfanden. Die Ungleichheit der Dimensionen der Krystalle nach verschiedenen Richtungen hat man fälschlicherweise mit dem Namen Verzerrung belegt, ob es gleich der eigentlich normale Fall der Ausbildung eines Krystalls ist, während es als ein besonderer Zufall betrachtet werden muss, wenn einmal ein solcher sich ausbildet, bei welchem alle gleichartigen Flächen genau gleich gross sind. Die Verschiedenheit von deren Grösse und Gestalt bedingt im Anfang eine Schwierigkeit beim Studium der Krystallographie, welche durch Uebung im Erkennen möglichst »verzerrter« Krystalle so bald als thunlich überwunden werden muss. Haben wir eine solche Form vor uns, so müssen wir uns deren Flächen sämmtlich parallel sich selbst so weit verschoben denken, bis sie alle gleichweit von einem beliebig gewählten Punkte des Krystalls, welcher dann dessen Mittelpunkt wird, abstehen, und erhalten hierdurch das geometrische Ideal der Form.

Dieses letztere, d. h. die Form mit gleicher Centraldistanz aller gleichartiger Flächen, ist es nun, welche wir bei allen krystallographischen Betrachtungen benutzen wollen, müssen nur dabei fortwährend festhalten, dass krystallographisch an der Form gar Nichts geändert wird, wenn ihre Flächen parallel sich selbst verschoben werden, dass Alles, was für eine Richtung in derselben gilt, auch für jede derselben parallele in gleicher Weise statthat, dass also, wenn von geraden Linien die Rede ist, stets Richtungen gemeint sind, und für eine Ebene von bestimmter Richtung jede ihr parallele substituirt werden kann. Die Form eines Krystalls ist nunmehr zu definiren als der Inbegriff einer Anzahl ebener Flächen, welche einander unter bestimmten Winkeln durchschneiden.

Die Winkel allein sind es, welche von der Natur des den Krystall bildenden Körpers abhängen, nur diese können ihn daher charakterisiren.

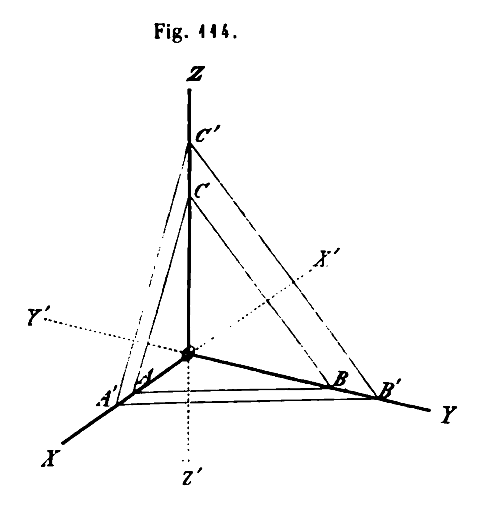
Unter dem »Winkel« zweier Flächen an einem Krystall soll im Folgenden stets derjenige verstanden werden, welcher von einer der beiden Flächen beschrieben wird, wenn man sie um die Schnittlinie beider dreht, bis sie, ohne das Innere des Krystalls zu bestreichen, in die Verlängerung der anderen fällt. Dieser »Flächenwinkel« ist gleich dem Winkel, welchen die Normalen der beiden Flächen mit einander bilden, und wird daher auch der »Normalenwinkel« genannt*).

§. 40. **Das Grundgesetz der Krystallographie.** Seien ABO, ACO und BCO Fig. 144 (s. folg. S.) drei beliebige Flächen eines Krystalls, welche einander in den drei Richtungen OX, OY und OZ schneiden, deren Durchschnittspunkt O wegen der Verschiebbarkeit der Flächen ein beliebiger Punkt des Krystalls ist. Nennen wir die drei Richtungen OX, OY und OZ die drei Axen des Krystalls, die Ebenen OXY, OXZ, OYZ die Axenebenen und die Winkel XOY, XOZ, YOZ die Axenwinkel, so theilen offenbar die drei Axenebenen den ganzen Raum in acht Oktanten, welche im Punkte O zusammenstossen. Zwei durch eine Axenebene getrennte Oktanten sollen anliegende, zwei, welche einander nur in einer Axe berühren, gegenüberliegende, und zwei nur im Punkte O zusammenstossende entgegengesetzte heissen.

* In vielen krystallographischen Schriften wird als Winkel zweier Flächen (vielfach auch »Kantenwinkel« genannt) der innere, von der Substanz ausgefüllte Winkel, d. h. das Supplement des Normalenwinkels, bezeichnet. Abgesehen davon, dass es der letztere ist, welcher am Goniometer erhalten wird (s. S. 28) und welcher gewöhnlich bei den Berechnungen der Krystalle Verwendung findet, müsste man aus dieser Definition eines Winkels den widersinnigen Schluss ziehen, dass zwei gegenüberliegende parallele Flächen, welche also genau im entgegengesetzten Sinne die Grenze der Substanz des Krystalls gegen seine Umgebung bezeichnen, den Winkel 0° mit einander bilden, während derjenige zwischen den Theilen einer und derselben Fläche 180° beträgt, oder allgemein: dass zwei Flächen, welche eine wenig verschiedene Lage am Krystall besitzen, einen um so grösseren Winkel mit einander bilden!

Irgend eine vierte Fläche des Krystalls schneide nun die drei Axen in den Punkten A, B und C, so mögen OA, OB und OC die Parameter dieser Fläche heissen, deren Durchschnittsfigur mit den Axenebenen das Dreieck ABC ist. Von dieser Fläche liegen, da sie die drei Axenebenen durchschneidet, Theile auch in den benachbarten Oktanten; man sagt nun von einer Fläche, dass sie in demjenigen Oktanten liege, welchen sie in einer geschlossenen Durchschnittsfigur, wie das Dreieck ABC im oberen rechten vorderen Oktanten in Fig. 114 es ist, schneidet. Zur Bestimmung der Lage einer Fläche gehört demnach ausser der Grösse der Parameter auch noch die Angabe desjenigen Oktanten, in welchem sie liegt, da acht Flächen mit gleichen Parametern möglich sind. Um die letztere Angabe zu ermöglichen, nennt man die Strecken OX', OY', OZ' der Axen negativ und versieht die Parameter, welche sich auf jene Strecken beziehen, mit dem —Zeichen.

Fig. 114.



Multiplicirt man die Parameter einer Fläche, z. B. OA, OB, OC, mit einer beliebigen Zahl m, so erhält man die Parameter einer der ersten parallelen Fläche, z. B. OA', OB', OC' Fig. 114, denn

$$\frac{OA'}{OA} = m, \quad \frac{OB'}{OB} = m, \quad \frac{OC'}{OC} = m$$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC},$$

folglich ist Dreieck OAB ähnlich Dreieck $OA'B'$, ebenso OAC ähnlich $OA'C'$; demnach

$$A'B' \parallel AB, \qquad A'C' \parallel AC,$$

also sind auch die Ebenen ABC und $A'B'C'$ einander parallel. Da parallele Flächen krystallographisch als identisch zu betrachten sind (wegen der parallelen Verschiebbarkeit einer jeden Fläche), so folgt hieraus, dass die Parameter einer Fläche mit jeder beliebigen Zahl multiplicirt werden können, ohne dass dadurch an der Lage der Fläche etwas geändert wird. Da die Zahl m auch -1 sein kann, so folgt weiter, dass zwei entgegengesetzte Flächen mit gleich grossen Parametern parallel sind. Endlich kann man der beliebigen Zahl m auch einen solchen Werth geben, dass einer der drei Parameter gleich 1 wird, woraus ersichtlich ist, dass die Lage einer Krystallfläche in Bezug auf die Axen schon durch zwei von einander unabhängige Grössen bestimmt ist.

Betrachten wir nun noch eine fünfte Fläche desselben Krystalls, deren Parameter OH, OK und OL Fig. 115 sind, so können wir deren Lage

noch auf andere Weise als durch die Länge der Parameter bestimmen indem wir nämlich angeben, der wievielste Theil ihre Parameter sind von den entsprechenden (auf dieselbe Axe bezogenen) der vorher betrachteten Fläche ABC.

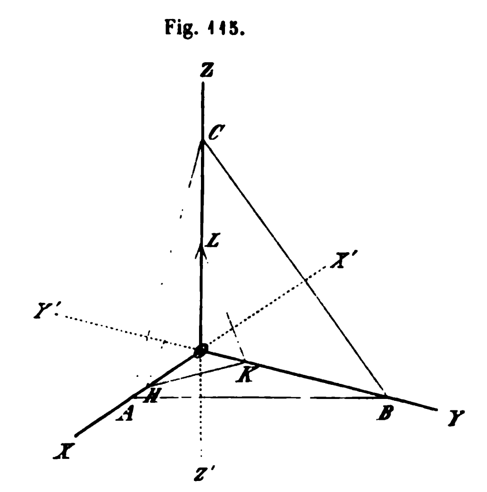
Sei z. B. OH der h-te Theil von OA, OK der k-te Theil von OB, OL der l-te von OC, so ist

$$OH = \frac{OA}{h},$$
$$OK = \frac{OB}{k},$$
$$OL = \frac{OC}{l},$$

und

$$h = \frac{OA}{OH},$$
$$k = \frac{OB}{OK},$$
$$l = \frac{OC}{OL}.$$

Fig. 115.



Diese drei Grössen h, k, l bestimmen die Fläche vollkommen, wenn die Lage der ersteren Fläche, d. h. die Parameter OA, OB, OC bekannt sind. Multipliciren wir h, k, l mit einer beliebigen Zahl m, so ist dies gleichbedeutend mit einer Multiplication von OA, OB und OC mit m; diese ändert an der Lage der ersteren Fläche Nichts, sondern entspricht nur einer Parallelverschiebung; wir können also auch diese, die letztere Fläche bestimmenden Grössen h, k, l mit irgend einer beliebigen Zahl multipliciren, ohne dadurch an dem Verhältniss beider, d. h. der Richtung derselben, Etwas zu ändern. Man kann daher auch immer eine der drei Zahlen h, k, l gleich 1 oder gleich einer beliebigen Zahl setzen.

In derselben Weise kann nun jede andere Krystallfläche $H'K'L'$ durch die drei Grössen

$$h' = \frac{OA}{OH'}, \quad k' = \frac{OB}{OK'}, \quad l' = \frac{OC}{OL'}$$

bestimmt werden, so dass also alle an einem Krystall auftretenden Ebenen durch die Parameter einer einzigen (beliebig gewählten) Fläche und durch die Verhältnisszahlen ihrer Parameter zu denen jener einzigen Fläche bestimmt werden können.

Die Parameter OA, OB und OC derjenigen Fläche, von welcher man ausgeht, nennt man die **Axenlängen** des Krystalls und bezeichnet sie mit a, b, c, von welchen Grössen gewöhnlich eine = 1 gesetzt wird. Die Verhältnisszahlen h, k, l einer andern Krystallfläche heissen ihre **Indices**, und

$$(h\,k\,l)$$

ihr **Symbol**, durch welches nach dem Gesagten ihre Lage vollkommen bestimmt ist, wenn die Axenlängen bekannt sind.

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass an einem Krystall nur solche Flächen vorkommen, deren Indices, von welchen Flächen desselben Krystalls als Axenebenen und zur Bestimmung der Axenlängen man auch ausgehe, sich wie rationale Zahlen verhalten. Nehmen wir also irgend drei Flächen eines Krystalls zu Axenebenen, irgend eine vierte zur Grundform, d. h. bestimmen wir durch diese die drei Axenlängen, welche aus der Neigung derselben gegen die Axenebenen berechnet werden können, und bestimmen dann durch Messung der Winkel aller übrigen Flächen auch deren Parameter und daraus für eine jede das Verhältniss derselben zu den Axenlängen, d. h. die Indices, so erhält man nur rationale Zahlen, und zwar fast immer die einfachsten, welche möglich sind. Da diese Zahlen aber aus Beobachtungen (Messungen der Krystallwinkel) hergeleitet werden, diese aber natürlich niemals absolut genau, sondern nur Annäherungen an den wahren Werth, behaftet mit mehr oder weniger grossen Fehlern, sind, so erklärt sich hieraus, warum man bei der Bestimmung der Indices niemals genau einfache rationale Zahlen erhält, sondern nur angenähert. Dass aber jene die wahren Werthe der gesuchten Indices sind, beweist der Umstand, dass die berechneten Indices sich ihnen um so mehr nähern, je genauere Winkelmessungen zur Rechnung benutzt werden konnten.

Da die Indices einer Fläche mit jeder beliebigen Zahl multiplicirt werden können, so sind sie immer auf eine Form zu bringen, in welcher sie sämmtlich ganze rationale Zahlen darstellen, daher das soeben erläuterte empirische Grundgesetz der Krystallographie auch das Gesetz der Rationalität der Indices heisst*). Nach der Zurückführung auf ganze Zahlen sind die Indices gewöhnlich nur die allerkleinsten der Zahlenreihe, nämlich

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$$

selten höhere. Da, wie schon bemerkt, die Berechnung derselben niemals absolut genau diese einfachen Zahlen liefert, so hat man für den gefundenen Werth immer die nächstliegende einfache rationale Zahl als wahren Werth einzusetzen, aber stets zu bestimmen, welche Differenz der zur Rechnung benutzten Krystallwinkel dem Unterschiede zwischen dem gefundenen und dem angenommenen Werthe entspricht, und zu sehen, ob diese Differenz

---

*) Dieses Gesetz folgt auch aus der S. 189 gegebenen Betrachtung, nach welcher die Krystallflächen nichts Anderes sind, als Molekularschichten; denn wenn man z. B. in der Fig. 113 dargestellten Anordnung der Krystallmoleküle die drei aufeinander senkrechten Ebenen, in denen die Theilchen quadratisch angeordnet sind, als Axenebenen, d. h. die Punktreihen $a_1a_2 \ldots$, $a_1a_4 \ldots$, $a_1b_1 \ldots$ als Axen, endlich eine Ebene, in welcher die Theilchen die Eckpunkte gleichseitiger Dreiecke bilden, als Grundform nimmt, so müssen alle Ebenen, in denen die Punkte anders vertheilt liegen, z. B. die beiden ausserdem in der citirten Fig. eingezeichneten, auf jene Axen bezogen, rationale Indices besitzen. Dass in der That das Gesetz allgemein für jedes als Molekularanordnung von Krystallen mögliche Punktsystem gilt, hat Sohnke (Wiedemann's Annalen d. Physik **16**, 489) bewiesen.

noch als Ungenauigkeit der Messung betrachtet werden kann. Ist letzteres nicht der Fall, so hat man einen dem gefundenen Werthe der Indices näher liegenden, dann natürlich weniger einfachen, welcher jene Bedingung erfüllt, als wahren Werth einzusetzen. Fände man z. B. das Verhältniss zweier Indices = 1 : 1,79, so kann dies = 1 : 2 nur in dem Falle sein, dass die zu Grunde gelegten Messungen wegen unvollkommener Flächenbeschaffenheit der Krystalle höchst ungenau seien; trifft dies nicht zu, so muss der viel weniger einfache Werth 1 : 1,75 = 4 : 7 das wahre Verhältniss der Indices angeben.

Die Axenwinkel α, β, γ Fig. 116 der drei zu Axenebenen beliebig ausgewählten Flächen und das Parameterverhältniss der Grundform, d. h. die Axenlängen $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, von denen eine = 1 gesetzt wird, so dass also nur zwei derselben zu bestimmen sind, stellen zusammen fünf von einander unabhängige Grössen dar, welche man die Elemente des Krystalls nennt.

Um diese zu bestimmen, bedarf es fünf von einander unabhängiger Gleichungen, und hierzu dienen die Messungen von fünf Krystallwinkeln, nämlich derjenigen drei, unter welchen die Axenebenen einander schneiden, und der beiden Neigungen der Grundform ABC gegen zwei der Axenebenen, z. B. gegen XOZ und YOZ. Denkt man sich um O als Mittelpunkt eine Kugelfläche gelegt, so schneiden die drei Axenebenen auf dieser ein sphärisches Dreieck ab, welches in Fig. 116 punktirt bezeichnet ist, dessen Winkel gleich denjenigen sind, unter welchen je zwei Axenebenen einander schneiden, und dessen Seiten die Bögen α, β, γ sind. Die drei Winkel dieses sphärischen Dreiecks A, B und C sind durch die Messung gegeben, denn A ist der Winkel zwischen den Axenebenen XOZ und XOY, B derjenige zwischen YOX und YOZ, C derjenige zwischen ZOX und ZOY. Berechnet man aus diesen nach der betreffenden Formel der sphärischen Trigonometrie die drei Seiten, so hat man damit die drei gesuchten Axenwinkel α, β, γ gefunden. Denkt man sich nun weiter um den Punkt C als Centrum eine Kugeloberfläche construirt, so schneiden die Grundform ABC und die beiden Axenebenen XOZ und YOZ aus diesem ein ebenfalls in der Figur punktirt bezeichnetes sphärisches Dreieck aus, dessen drei Winkel bekannt sind; es ist dies 1) der Winkel C der beiden Axenebenen XOZ und YOZ, 2, und 3) die Winkel zwischen diesen beiden und der Ebene ABC; es können also auch hier die drei Kreisbogen, welche die Seiten bilden, berechnet werden. Einer dieser ist gleich dem Winkel OCB; wenn wir diesen kennen, so sind in dem Dreieck OCB alle Winkel bekannt, da $BOC = \alpha$, also auch das Verhältniss $OC : OB = c : b$ bestimmt. Ganz ebenso liefert der Winkel OCA, welcher auch einer Seite des sphärischen Dreiecks gleich ist, die Kenntniss des Dreiecks AOC, da Winkel $AOC = \beta$, und somit des Verhältnisses der beiden Axenlängen $OA : OC = a : c$. Durch diese Rechnung ist also das

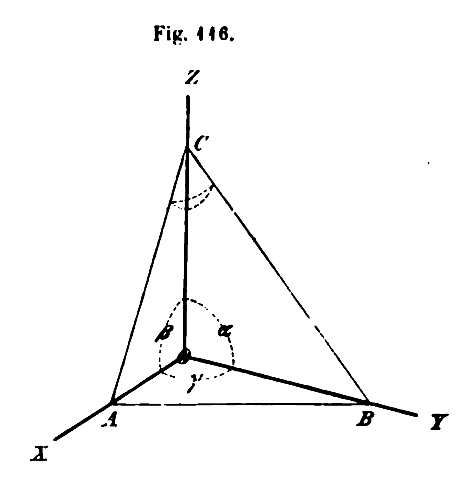


Fig. 116.

Verhältniss der drei Axenlängen, und wenn eine derselben = 1 gesetzt wird, diese selbst bestimmt; es sind demnach mit den vorher berechneten Axenwinkeln nunmehr sämmtliche fünf Elemente des Krystalls gefunden.

Durch die fünf Elemente ist die »Krystallform«, d. h. die Gesammtheit aller anderen Flächen, welche an dem Krystall noch auftreten können, gegeben, da nur solche vermöge des Gesetzes der Rationalität der Indices vorkommen, bei denen diese letzteren rationale Zahlen sind. Welche und wie viele von den krystallonomisch möglichen Flächen nun wirklich noch an dem Krystall sich ausgebildet haben, das hängt, wie die Erfahrung gelehrt hat, nicht nur von der Natur des Krystalls, sondern auch von den äusseren Umständen bei seiner Bildung ab.

Bei der Betrachtung der thermischen Verhältnisse der Krystalle haben wir gesehen, dass diese sich im Allgemeinen (mit Ausnahme derjenigen der ersten Klasse) nach verschiedenen Richtungen verschieden ausdehnen, wenn sie erwärmt werden, und dass in Folge dessen die Neigungen der Flächen gegen einander, die Krystallwinkel, sich ändern. Von diesen sind aber die Elemente des Krystalls, die Axenwinkel und Axenlängen, abhängig, also müssen auch diese mit der Temperatur des Krystalls sich ändern. Anders ist es dagegen mit den Indices. Seien die Ausdehnungscoëfficienten parallel den drei Axen gleich α, β, γ, so sind bei einer um 100° höheren Temperatur die Parameter der Grundform

$$OA\,(1+\alpha) \qquad OB\,(1+\beta) \qquad OC\,(1+\gamma).$$

Die Parameter einer beliebigen Fläche $(h\,k\,l)$, bei der Ausgangstemperatur $\frac{OA}{h}$, $\frac{OB}{k}$, $\frac{OC}{l}$, werden alsdann:

$$\frac{OA}{h}(1+\alpha) \qquad \frac{OB}{k}(1+\beta) \qquad \frac{OC}{l}(1+\gamma).$$

Diese Grössen sind aber resp. der h-te, k-te, l-te Theil der Parameter der Grundform bei derselben Temperatur, also bleibt, weil sich gleiche Stücke einer Axe um gleich viel ausdehnen, das Verhältniss der Parameter zweier Flächen, auf dieselbe Axe bezogen, immer das gleiche, d. h. die Indices werden durch die Temperatur nicht geändert*). Das Gesetz der Rationalität der Indices ist unabhängig von der Temperatur des Krystalls.

Wenn die Parameter der Primärform oder Grundform, d. h. der Fläche, auf welche wir alle übrigen beziehen, $= a$, b, c sind, so sind diejenigen einer Fläche, deren Symbol $(h\,k\,l)$ ist,

$$\frac{a}{h},\quad \frac{b}{k},\quad \frac{c}{l},$$

oder, mit dem Product $h\,k\,l$ multiplicirt:

$$k\,l\,a,\quad h\,l\,b,\quad h\,k\,c.$$

In dieser Form stellen nun die Parameter der Fläche $(h\,k\,l)$ ganze rationale Vielfache der primären Parameter oder der Axenlängen dar. Man

*) Die Möglichkeit einer stetigen Aenderung derselben mit der Temperatur würde auch ihrem Charakter als »rationalen« Zahlen widersprechen.

kann also, wenn die Axenlängen, d. h. die Parameter einer Fläche bekannt sind, die Lage aller anderen Flächen auch dadurch bestimmen, dass man angiebt, das wie Vielfache ihre Parameter von denen der ersten Fläche sind; dies geschieht, indem ihr Parameterverhältniss aufgeführt und die Axenlängen mit den betreffenden rationalen Coëfficienten multiplicirt werden. Das Verhältniss dieser rationalen Coëfficienten ist dann natürlich das reciproke der Indices.

Beide entgegengesetzte Formeln zur Bezeichnung einer Fläche, 1) durch ihr Axenverhältniss als Vielfaches des primären, 2) durch die Indices, sind in der Krystallographie eingeführt worden, die erstere von Weiss, die letztere von Miller, und beide werden noch jetzt gebraucht. Die ursprüngliche Weiss'sche Bezeichnungsweise der Flächen durch ihr Parameterverhältniss wird zwar nur noch von wenigen Krystallographen angewendet, um so mehr aber eine auf demselben Princip beruhende abgekürzte Flächenbezeichnung, welche von Naumann vorgeschlagen wurde. Diese Bezeichnungsweise enthält dieselben Coëfficienten der Parameter, wie die Weiss'sche, und hat daher mit dieser den Vortheil über die Miller'sche gemein, dass das Zeichen einer Fläche ohne Schwierigkeit eine Vorstellung über die Lage derselben gewinnen lässt, welche aus den Indices etwas weniger leicht zu erhalten ist. Dagegen hat die sogenannte Miller'sche Bezeichnungsweise (welche zuerst von Whewell vorgeschlagen wurde) den Vortheil, dass die Indices für die bequemsten Rechnungsmethoden unmittelbar verwendet werden können, während die reciproken Coëfficienten der Parameter zu denselben erst umgeändert werden müssen. Die Bezeichnung durch die Indices ist daher in neuerer Zeit immer allgemeiner in Aufnahme gekommen. Was die grössere oder geringere Einfachheit der Zahlen bei der einen und der anderen Bezeichnungsmethode betrifft, so kommt hierin keiner von beiden ein besonderer Vorzug zu, denn in einem Falle sind die Zahlen in dem Miller'schen Zeichen einfacher, als in dem Weiss'schen, in einem andern Falle ist es umgekehrt. Es geht dies deutlich aus den folgenden Beispielen hervor, welche zugleich zeigen sollen, wie die Zeichen der einen Art in diejenigen der anderen umgewandelt werden:

Die Indices der Grundform selbst sind offenbar 1, 1, 1, also deren Zeichen nach Miller = (1 1 1); das Weiss'sche Zeichen giebt die Parameter an und lautet daher

$$(a : b : c).$$

Die Fläche, deren Symbol (1 2 3), hat die Parameter

$$\frac{a}{1} : \frac{b}{2} : \frac{c}{3}$$

oder $6a : 3b : 2c$

oder $3a : \frac{3}{2}b : c$;

das Weiss'sche Zeichen derselben ist demnach

$$= (3a : \tfrac{3}{2}b : c).$$

Die Fläche (3 4 6) hat die Parameter

$$\frac{a}{3}, \quad \frac{b}{4}, \quad \frac{c}{6}$$
$$= 24a, \quad 18b, \quad 12c$$
$$= 2a, \quad \tfrac{3}{2}b, \quad c$$

und wird nach Weiss bezeichnet:

$$(2a : \tfrac{3}{2}b : c).$$

Der allgemeine Ausdruck für eine abgeleitete Fläche, welche durch die Indices mit $(h\,k\,l)$ bezeichnet wird, ist nach Weiss

$$(ma : b : nc).$$

Es ist oben unter den Zahlen, welche als Indices am häufigsten vorkommen, auch die Null aufgeführt; wird ein Index = 0, so werden z. B. die Parameter der Fläche $(h\,k\,0)$:

$$\frac{a}{h}, \quad \frac{b}{k}, \quad \frac{c}{0} = \infty,$$

ihr Parameterverhältniss wird also

$$ma : b : \infty c.$$

Dies ist demnach das Zeichen einer Fläche, welche der Z-Axe parallel geht, aber die beiden andern Axen in endlichen Abständen durchschneidet. Die Bezeichnungen

$$(h\,0\,k) = a \quad : \infty b : nc$$
$$\text{und } (0\,k\,l) = \infty a : \quad mb : nc$$

bedeuten dann Flächen, welche der Y-, resp. X-Axe parallel sind.

Werden zwei Indices der Null gleich, so kann der dritte jeder beliebigen Zahl, also auch der 1 gleichgesetzt werden; eine solche Fläche hat also das Symbol $(1\,0\,0)$ und die Parameter:

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{b}{0} = \infty, \quad \frac{c}{0} = \infty,$$

also das hierauf begründete Zeichen

$$(a : \infty b : \infty c).$$

Sie ist zwei Axen parallel, somit auch der Axenebene YOZ, in welcher diese liegen, d. h. jenes Zeichen ist dasjenige der Axenebene YOZ selbst. Ebenso sind:

$$(0\,1\,0) = (\infty a : b : \infty c)$$
$$(0\,0\,1) = (\infty a : \infty b : c)$$

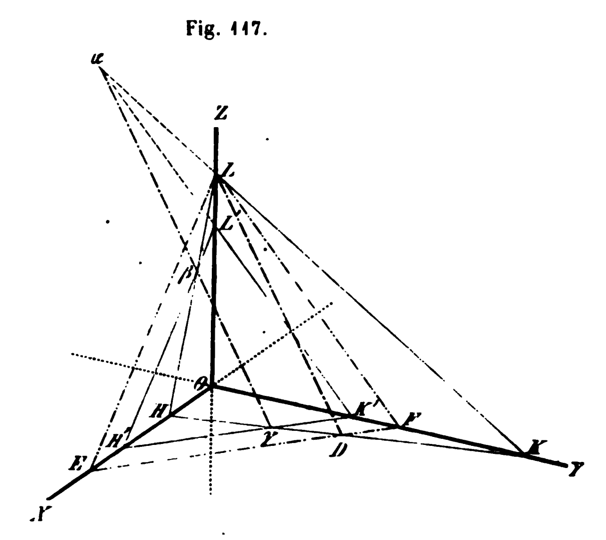
die Zeichen der beiden anderen Axenebenen XOZ und XOY.

§. 41. **Zonenlehre.** *A*) Richtung der Durchschnittslinie zweier Krystallflächen. In Fig. 117 sind zwei Flächen (hkl) und $(h'k'l')$ eingetragen, welche die drei Axen in H, K, L, resp. H', K', L' schneiden und deren Durchschnittsrichtung als Function ihrer Parameter bestimmt werden soll. Die Durchschnitte beider Flächen mit der Axenebene XOY, HK und $H'K'$, müssen sich in einem Punkte γ schneiden, und da dieser beiden Krystallflächen angehört, so muss es ein Punkt der gesuchten Durchschnittsrichtung sein. Ganz ebenso muss β als Schnittpunkt der Geraden HL und $H'L'$, sowie α als solcher der Linien KL und

$K'L'$ je einen Punkt derselben Geraden darstellen, welche also bereits durch die Lage zweier solcher Punkte bestimmt ist.

Durch parallele Verschiebung einer oder beider Krystallflächen wird die Richtung der Durchschnittslinie nicht geändert. Verschieben wir $(h'k'l')$ parallel sich selbst so weit, bis ihr Parameter auf der Z-Axe $= OL$ wird, so ist dies gleichbedeutend mit einer Multiplication aller ihrer Parameter mit $\frac{OL}{OL'}$; dieselben erhalten alsdann die Werthe:

Fig. 117.



$$OE = OH' \frac{OL}{OL'}, \qquad OF = OK' \frac{OL}{OL'}, \qquad OL.$$

Die Richtung der gesuchten Durchschnittslinie ist nunmehr DL; auf dieser ist der Punkt L bekannt, da er im Abstande OL (= einem Parameter der ersten Fläche) auf der Z-Axe liegt.

Um den zweiten Punkt D zu finden, construire man in Fig. 118 (s. folg. S.)

$$DU \parallel OY, \quad DV \parallel OX,$$

so ist die Aufgabe nun diejenige, die Längen OU und OV (die sogen. Coordinaten des Punktes D) durch die Parameter zu bestimmen, da mit deren Kenntniss die Gestalt des Parallelogramms $OUDV$, also auch die Lage des Punktes D gegeben ist.

Es ist Dreieck OKH ähnlich UDH, ebenso OFE ähnlich UDE; daraus folgt

$$OK : UD = OH : UH = OH : (OH - OU)$$
$$OF : UD = OE : UE = OE : (OE - OU)$$

Das erste Verhältniss liefert die Gleichung

$$OK \cdot OH - OU \cdot OK = OH \cdot UD$$

das zweite

$$OF \cdot OE - OU \cdot OF = OE \cdot UD.$$

Aus diesen beiden Gleichungen leiten sich die beiden Unbekannten OU und UD ab:

$$OU = \frac{OE \cdot OK \cdot OH - OF \cdot OE \cdot OH}{OE \cdot OK - OH \cdot OF}$$

$$UD = \frac{OK \cdot OF \cdot OE - OK \cdot OH \cdot OF}{OE \cdot OK - OH \cdot OF}$$

oder:

$$OU = OH \cdot OE \frac{OK - OF}{OE \cdot OK - OF \cdot OH}$$

$$UD = OV = OK \cdot OF \frac{OE - OH}{OE \cdot OK - OF \cdot OH}$$

Setzt man hierin für OE und OF ihre Werthe ein, so resultirt:

$$OU = OH \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot \frac{OK - \frac{OL}{OL'} \cdot OK'}{\frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot OK - \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot OH}$$

$$= OH \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot \frac{\frac{OL'}{OL} \cdot OK - OK'}{OH' \cdot OK - OK' \cdot OH}$$

$$OV = OK \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot \frac{\frac{OL}{OL'} \cdot OH' - OH}{\frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot OK - \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot OH}$$

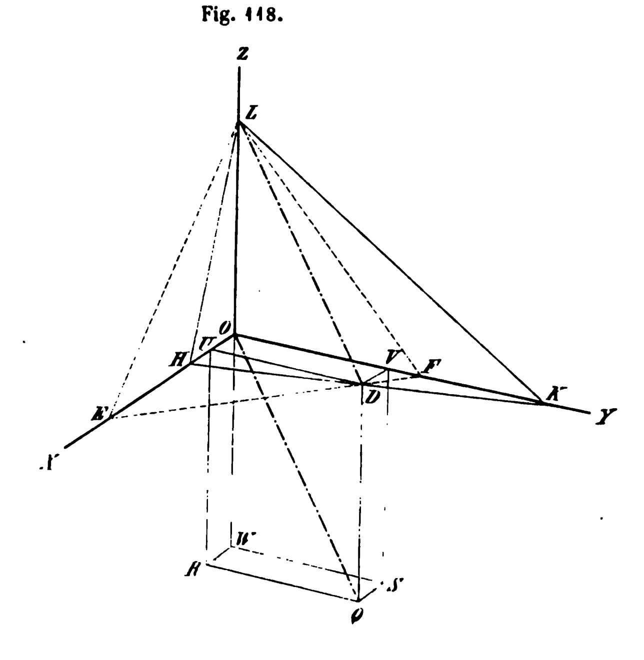
$$= OK \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot \frac{OH' - \frac{OL'}{OL} \cdot OH}{OH' \cdot OK - OK' \cdot OH}$$

$$OU = \frac{OH \cdot OH'}{OL'} \cdot \frac{OK \cdot OL' - OL \cdot OK'}{OK \cdot OH' - OH \cdot OK'}$$

$$OV = \frac{OK \cdot OK'}{OL'} \cdot \frac{OL \cdot OH' - OH \cdot OL'}{OK \cdot OH' - OH \cdot OK'}$$

Hiermit ist die Aufgabe, die Richtung der Durchschnittslinie von (hkl) und $(h'k'l')$ durch deren Parameter zu bestimmen, gelöst, da zwei Punkte derselben, L und D, nunmehr mittelst der Parameter gegeben sind.

Fig. 118.



Um die Ausdrücke für die drei Bestimmungsstücke jener Durchschnittslinie, OU, OV und OL, symmetrisch zu machen, tragen wir in Fig. 118 auf der negativen Seite der Z-Axe die Länge $OW = -OL$ ab und construiren das Parallelepiped $OUDVWRQS$; alsdann ist dessen Diagonale OQ ebenfalls die Richtung des Durchschnittes der beiden Flächen (hkl) und $(h'k'l')$. Multiplicirt man alle Parameter der Fläche (hkl), also OH, OK, OL, mit einer beliebigen Zahl m, so wird dadurch an der Richtung jener Fläche

Nichts geändert, also auch nicht an ihrer Durchschnittsrichtung mit $(h'k'l')$. Setzt man nun für OH, OK und OL die neuen Werthe $m \cdot OH$, $m \cdot OK$ und $m \cdot OL$ in die obigen Formeln für OU, OV und OW ein, so wird daraus $OU' = m \cdot OU$, $OV' = m \cdot OV$, $OW' = m \cdot OW$, d. h. es werden alle Seiten des oben bezeichneten Parallelepipeds mit derselben Zahl multiplicirt, ohne dass dadurch die Richtung ihrer Diagonale, d. i. die Durchschnittsrichtung der beiden Krystallflächen, geändert wird. Diese wird also auch unverändert bleiben, wenn die Ausdrücke für OU, OV und OW mit

$$\frac{OK \cdot OH' - OH \cdot OK'}{OH \cdot OH' \cdot OK \cdot OK' \cdot OL}$$

multiplicirt werden. Führt man dies aus, so findet man die nunmehr ganz symmetrischen Ausdrücke

$$OU = \frac{1}{OL \cdot OK'} - \frac{1}{OK \cdot OL'}$$

$$OV = \frac{1}{OH \cdot OL'} - \frac{1}{OL \cdot OH'}$$

$$OW = \frac{1}{OK \cdot OH'} - \frac{1}{OH \cdot OK'}$$

Durch diese Gleichung ist nun die Durchschnittsrichtung zweier Krystallflächen in der Weise zu bestimmen, dass man sich diese Richtung durch den Axenmittelpunkt gelegt denkt, womit ein Punkt derselben gegeben ist, — während man den zweiten dadurch findet, dass man obige Werthe von OU, OV und OW je nach ihrem Vorzeichen auf die positive oder negative Seite der X-, Y- und Z-Axe aufträgt und damit die drei Seiten des Parallelepipeds erhält, dessen dem Axenmittelpunkt entgegengesetzter Eckpunkt jener zweite Punkt ist, und dessen Diagonale die gesuchte Durchschnittsrichtung darstellt.

Die drei Grössen OU, OV, OW bestimmen die Durchschnittsrichtung zweier Flächen durch deren Parameter; will man sie statt dessen durch die Indices bestimmen, so hat man nur nöthig, in die Formeln derselben die Werthe der Parameter, durch die Indices ausgedrückt, einzusetzen. Wenn die Axenlängen des Krystalls $= a, b, c$, so sind die Parameter der beiden Flächen (hkl) und $(h'k'l')$:

$$OH = \frac{a}{h}, \quad OK = \frac{b}{k}, \quad OL = \frac{c}{l}$$

$$OH' = \frac{a}{h'}, \quad OK' = \frac{b}{k'}, \quad OL' = \frac{c}{l'}$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln für OU, OV, OW (s. oben) ein und bringt jeden Ausdruck auf einen Nenner, so erhält man:

$$OU = \frac{kl' - lk'}{bc} = \frac{u}{bc}$$

$$OV = \frac{lh' - hl'}{ac} = \frac{v}{ac}$$

$$OW = \frac{hk' - kh'}{ab} = \frac{w}{ab},$$

wenn man die Differenzen $kl' - lk'$, $lh' - hl'$, $hk' - kh'$ abgekürzt mit u, v, w bezeichnet. Multiplicirt man diese Grössen mit dem Produkt abc,

wodurch ja die Richtung der Diagonale des Parallelepipeds nicht geändert wird, so verwandeln sie sich in

$$a\,u,\ b\,v,\ c\,w,$$

welche Grössen als Seiten des Parallelepipeds dessen Diagonale, als die Durchschnittsrichtung der Flächen $(h\,k\,l)$ und $(h'\,k'\,l')$, durch die Axenlängen und die Indices derselben bestimmen. Die nur von den Indices abhängigen Grössen u, v, w erhält man mittelst eines sehr leicht dem Gedächtniss einzuprägenden Schemas aus jenen, indem man nämlich die Indices der einen Fläche zweimal und darunter die der andern ebenso oft schreibt und nach Weglassung der ersten und letzten Colonne je zwei Zahlen kreuzweise multiplicirt und die beiden Producte von einander abzieht:

$$\begin{array}{cccccc} h & k & l & h & k & l \\ & \times & \times & \times & & \\ h' & k' & l' & h' & k' & l' \\ \hline & kl' - lk', & lh' - hl', & hk' - kh' & & \\ & = u & = v & = w & & \end{array}$$

Da die Indices stets ganze rationale Zahlen sind, so müssen auch die Grössen u, v, w solche sein.

B) Durchschnittsrichtung dreier, einer Richtung paralleler Krystallflächen. Die beiden unter *A*) betrachteten Flächen sind ihrer soeben bestimmten Durchschnittsrichtung parallel; dies kann auch eine dritte sein, dann muss sie die beiden ersteren in Geraden (die Durchschnittslinien zweier Krystallflächen nennt man Kanten) schneiden, welche einander und jener ersten Durchschnittsrichtung parallel sind. Die Gesammtheit von Flächen, welche einander in parallelen Kanten durchschneiden, nennt man eine Zone, die Flächen derselben tautozonal. Denkt man sich alle Flächen einer Zone durch einen Punkt gehend, so schneiden sie einander sämmtlich in einer Geraden, in der Richtung, welcher sie parallel sind, der sogenannten Zonenaxe.

Soll eine Fläche *R* tautozonal mit zwei anderen *P* und *Q* sein, so müssen ihre Indices einer bestimmten Bedingung genügen, welche nunmehr aufzusuchen ist. *P*, *Q*, *R*, deren Symbole resp. sind

$$P(e\,f\,g),\quad Q(h\,k\,l),\quad R(p\,q\,r),$$

werden in einer Zone liegen, wenn die Durchschnittslinie von *P* und *Q* parallel derjenigen von *Q* und *R* ist, d. h. wenn die Diagonalen der beiden Parallelepipede, welche wir für den ersteren, wie für den zweiten Durchschnitt in derselben Weise construiren, wie unter A) (s. Fig. 118), zusammenfallen, denn jene sind die Durchschnittsrichtungen, die eine von *P* und *Q*, die andere von *Q* und *R*, und sind deshalb parallel; legen wir sie also durch denselben Punkt, den Axenmittelpunkt, so müssen sie sich decken. Die Diagonalen jener beiden Parallelepipede können aber nur dann in dieselbe Richtung fallen, wenn das Verhältniss der drei Seiten in beiden das gleiche (das eine dem andern ähnlich ist), d. h. wenn die Seiten des ersten

sich nur durch einen constanten Factor von denen des zweiten Parallelepipeds unterscheiden.

Die Durchschnittslinie der Flächen P und Q, kurz mit $[P,Q]$ bezeichnet, ist bestimmt durch das Parallelepiped, dessen Seiten:

$$au = a(fl - gk),\ bv = b(gh - el),\ cw = c(ek - fh);$$

die Durchschnittsrichtung $[Q,R]$ durch die Parallelepipedseiten:

$$au' = a(kr - lq),\ bv' = b(lp - hr),\ cw' = c(hq - kp).$$

Sollen P, Q, R tautozonal sein, so müssen die entsprechenden Seiten jener beiden Parallelepipede sich zu einander verhalten, wie derselbe constante Factor, z. B. C, folglich*)

$$fl - gk = C(kr - lq) \qquad (1)$$
$$gh - el = C(lp - hr) \qquad (2)$$
$$ek - fh = C(hq - kp) \qquad (3)$$

Multiplicirt man (1) mit p, (2) mit q, (3) mit r, und addirt alle drei Gleichungen, so wird die ganze rechte Seite der resultirenden Gleichung Null, also ist:

$$p(fl - gk) + q(gh - el) + r(ek - fh) = 0.$$

Bezeichnen wir wieder die obigen Differenzen, welche den auf voriger S. oben gefundenen entsprechen, abgekürzt mit u, v, w, so ist die Bedingung der Tautozonalität der Fläche (pqr) mit den Flächen (hkl) und (efg) gegeben durch die Gleichung:

$$up + vq + wr = 0.$$

Daraus ersieht man, dass die Bedingung, unter welcher drei Flächen in eine Zone fallen, nur abhängt von den Indices dieser Flächen, dagegen von den Axenlängen vollkommen unabhängig ist. Dass diese sich bei den meisten Krystallen mit der Temperatur ändern, kann daher auf die Tautozonalität keinen Einfluss ausüben. Die Indices jedoch, von denen allein jene Bedingung abhängt, behalten für jede Temperatur des Krystalls ihre rationalen Werthe constant bei, also behält auch jene Bedingungsgleichung für alle Temperaturen ihre Gültigkeit. Drei Krystallflächen, welche für irgend eine Temperatur eine Zone bilden, schneiden einander auch bei jeder andern Temperatur in parallelen Kanten. Man nennt dieses, aus demjenigen der Rationalität der Indices folgende Gesetz das Gesetz der Erhaltung der Zonen.

Die Grössen u, v, w, welche offenbar stets rationale Zahlen sind, heissen die Indices der Zone, $[uvw]$ ihr Symbol, welches aus irgend zwei Flächen P und Q, unter einer beliebigen Zahl solcher, welche einander in parallelen Kanten schneiden, berechnet werden kann; jede beliebige andere Fläche (pqr) der Zone $[P, Q]$ (welche man auch mit $[hkl, efg]$ oder mit $[uvw]$ bezeichnen kann) muss in Bezug auf ihre Indices der obigen Bedingungsgleichung genügen.

*) In diesen Gleichungen heben sich die Axenlängen a, b, c auf, weil stets eine derselben als Factor beider Seiten der Gleichung erscheint.

Man kann diese Gleichung folglich dazu benutzen, die Richtigkeit der Indices einer Fläche zu prüfen, welche man auf anderem Wege bestimmt hat, und welche in einer Zone liegt*) mit zwei bekannten Flächen. Sind diese z. B. (201) und (311), so ist das Symbol der Zone $[\bar{1}\bar{5}2]$, d. h. $u = -1$, $v = -5$, $w = +2$, und es gehört die Fläche $(\bar{3}11)$ in diese Zone, denn deren Indices, in die obige Gleichung eingesetzt, erfüllen dieselbe.

Das Symbol $[uvw]$ einer Zone giebt uns die Gesammtheit aller möglicher Flächen derselben, indem wir für q und r nach und nach alle einfachen rationalen Zahlen 0, 1, 2, ... setzen und jedesmal das zugehörige p aus der obigen Bedingungsgleichung berechnen.

C) Bestimmung einer Fläche durch zwei Zonen. Da eine Ebene durch zwei derselben parallele Gerade gegeben ist, so ist eine Krystallfläche, welche zugleich in zwei Zonen liegt, also sowohl der Zonenaxe der ersten, als derjenigen der zweiten, parallel geht, dadurch vollkommen bestimmt. Sind die Symbole der beiden Zonen

$$[uvw] \text{ und } [u'v'w'],$$

so müssen die Indices pqr der in beiden Zonen liegenden Fläche sowohl in Bezug auf u, v, w, als in Bezug auf u', v', w' jener Bedingungsgleichung genügen, folglich:

$$up + vq + wr = 0$$
$$u'p + v'q + w'r = 0$$

Daraus findet man leicht

$$p = r\,\frac{vw' - wv'}{uv' - vu'}$$
$$q = r\,\frac{wu' - uw'}{uv' - vu'}$$

Da man einen von den drei Indices jeder beliebigen Zahl gleich setzen kann, z. B.

$$r = uv' - vu'$$

so folgt:

$$p = vw' - wv'$$
$$q = wu' - uw'$$
$$r = uv' - vu'$$

als die drei Indices derjenigen Fläche, welche in den beiden Zonen $[uvw]$ und $[u'v'w']$ liegt.**)

Diese drei Werthe folgen nun aus den Indices der beiden Zonen nach

---

*) Die Zugehörigkeit einer Fläche zu einer Zone mit Bestimmtheit zu constatiren, bedarf es des Reflexionsgoniometers, auf welchem die beiden bekannten Flächen justirt (s. S. 28) werden; ist dies geschehen, so steht die Zonenaxe normal zum Kreis, und alsdann sind auch alle übrigen Flächen der Zone justirt.

**) Da u, v, w, u', v', w' rationale Zahlen sind, so müssen offenbar auch pqr solche sein. Hieraus folgt der Satz: Die Ebene, welche in zwei Zonen eines Krystalls fällt, ist stets eine mögliche Fläche desselben.

genau demselben Schema, wie diese selbst aus den Indices der Flächen, nämlich:

$$\begin{array}{cccccc} u & v & w & u & v & w \\ & \times & \times & \times & & \\ u' & v' & w' & u' & v' & w' \\ \hline \end{array}$$
$$vw' - wv', \quad wu' - uw', \quad uv' - vu'$$
$$= p \qquad = q \qquad = r$$

Bei der Ableitung der Indices der Zonen, wie bei der Berechnung einer Fläche aus zwei Zonen, in welche sie fällt, sind stets die auf die negative Seite einer Axe bezüglichen Indices mit dem Vorzeichen —, welches alsdann über den Index gesetzt wird, in Rechnung zu bringen. Z. B. sei diejenige Fläche gesucht, welche einerseits in der Zone der beiden Flächen (123) und (113) liegt, andererseits auch mit (011) und (122) parallele Kanten bildet: das Symbol der ersteren Zone ist [30$\bar{1}$], das der zweiten [01$\bar{1}$]; daraus folgt die gesuchte Fläche (133).

§. 42. **Projection der Krystalle.** Zur Orientirung über die Zonenverhältnisse eines flächenreichen Krystalls dient die projectivische Darstellung der Flächen desselben durch Punkte in einer Ebene. Am besten unter allen hierfür vorgeschlagenen Methoden erfüllt diesen Zweck die stereographische Projection (auch »sphärische Projection« genannt), welche zuerst von Neumann hierzu verwendet und dann besonders durch Miller in die Krystallographie eingeführt wurde.

Dieselbe besteht darin, dass man sich um einen Punkt des Krystalls als Centrum eine Kugelfläche von beliebigem Radius und dann von diesem Mittelpunkte aus Normalen auf alle Krystallflächen construirt denkt, welche man verlängert, bis sie die Kugelfläche treffen; man erhält so für jede Krystallfläche einen Punkt auf der Kugelfläche, welcher die erstere ihrer Richtung nach vollkommen bestimmt. Diesen Punkt nennen wir den Pol der Fläche. Da die Normalen aller Flächen einer Zone in der zur Zonenaxe senkrechten Ebene liegen, eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene aber die Kugelfläche in einem grössten Kreise schneidet, so müssen die Pole aller tautozonalen Flächen auf einem grössten Kreise liegen und die zwischen ihnen liegenden Bögen dieses Kreises gleich den gemessenen Winkeln zwischen den zugehörigen Flächen sein.

Von der Kugeloberfläche mit den darauf befindlichen Flächenpolen haben wir nun durch die Projection ein Bild in der Ebene zu entwerfen. Dies geschieht auf folgende Weise: man wählt zur Projectionsebene eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene, welche senkrecht zur Axe einer besonders wichtigen Zone des Krystalls steht. Der grösste Kreis, in welchem diese Ebene die Kugel schneidet, und in dem alsdann die Pole aller Flächen jener Zone liegen, wird der Grundkreis genannt. Die eine der beiden durch den Grundkreis getrennten Hälften der Kugel wird so auf dessen Ebene projicirt, dass man sich das Auge in den am weitesten entfernten Punkt der andern Hälfte, welcher von allen Punkten des Grund-

kreises 90° absteht, versetzt denkt. Wenn man also nach der entgegengesetzten Seite von der abzubildenden Hälfte der Kugel, von ihrem Mittelpunkte aus, eine Normale zur Ebene des Grundkreises fällt und den Punkt, in welchem diese die Kugeloberfläche trifft, mit allen Flächenpolen jener Hälfte durch Gerade verbindet, so sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ebene des Grundkreises die Projectionen der Flächenpole.

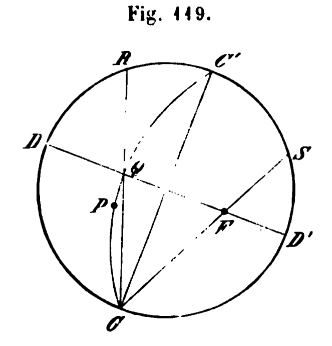
Diese Projection der halben Kugelfläche auf die Ebene des Grundkreises besitzt nun folgende Eigenschaften: *)

Jeder Kreis auf der Kugel erscheint als Kreis oder als Durchmesser des Grundkreises, jeder grösste Kreis auf der Kugel erscheint als Durchmesser oder als Kreisbogen, welcher den Grundkreis in den Enden eines Durchmessers desselben schneidet.

Um auf der Projection innerhalb eines Zonenkreises, d. h. eines Kreisbogens, in welchem die Pole der Flächen einer Zone liegen, diese selbst ihrer Lage nach zu bestimmen, wenn man ihre Winkel kennt, dient folgender für diese Projection gültige Satz: Verbindet man die Pole zweier Flächen einer Zone mit dem Pole des Zonenkreises durch Gerade und verlängert diese rückwärts, so müssen sie auf dem Grundkreise einen Bogen abschneiden, welcher gleich dem Winkel zwischen beiden Flächen ist (der hier gebrauchte Ausdruck »Pol des Zonenkreises« bedeutet: die Projection desjenigen Punktes auf der Kugelfläche, welcher von allen Punkten des Zonenkreises 90° Abstand besitzt, d. h. den Pol einer zu den Flächen der Zone senkrechten Ebene).

Der Pol eines Zonenkreises wird auf die folgende Art durch Construction gefunden: In Fig. 119 ist der Kreis durch C, C', D, D' der Grundkreis, C und P die Pole zweier Krystallflächen; dann ist auch die zu C parallele Gegenfläche zur Zone CP gehörig, und deren Pol ist offenbar C' (CC' Durchmesser); es sind also drei Pole des Zonenkreises, C, P, C', gegeben und der Kreisbogen CPC' kann also auf bekannte Art construirt werden. Der gesuchte Pol dieses Zonenkreises muss auf der Geraden DD' liegen (DD' durch die Mitte und $\perp$ CC'), denn diese ist die Projection des auf dem Grundkreise normal stehenden Zonenkreises, der sämmtliche, 90° von C abstehende Punkte enthält. Ferner muss aber jener Pol nicht nur von C, sondern auch von jedem andern Punkte des Zonenkreises CP, z. B. von Q, einen Abstand von 90° haben; dann muss also die Gerade zwischen ihm und C mit der

Fig. 119.



*) Die Beweise für die im Folgenden benutzten Eigenschaften der stereographischen Projection findet man u. a. in dem Werke von A. Brezina, Methodik der Krystallbestimmung, Wien 1864.

von Q nach C, da dieses letztere Pol der Zone DQD' ist, auf dem Grundkreise einen Bogen von 90° abschneiden. Man ziehe folglich CQ bis R, schneide von dem Grundkreis einen Bogen RS = 90° ab und verbinde S mit C, so ist F der gesuchte Pol des Zonenkreises CPC'.

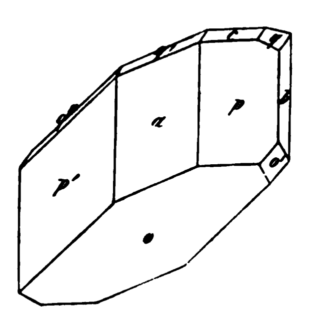
Bei dieser Construction ist noch von einer ferneren Eigenschaft dieser Projection Gebrauch gemacht worden, welche keiner weiteren Erklärung bedarf, der nämlich, dass alle Zonenkreise, welche senkrecht zu der des Grundkreises stehen, deren Pole also in letzteren fallen, als Durchmesser erscheinen. Ausserdem sieht man ebenfalls unmittelbar ein, dass die Pole der einzelnen Flächen der zur Projectionsebene senkrechten Zone direct durch ihre Winkel, d. h. die Winkel ihrer Normalen gegeben sind, da diese letzteren ja in der Ebene des Grundkreises selbst liegen.

Diesen letzteren Umstand benutzt man nun stets bei der Anfertigung einer solchen Projection, indem man zur Projectionsebene eine Ebene wählt, welche normal zu einer der drei Axen des Krystalls steht, so dass die Pole aller, dieser Axe paralleler Flächen in den Grundkreis fallen. Diese Pole werden also gefunden, indem man auf dem Grundkreise direct Bögen abschneidet, welche gleich sind den am Goniometer gemessenen Winkeln der zugehörigen Flächen.

Die stereographische Projection hat endlich noch den Vortheil, dass sie gestattet, die Pole der optischen Axen, der Elasticitätsaxen des Aethers u. s. w. (d. h. die Punkte, in denen diese die Kugelfläche schneiden) einzutragen und somit die Beziehungen dieser Richtungen zur Lage der Krystallflächen mit einem Male zu überblicken.

Als Beispiel möge für die Ausführung einer stereographischen Projection diejenige der Flächen des in Fig. 120 abgebildeten Krystalls dienen, welche zugleich den allgemeinsten unter den vorkommenden Fällen darstellt. Die Figur ist die Vorderansicht eines Krystalls von Kupfervitriol, und es seien zu Axenebenen desselben genommen die Flächen a = (100), b = (010) und c = (001). Zur Projectionsebene werde die zur Z-Axe, also auch zur Zone ab senkrechte Ebene genommen. Sei b in Fig. 121 (s. folg. S.) der Pol von (010), so finden wir denjenigen von a, indem wir einfach von b aus auf dem Grundkreise den gemessenen Winkel ba abtragen. Ebenso finden wir die Pole p und p' durch die Winkel der Flächen p und p' zu a. Damit wären sämmtliche in den Grundkreis fallende Pole, d. h. diejenigen aller in Fig. 120 verticaler Flächen gefunden, und es handelt sich nun um die Aufsuchung des Poles von c (001). Seien A und B die gemessenen Winkel $c : a$ = (001) : (100) und $c : b$ = (001) : (010), so verlängere man in Fig. 121

Fig. 120.



die beiden Durchmesser aa und bb nach vorn resp. nach rechts und trage von der Mitte O des Grundkreises aus auf Oa die Länge

$$OK = \frac{r}{\cos B},$$

auf Ob die Länge

$$OL = \frac{r}{\cos A}$$

auf, wo r den Radius des Grundkreises bedeutet. Von dem Punkte K aus wird alsdann ein Kreis mit dem Radius

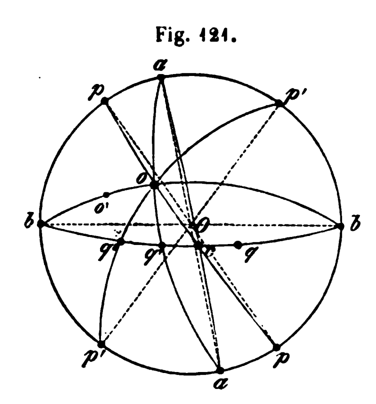
$$Kc = r \cdot \operatorname{tang} B,$$

von L aus ein solcher mit dem Radius

$$Lc = r \cdot \operatorname{tang} A$$

construirt. Diese beiden Kreise schneiden einander innerhalb des Grundkreises in dem Punkte c, und dieser stellt den gesuchten Pol der Fläche (001) dar*).

Fig. 121.



In derselben Weise könnten auch alle übrigen Flächenpole aus den Winkeln der Flächen zu a und b construirt werden, weit einfacher findet man dieselben jedoch unter Benutzung der Zonenverhältnisse:

Die zunächst zu projicirende Fläche o liegt nämlich in der Zone pc, ihr Pol also auf dem Kreisbogen pcp: um hierselbst seinen Ort zu finden, sucht man zuerst den Pol dieses Zonenkreises nach dem S. 208 angegebenen Verfahren, trägt dann auf dem Grundkreise von p (hinten) aus nach links den gemessenen Winkel po auf und verbindet den Endpunkt dieses Bogens mit dem Pol des Zonenkreises pcp durch eine Gerade. Wo diese den Zonenkreis schneidet, im Punkte o, liegt der Pol der Fläche o, denn die Verbindungslinien der Punkte o und p (von denen diesmal der eine im Grundkreis selbst gelegen ist) mit dem Pol der Zone schneiden auf dem Grundkreise einen Bogen ab, welcher gleich dem Winkel der beiden entsprechenden Flächen ist. Ebenso erhält man aus der Zone bob und dem Winkel $o' : b$ den Pol von o', ferner q aus der Zone bcb und dem gemessenen Winkel qb. q' liegt in den beiden Zonen bc und oa, sein Pol ist also der Durchschnittspunkt der gleichnamigen Zonenkreise; in gleicher Weise folgt die Lage des Poles q'' aus den Zonen bcb und $p'op'$.

*) Die beschriebene Construction ist in Fig. 121, welche überhaupt nur noch die allernöthigsten Hülfslinien enthält, nicht mehr dargestellt, weil sie zu viel Raum beanspruchen würde. In dem gewählten Beispiel sind nämlich die Winkel $c : a = 74^0\ 22'$, $c : b = 85^0\ 38'$, $r = 20$ Millimeter, daher $OK = 74{,}2$, $OL = 262{,}7$ Millimeter. Will man nicht mit so grossen Distanzen construiren, so muss man statt des Poles von c zuerst denjenigen einer Fläche suchen, deren Winkel zu a und b kleiner sind. Die übrige Construction wird dadurch nur in der Reihenfolge der einzelnen Operationen geändert.

Die Bögen zwischen drei beliebigen Flächenpolen, z. B. *c*, *o* und *q'*, stellen auf der Kugelfläche, deren Projection die Fig. 121 ist, die Winkel zwischen den betreffenden Flächen dar; *coq'* ist demnach ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten die gemessenen Winkel *co*, *cq'*, *oq'*, und dessen Winkel die Neigungen zwischen den Ebenen jener Zonenkreise sind. Da aus je drei Stücken eines sphärischen Dreieckes die übrigen berechnet werden können, so dienen die Formeln der sphärischen Trigonometrie dazu, die noch unbekannten Stücke, seien es Bögen oder Winkel zwischen den Ebenen von Zonenkreisen, zu berechnen. Hierauf beruhen aber alle Probleme der berechnenden Krystallographie, und da eine stereographische Projection alle Zonenverhältnisse des Krystalls mit einem Male zu überblicken gestattet, so wird die Ausführung der Berechnung eines einigermassen flächenreichen Krystalls wesentlich erleichtert, wenn man sich (zunächst approximativ aus freier Hand) eine Projection aller am Krystall beobachteter Flächen und Zonen anfertigt und an der Hand dieser den einfachsten Weg zur Berechnung unbekannter Stücke der vorliegenden sphärischen Dreiecke aufsucht. Diese Methode ist es deshalb auch, welche im Folgenden bei der Anleitung zur Berechnung der Krystalle der einzelnen Abtheilungen befolgt werden wird. Dass man mittelst derselben nicht nur aus bekannten Winkeln der Krystalle andere berechnen kann, sondern auch aus den Winkeln die Parameterverhältnisse der Flächen oder umgekehrt, geht aus den folgenden Betrachtungen hervor:

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie sind bekanntlich so beschaffen, dass man die Zahlenwerthe der Winkel, resp. deren Supplemente mit denen der gegenüberliegenden Seiten vertauschen kann. Hat man z. B., wie oben angegeben, aus den drei gemessenen Winkeln *co*, *cq'*, *oq'* die gegenseitige Neigung der zugehörigen Zonenkreise, d. h. die Winkel des sphärischen Dreiecks *coq'* berechnet, so kann man letztere Werthe auch als Seiten eines sphärischen Dreiecks betrachten, dessen Winkel alsdann die gemessenen Werthe *co*, *cq'*, *oq'* resp. deren Supplemente sind. Ein sphärisches Dreieck mit den Winkeln $180^{\circ}—co$, $180^{\circ}—cq'$, $180^{\circ}—oq'$ erhält man aber, wenn man sich die von den drei Krystallflächen *coq'* gebildete stumpfe Ecke als Centrum einer Kugelfläche denkt, denn auf letzterer schneiden die drei Ebenen ein sphärisches Dreieck ab, dessen Winkel die angegebenen Werthe besitzen, während dessen Seiten gleich den ebenen Winkeln auf den drei Krystallflächen sind, d. h. der Winkel zwischen den Kanten *co* und *cq'* auf der Fläche *c* u. s. f. Daraus folgt, dass die Winkel der sphärischen Dreiecke auf einer Projection nicht nur die relativen Neigungen der betreffenden Zonenkreise darstellen, sondern noch eine andere Bedeutung haben: sie sind nämlich gleich den ebenen Winkeln auf den entsprechenden Flächen oder den Supplementen derselben. Z. B. ist der Winkel *ocq'* (Fig. 121) gleich dem Winkel, welchen in der Ebene der Krystallfläche *c* die beiden Kanten *oc* und *cq'* mit einander bilden. Wie aus Fig. 116 S. 197 hervorgeht, sind es aber die ebenen Winkel in den

Axenebenen, welche zur Bestimmung der Elemente des Krystal's führen; a. a. O. wurde vorausgesetzt, dass man diejenigen Winkel am Krystall gemessen habe, welche direct die nothwendigen ebenen Winkel abzuleiten gestatten, nämlich die Krystallwinkel: (100):(010), (001):(100), (001):(010) und die Neigung von (111) zu zweien der drei Axenebenen. Ist dies jedoch nicht der Fall (weil die betreffenden Flächen nicht ausgebildet oder zu guten Messungen untauglich sind), so hat man dieselben aus anderen gemessenen Winkeln herzuleiten, und diese müssen dann natürlich in genügender Zahl vorhanden sein, um die Lage der Pole der vier Flächen (100) (010) (001) (111) in der Projection durch Zonen unzweideutig zu bestimmen. Genau umgekehrt verfährt man, wenn man die Winkel einer Krystallfläche gegen andere aus deren bekanntem Parameterverhältniss berechnen will, wie weiterhin an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden soll.

§. 43. **Die Symmetrie der Krystalle.** Wir gelangen nun zu einer Anwendung der Bestimmung der Lage von Krystallflächen durch ihre Indices, welche in theoretischer Beziehung von der höchsten Wichtigkeit ist, für das vorliegende, mehr praktische Zwecke berücksichtigende Werk indess zu weitläufige Herleitungen erfordern würde. Es werden daher von diesem Theile der theoretischen Krystallographie nur die wichtigsten Resultate gegeben werden, welche genügen, sich von dem Gange der mathematischen Untersuchung eine Vorstellung zu verschaffen.*)

Seien OP, OP', OQ und OR Fig. 122 die Durchschnitte von vier tautozonalen Flächen

$$P(hkl),\ P'(h'k'l'),\ Q(efg),\ R(uvw)$$

Fig. 122.

mit einer beliebigen Ebene E (welche keine krystallographisch mögliche Fläche zu sein braucht), und sei pr irgend eine Gerade in dieser Ebene, so ist das Längenverhältniss

$$\frac{qp}{qp'} : \frac{rp}{rp'} = \frac{fl - gk}{fl' - gk'} \cdot \frac{vl' - wk'}{vl - wk}.$$

Dieses Verhältniss nennt man das anharmonische Verhältniss der Ebenen Q und R zu P und P', und es folgt aus der obigen Formel, dass dasselbe stets einen rationalen Werth besitzt und unabhängig ist von der Lage der Ebene E und der Richtung der Geraden pr.

Denkt man sich die beliebige Ebene E senkrecht zu den vier tautozonalen Krystallflächen, so sind die an O liegenden Winkel der Dreiecke Orq, Oqp', $Op'p$ zugleich die Winkel, welche die Krystallflächen einschliessen; für diesen Fall liefert die obige Gleichung zugleich eine Be-

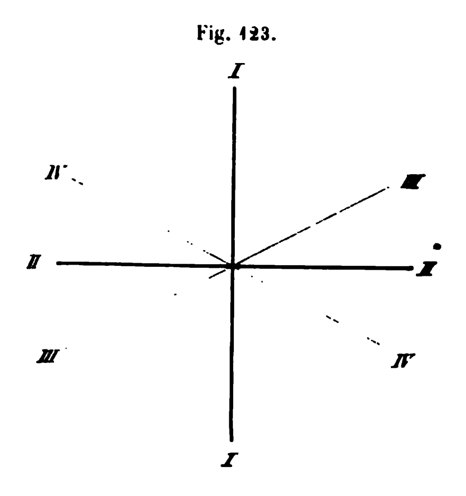
*) Diejenigen, welche die theoretische Krystallographie eingehender studiren und sich daher die Kenntniss der vollständigen Herleitung jener Resultate verschaffen wollen, finden dieselbe in folgenden Werken: V. von Lang, Lehrbuch der Krystallographie, Wien 1866. Th. Liebisch, Geometrische Krystallographie, Leipzig 1881.

ziehung zwischen den Indices und den Winkeln von vier in einer Zone liegenden Flächen, so dass man aus den Indices aller und den beiden Winkeln zwischen der ersten und zweiten, und zwischen der zweiten und dritten, den Winkel, welchen die vierte mit der dritten bildet, berechnen kann. Man sieht nun leicht ein, dass man zwar drei Flächen, welche sich in einer Geraden schneiden, von beliebigen Winkeln gegen einander und beliebigen, nur den Bedingungen der Tautozonalität genügenden Indices annehmen kann, welche stets eine mögliche Krystallzone darstellen, — dass aber keine weitere Fläche mit beliebigem Winkel gegen die ersten drei möglich, da eine solche im Allgemeinen einen irrationalen Werth jenes anharmonischen Verhältnisses liefern würde. Die ersten drei Flächen bestimmen also die Zone vollständig, da in derselben nur noch solche vorkommen können, welche einen rationalen Werth jenes anharmonischen Verhältnisses liefern.

Indem man für die verschiedenartigsten Complexe von Ebenen prüft, ob sie dieser Bedingung genügen, kann man diejenigen ausfindig machen, welche in Folge des Gesetzes der Rationalität der Indices (von welchem obige Bedingung ja nur eine Consequenz ist) überhaupt krystallonomisch möglich sind, und auf diesem Wege ergiebt sich, dass es nur sechs Klassen von Krystallen geben kann, welche genau mit denjenigen übereinstimmen, welche die Erfahrung kennen gelehrt hat.

Die Unterschiede dieser sechs Klassen beruhen auf einer Eigenschaft der Krystalle, welche am geeignetsten zuerst durch ein Beispiel klar gemacht wird: die theoretische Herleitung aller krystallonomisch möglicher Flächencomplexe lehrt, dass in der Zone zweier auf einander normaler Ebenen *I* und *II* Fig. 123, und einer dritten *III*, welche einen beliebigen Winkel mit jenen einschliesst, stets eine vierte *IV* möglich ist, welche mit *I* und *II* denselben Winkel nach der entgegengesetzten Seite einschliesst, wie *III*. Dasselbe gilt für jede beliebige Fläche der Zone, welche wir statt *III* nehmen; wenn wir uns also alle in dieser Zone möglichen Flächen einander in der Zonenaxe schneidend denken, muss dieser ganze Flächencomplex sowohl durch die Ebene *I*, als durch *II*, in genau gleiche und entgegengesetzte Hälften zerlegt werden. Eine derartige Ebene, wie *I* und *II* es sind, welche den Complex aller möglicher Flächen derart durchschneidet, dass zu jeder Ebene eine zweite vorhanden ist, welche denselben Winkel nach der anderen Seite mit ihr einschliesst, nennt man eine

Fig. 123.



Symmetrieebene dieses Flächencomplexes, und sagt z. B. von den Flächen *III* und *IV* Fig. 123, dass sie zu einander symmetrisch in Bezug auf *I* und *II* liegen. Die Winkel, welche zusammengehörige Flächen mit einander bilden, werden also durch die Symmetrieebenen derselben Zone halbirt.

Eine Krystallform ist aber niemals ein Flächencomplex von nur einer Zone, weil dieser den Raum nicht allseitig umschliesst, sondern ein Complex von Flächen, welche mehreren Zonen angehören. Auch ein solcher kann, wie sich ebenfalls theoretisch beweisen lässt, Symmetrieebenen besitzen. Die Symmetrieebene eines derartigen Flächencomplexes, d. h. eines Krystalles, hat man alsdann in folgender Weise zu definiren: denkt man sich diese Ebene mit allen **möglichen** Flächen des Krystalls durch einen Punkt gelegt, so muss zu jeder Fläche desselben eine zweite vorhanden sein, welche so liegt, dass die Symmetrieebene mit beiden in eine Zone fällt und den Winkel derselben halbirt.*)

Jede Symmetrieebene eines Krystalls muss zugleich eine seiner möglichen Flächen sein, da sie in den Zonen aller Paare zu einander symmetrischer Flächen liegt, von denen ja schon zwei Paare die Rationalität ihrer Indices bedingen würden.

Hat der Complex aller möglicher Flächen eines Krystalls die in obiger Definition gegebene Eigenschaft, so wird er durch die Symmetrieebene in zwei Hälften zerlegt, welche genau gleich und entgegengesetzt sind, von denen die eine das Spiegelbild der anderen darstellt. Dasselbe findet in Bezug auf die Symmetrieebene auch statt, wenn man sich alle Flächen gleich weit von einem Punkte entfernt, und durch diesen die Symmetrieebene gelegt denkt; der Flächencomplex zeigt uns dann das geometrische Ideal einer Krystallform, welches jene Ebene in zwei symmetrische Hälften zerlegt. Denken wir uns von irgend einem bestimmten Punkte, z. B. einer Ecke des Krystalls (einem Punkte, in welchem drei oder mehr Flächen einander durchschneiden) eine Normale zur Symmetrieebene gefällt und jenseits derselben um die gleiche Strecke verlängert, so muss sich daselbst eine genau gleiche Ecke des Krystalls befinden. Man kann daher eine Symmetrieebene eines Krystalls auch definiren als diejenige Ebene, zu der alle Normalen auf beiden Seiten in gleichem Abstande gleichartige Punkte der Form durchschneiden, wobei vorausgesetzt ist, dass alle Flächen gleichen Abstand von einem Punkte haben. Die Richtung der Normalen zu einer Symmetrieebene nennt man eine Symmetrieaxe.

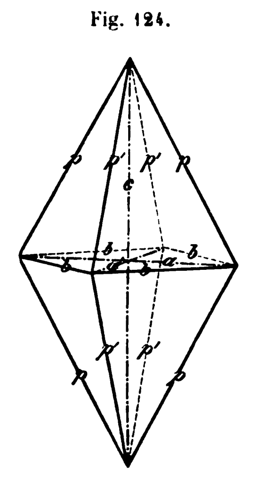
Die Symmetrie der Krystalle, d. h. das Vorhandensein oder Fehlen von Symmetrieebenen ist es nun, welches eine Verschiedenheit derselben bedingt. Unter den Symmetrieebenen selbst sind aber wieder zweierlei Arten zu unterscheiden.

---

*) Ist der Winkel, welchen eine Fläche mit der Symmetrieebene einschliesst, = 90° so folgt aus dieser Definition, dass die zweite Fläche mit der ersten zusammenfällt.

Es giebt nämlich Krystalle, welche symmetrisch sind zu einer oder mehreren Ebenen, denen mehrere Symmetrieaxen parallel gehen, welche man beliebig mit einander vertauschen kann, ohne dadurch an der Krystallform irgend etwas zu ändern. Eine solche Form ist z. B. die in Fig. 124 dargestellte sogen. tetragonale Pyramide, welche von vier Paaren paralleler Flächen gebildet wird, und deren horizontaler Durchschnitt durch die mit *b* bezeichneten Kanten ein rechtwinkeliger ist, während der verticale durch die Kanten *p* oder *p'* die Gestalt eines Rhombus besitzt. Sowohl der bezeichnete horizontale, als jeder der beiden verticalen Durchschnitte durch die Kanten der Form sind Symmetrieebenen derselben, da sich sowohl an den Kanten *p* und *p'* die Flächen unter gleichen Winkeln, als auch an den Kanten *b* unter gleichen, aber von jenen verschiedenen Winkeln schneiden. In der ersten, horizontalen Symmetrieebene liegen die beiden auf einander senkrechten Richtungen *a* und *a'*, welche die Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten *b* halbiren (bei gleicher Entfernung aller Flächen von einander sind es die Diagonalen des horizontalen Durchschnitts, welcher alsdann die Gestalt eines Quadrats hat). Diese beiden Richtungen *a* und *a'* sind offenbar Symmetrieaxen, denn sie sind die Normalen zu den beiden durch die Kanten *p'* und *p* gehenden Symmetrieebenen. Dreht man nun die Krystallform so, dass die verticale Richtung *c* sich selbst parallel bleibt, aber *a* in die Richtung kommt, welche vorher *a'* hatte, und *a'* in diejenige von *a*, so bleibt der rechtwinkelige Querschnitt offenbar sich selbst parallel, also sind alle Flächen der Gestalt in der neuen Stellung parallel den Flächen derselben in der vorigen, d. h. die Krystallform ist dieselbe geblieben, während die Richtungen *a* und *a'* vertauscht worden sind. Solche Symmetrieaxen, wie *a* und *a'*, welche beliebig mit einander vertauscht werden können, ohne dass dadurch die Krystallform geändert wird, nennt man gleichwerthige Symmetrieaxen. Das Vorhandensein von Symmetrieebenen, in welchen sich mehrere gleichwerthige Symmetrieaxen befinden, bedingt einen höheren Grad von Regelmässigkeit der betreffenden Krystallgestalten, daher nennt man solche »Haupt-Symmetrieebenen«, und deren Normalen »Haupt-Symmetrieaxen« oder kurz »Hauptaxen«.

Fig. 124.



Die beiden andern, verticalen Symmetrieebenen der tetragonalen Pyramide Fig. 124 sind keine von dem bezeichneten Charakter. Betrachten wir z. B. diejenige, welche durch die vier mit *p* bezeichneten Kanten zu legen ist, in welcher sich die Symmetrieaxen *a* und *c* befinden. Vertauscht man diese beiden Richtungen in gleicher Weise mit einander, wie vorher *a* und *a'*, so wird der horizontale Querschnitt der Form in der neuen Stellung

ein Rhombus mit den Diagonalen c und a', folglich sind die Flächen nicht mehr denjenigen in der ersten Stellung parallel; a und c sind keine gleichwerthigen Richtungen. Ebenso wenig gelingt es, weder in der Ebene durch die Kanten p, noch in der ganz gleich beschaffenen durch die Kanten p', irgend zwei gleichwerthige Symmetrieaxen zu finden; die Ebenen ac und $a'c$ sind also Symmetrieebenen schlechthin, welche nicht den Charakter der Haupt-Symmetrieebenen besitzen. In der tetragonalen Pyramide haben wir somit eine Krystallform kennen gelernt, welche eine Haupt- und zwei gewöhnliche Symmetrieebenen besitzt.

§. 44. **Eintheilung der Krystalle nach den Haupt-Symmetrieebenen. Das Grundgesetz der physikalischen Krystallographie.** Es wurde bereits oben bemerkt, dass die theoretische Herleitung der krystallonomisch möglichen Flächencomplexe das Resultat geliefert hat, dass es sechs verschiedene Klassen von Krystallen geben muss. Der Unterschied derselben beruht auf ihrer Symmetrie, und ergiebt sich hierbei, dass mehrere derselben sich zwar durch die Zahl und Richtung ihrer gewöhnlichen Symmetrieebenen unterscheiden, aber gleich viel Haupt-Symmetrieebenen besitzen, so dass sie in Bezug auf diese zu einer gemeinsamen Abtheilung gehören. Untersucht man theoretisch, welche Haupt-Symmetrieebenen vorkommen können bei allen Arten von krystallonomisch möglichen Flächen, so findet man, dass nur drei Fälle stattfinden können: entweder besitzen die Krystalle keine Haupt-Symmetrieebene, oder eine, oder endlich drei, auf einander senkrechte. Der letzte Fall ist derjenige des höchsten Grades der Symmetrie, welchen ein krystallonomisch möglicher Flächencomplex überhaupt haben kann. Nach den Haupt-Symmetrieebenen zerfallen demnach alle Krystalle in drei Hauptabtheilungen, deren geometrische Eigenschaften sich vollständig aus dem allgemeinen Grundgesetz der Krystallographie herleiten lassen. Diese sind, mit der regelmässigsten beginnend:

I. Die Krystalle besitzen drei auf einander senkrechte Haupt-Symmetrieebenen; in jeder derselben liegen folglich die Normalen zu den beiden anderen, und diese sind die gleichwerthigen Symmetrieaxen in jeder der drei Ebenen. Daraus ergiebt sich, dass die drei Normalen jener Ebenen, d. i. die drei Hauptaxen dieser Krystalle, sämmtlich gleichwerthig sind.

II. Die Krystalle besitzen nur eine Haupt-Symmetrieebene, also nur eine Hauptaxe; ausserdem sind sie jedoch noch nach anderen Ebenen symmetrisch.

III. Es ist keine Haupt-Symmetrieebene vorhanden; unter diesen Krystallen befinden sich sowohl solche, welche überhaupt keine Symmetrieebene haben, als auch solche, welche deren eine oder mehrere besitzen.

Ganz dieselben drei Klassen hat nun auch die Untersuchung der Krystalle in Bezug auf alle an solchen beobachtete Formen gelehrt, und es ist noch niemals eine Krystallform beobachtet worden, welche nicht einer dieser drei Abtheilungen angehört hätte. So bestätigt also die Erfahrung

in der vollkommensten Weise die nur auf dem Naturgesetz der Rationalität der Indices aufgebauten theoretischen Schlüsse.

Eine viel höhere Bedeutung gewinnt aber jene Dreitheilung noch, wenn wir sie vergleichen mit den physikalischen Eigenschaften der Krystalle. Diese Eintheilung in drei Klassen fällt nämlich vollkommen zusammen mit derjenigen, durch welche wir im I. Abschnitt (vergl. S. 184 f.) die sämmtlichen Krystalle in drei Abtheilungen gebracht haben; die Symmetrie der Krystalle ist es also, von welcher es abhängt, welcher physikalischen Klasse dieselben angehören.

Die gesammte Kenntniss des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und den physikalischen Eigenschaften der Krystalle lässt sich in ein Gesetz zusammenfassen, welches man als das Grundgesetz der physikalischen Krystallographie bezeichnen kann. Dasselbe lautet:

Jede geometrische Symmetrieebene eines Krystalls ist zugleich Symmetrieebene desselben in physikalischer Beziehung.

Der Ausdruck »Symmetrieebene in physikalischer Beziehung« ist folgendermaassen zu verstehen: Die sämmtlichen physikalischen Eigenschaften des Krystalls (Elasticität, Cohäsion, Lichtgeschwindigkeit, Ausdehnung durch die Wärme u. s. f.) in irgend einer beliebigen Richtung sind genau gleich denen des Krystalls in derjenigen Richtung, welche zur ersten symmetrisch liegt in Bezug auf jene Ebene. Zwei Richtungen liegen aber dann symmetrisch in Bezug auf eine Ebene, wenn letztere den Winkel beider halbirt und senkrecht zu der Ebene dieses Winkels steht.

Besitzt ein Krystall eine Symmetrieebene, so existirt zu jeder Richtung in demselben eine nach der entgegengesetzten Seite jener Ebene geneigte, zu ihr symmetrische, und da die eine Hälfte der Krystalle alsdann der anderen spiegelbildlich gleicht und durch Drehung mit ihr zur Deckung gebracht werden kann, wobei jede Richtung mit der zu ihr symmetrischen zusammenfällt, so sind alle zu einander symmetrischen Richtungen paarweise geometrisch gleichwerthig. Aus dem obigen Gesetze folgt also, dass zwei geometrisch gleichwerthige Richtungen auch physikalisch gleichwerthig sind*).

Das hierdurch erläuterte Gesetz ist, wie bereits angedeutet, der inductiv gefundene Ausdruck der vorhandenen Beobachtungen über den

*) Der umgekehrte Satz, dass zwei physikalisch gleichwerthige Richtungen auch geometrisch gleichwerthig seien, dass also jede Symmetrieebene in physikalischer Beziehung auch eine solche in geometrischer Beziehung sei, gilt nur, wenn man unter »physikalisch gleichwerthigen« Richtungen solche versteht, welche in Bezug auf alle physikalische Eigenschaften gleichwerthig sind, denn die in Bezug auf eine physikalische Eigenschaft gleichwerthigen Richtungen sind nicht immer auch geometrisch gleichwerthig; so sind z. B. in den einaxigen Krystallen alle Richtungen, welche gleichen Winkel mit der Axe bilden, optisch gleichwerthig, dieselben sind es aber nicht in geometrischer Beziehung, denn sonst müsste der Durchschnitt des Krystalls senkrecht zur Axe ein Kreis sein!

Zusammenhang zwischen der Symmetrie und den physikalischen Eigenschaften der Krystalle. Das Studium dieses Zusammenhanges wird ein leichteres sein, wenn wir, wie es hier geschieht, dieses Gesetz an die Spitze stellen und von demselben deductiv das Detail jenes Zusammenhanges ableiten. Wir sahen, dass die Krystalle nach ihrer Symmetrie in drei Abtheilungen zerfallen. Die physikalischen Unterschiede dieser ergeben sich unmittelbar aus unserem Gesetz auf folgende Weise:

1) Krystalle mit drei senkrecht zu einander stehenden Haupt-Symmetrieebenen, folglich mit drei gleichwerthigen Hauptaxen. Die Elasticität dieser Krystalle muss in je zwei Richtungen, welche zu einer Symmetrieebene symmetrisch liegen, sowie in allen drei Hauptaxen gleich, kann aber verschieden sein in zwei nicht symmetrisch liegenden Richtungen. Das Gleiche ist mit der Cohäsion der Fall; hat diese in einer Richtung ein Minimum, findet also senkrecht dazu Spaltbarkeit statt, so muss sie genau das gleiche Minimum auch in allen denjenigen Richtungen zeigen, welche in Bezug auf die drei Haupt-Symmetrieebenen symmetrisch zu jener ersten liegen; es kann also ein solcher Krystall niemals nur eine Spaltungsrichtung haben. Ist z. B. eine Hauptaxe ein Minimum der Cohäsion, spaltet der Krystall also nach der dazu normalen Haupt-Symmetrieebene, so müssen auch die beiden anderen Hauptaxen solche Minima sein, es muss auch nach den beiden anderen gleichwerthigen Symmetrieebenen Spaltbarkeit stattfinden. Die optische Elasticitätsfläche muss durch die drei Symmetrieebenen in gleiche und entgegengesetzte Hälften getheilt werden, und diese müssen in allen drei Fällen dieselben sein; ihre drei Axen, die Durchschnitte ihrer Symmetrieebenen, welche mit den krystallographischen zusammenfallen müssen, sind in Folge dessen gleich. Allen diesen Bedingungen kann unter den drei Arten von Elasticitätsflächen, welche wir an den Krystallen kennen lernten, nur eine, die der optisch isotropen Körper, deren Gestalt eine Kugel ist, genügen; die optische Elasticität und folglich die Geschwindigkeit des Lichtes ist also bei diesen Krystallen nach allen Richtungen gleich; dieselben sind einfach brechend. Das Gleiche muss alsdann auch für die Strahlen der Wärme gelten. Wir sahen im I. Abschnitt, dass, wenn in einem homogenen Krystall nach drei auf einander senkrechten Richtungen die Wärmeleitung, die Ausdehnung durch die Wärme, die elektrischen und magnetischen Eigenschaften gleich sind, sie es in allen Richtungen sind. Wegen der krystallographischen Gleichwerthigkeit der drei Hauptaxen ist die Gleichheit jener Eigenschaften in diesen drei Richtungen, folglich auch in allen anderen, nothwendig. Aus dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie folgt also: die Krystalle mit drei gleichwerthigen Hauptaxen sind diejenigen der 1. Abtheilung in physikalischer Beziehung (die einfach brechenden; vergl. S. 185).

2) Krystalle mit einer Haupt-Symmetrieebene, also mit **einer** Hauptaxe: Die Elasticität muss nicht nur gleich sein in zwei

zur Haupt-Symmetrieebene symmetrischen Richtungen (kann aber verschieden sein in verschiedenen, mit der Hauptaxe gleichen Winkel bildenden), sondern muss auch gleich sein in mehreren Richtungen innerhalb der Haupt-Symmetrieebene, nämlich den ihr parallelen gleichwerthigen Symmetrieaxen; wie diese jedoch liegen, hängt von der Lage der sonst noch vorhandenen gewöhnlichen Symmetrieebenen ab. Die Cohäsion kann ein Minimum haben in der Richtung der Hauptaxe; in diesem Falle ist der Krystall spaltbar nach der Haupt-Symmetrieebene und nach keiner andern in gleicher Vollkommenheit. Findet aber ein Minimum der Cohäsion in anderer Richtung statt, so erfordert dieses ein gleiches in der zur Haupt-Symmetrieebene — und, da diese Krystalle stets noch andere Symmetrieebenen haben, gleiche in den zu diesen — symmetrisch gelegenen Richtungen. Die optische Elasticitätsfläche muss symmetrisch zur Haupt-Symmetrieebene sein, ihr Durchschnitt mit dieser muss aber die Gestalt eines Kreises haben, da in dieser Ebene mehrere gleichwerthige Symmetrieaxen existiren, in welchen demnach auch die optische Elasticität gleich sein muss. Dagegen darf die Elasticitätsfläche nach keiner anderen Ebene einen kreisförmigen Durchschnitt zeigen, weil keine weitere Haupt-Symmetrieebene vorhanden ist. Diesen Bedingungen genügt nur die Elasticitätsfläche der einaxigen Krystalle, und nur in dem Falle, dass die optische Axe mit der krystallographischen Hauptaxe zusammenfällt. Alsdann bildet die Haupt-Symmetrieebene den Kreisschnitt der Fläche und theilt sie auch symmetrisch. Die optische Elasticitätsfläche ist ausserdem noch symmetrisch zu allen Ebenen, welche einander in der Axe schneiden (ihren Hauptschnitten), aber zu keiner anderen Ebene, also können bei den einaxigen Krystallen ausser der Haupt-Symmetrieebene nur noch solche Symmetrieebenen vorkommen, welche der Axe parallel sind. In der That giebt es bei den Krystallen mit einer Hauptaxe nur noch solche, welche normal zur Haupt-Symmetrieebene stehen. Was für die Strahlen des Lichtes gilt, findet auch für diejenigen der Wärme statt. Die Ausdehnung durch erhöhte Temperatur muss gleich sein in allen Richtungen parallel der Haupt-Symmetrieebene und von dieser Ebene aus nach beiden Seiten symmetrisch zu- oder abnehmen, also muss die thermische Axe der Hauptaxe ebenfalls parallel sein. Die magnetischen oder diamagnetischen Eigenschaften müssen ihr Minimum oder ihr Maximum haben in der Richtung der Hauptaxe, und ihr Maximum, resp. Minimum parallel der Haupt-Symmetrieebene. Wir haben also aus dem allgemeinen Gesetz des Zusammenhanges zwischen Krystallform und physikalischen Eigenschaften zu schliessen, dass die Krystalle mit einer Haupt-Symmetrieebene die 2. Abtheilung in physikalischer Beziehung (s. S. 185) bilden, und dass ihre physikalische Hauptaxe zusammenfällt mit ihrer krystallographischen.

3) Krystalle ohne Haupt-Symmetrieebene. Wir haben bei den beiden ersten Klassen von Krystallen gesehen, dass einer Haupt-Symmetrieebene stets ein Kreisschnitt der optischen Elasticitätsfläche

entspricht. Es lässt sich dieses aus folgenden Betrachtungen allgemein beweisen: Eine Haupt-Symmetrieebene muss nach dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie zugleich eine Symmetrieebene der Elasticitätsfläche sein; nehmen wir für diese den allgemeinsten Fall, dass ihre drei Axen, die Durchschnitte ihrer drei zu einander senkrechten Symmetrieebenen, ungleich sind (das ist der Fall bei der Elasticitätsfläche der zweiaxigen Krystalle), so bildet jede krystallographische Symmetrieebene, weil sie mit einer solchen der Elasticitätsfläche zusammenfällt, mit ihr einen Durchschnitt, dessen Gestalt eine Ellipse ist, deren grosse und kleine Axe sie symmetrisch theilen, weil sie zugleich die Durchschnittsrichtungen mit den beiden anderen Symmetrieebenen der krummen Oberfläche bilden. Aus diesem Grunde fallen sie zusammen mit den beiden Symmetrieaxen, welche in der ersterwähnten krystallographischen Symmetrieebene liegen; ist diese nun eine Haupt-Symmetrieebene, d. h. sind die beiden in ihr liegenden Symmetrieaxen gleichwerthig, so müssen die grosse und kleine Axe jener Curve gleich werden, während sie nach beiden symmetrisch bleiben muss. Dies ist nur möglich, wenn sie in einen Kreis übergeht. Da sich die Ausdehnung durch die Wärme, die Leitung der Wärme u. a. physikalische Eigenschaften in ähnlicher Weise ändern, so ist auch auf diese der analoge Schluss anzuwenden, so dass nur aus dem empirischen Gesetz, welches wir diesen Betrachtungen zu Grunde gelegt haben, folgt: Alle Richtungen eines Krystalls, welche einer Haupt-Symmetrieebene desselben parallel gehen, haben gleiche Lichtgeschwindigkeit für jede einzelne Farbe, gleiche Wärmeleitungsfähigkeit, gleiche Ausdehnung durch die Wärme, gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmestrahlen und gleichen Para- oder Diamagnetismus.

Die Krystalle ohne Haupt-Symmetrieebene können somit keine Ebene besitzen, in denen für die angeführten physikalischen Eigenschaften Gleichheit nach allen Richtungen existirt. Alsdann müssen dieselben die Klasse der optisch zweiaxigen bilden, denn nur bei diesen fehlt eine solche Ebene. Je nachdem die Krystalle keine, eine oder mehrere gewöhnliche Symmetrieebenen besitzen, ist die gegenseitige Lage der Elasticitätsaxen für die Schwingungen des Lichtes, der Hauptrichtungen der thermischen Ausdehnung u. s. f. eine verschiedene oder die gleiche. Die mehrfachen, hier vorkommenden, von der Symmetrie der Krystalle abhängigen Verhältnisse werden wir bei der Betrachtung der einzelnen Abtheilungen der optisch zweiaxigen Krystalle kennen lernen.

§. 45. **Die Krystallsysteme.** Die theoretische Herleitung aller krystallonomisch möglichen Flächencomplexe lehrt, dass an denselben zweierlei Symmetrieebenen möglich sind, welche wir als gewöhnliche und als Haupt-Symmetrieebenen unterschieden haben. Die Symmetrie einer Krystallgestalt ist gegeben, wenn wir deren Symmetrieebenen ihrer Lage nach kennen und wissen, welcher Art dieselben sind. Je mehr solcher

vorhanden sind, desto höher ist der Grad der Symmetrie; von zwei Krystallformen, welche gleich viele Symmetrieebenen derselben Art besitzen, welche einander bei beiden unter denselben Winkeln schneiden, sagen wir, dass sie gleichen Grad der Symmetrie besitzen. Die Gesammtheit aller Krystallformen, welche gleichen Grad der Symmetrie besitzen, nennt man ein **Krystallsystem.**

Wie bereits bemerkt, ergiebt sich theoretisch aus dem Gesetze der Rationalität der Indices, dass unter allen krystallonomisch möglichen Flächencomplexen nur sechs Arten von Symmetrie vorkommen; es kann also nur sechs Krystallsysteme geben, und dies ist vollständig bestätigt worden durch die Erfahrung, indem man bis jetzt wohl Krystalle aller jener sechs Arten der Symmetrie, aber noch niemals einen gefunden hat, der nicht einem der sechs Krystallsysteme hinsichtlich seiner Symmetrie angehört hätte. Mehrere Krystallsysteme stimmen mit einander überein in Bezug auf das Vorhandensein oder Fehlen von Haupt-Symmetrieebenen und unterscheiden sich nur durch die gewöhnlichen; diese bilden dann eine näher zusammengehörige Gruppe, und solcher Hauptabtheilungen giebt es, wie wir im vor. § gesehen haben, drei, welche genau den drei physikalischen Abtheilungen der Krystalle entsprechen. Ebenso wenig, wie es zwischen diesen Uebergänge giebt, so giebt es auch keine solchen zwischen den verschiedenen Krystallsystemen, welche einer Hauptabtheilung angehören, wie dies bei der speciellen Betrachtung derselben nachgewiesen werden wird. Folgendes sind nun die sechs Krystallsysteme, geordnet nach dem Grade ihrer Symmetrie:

I. 1) Die Krystalle mit drei zu einander senkrechten Haupt-Symmetrieebenen bilden nur ein einziges Krystallsystem, welches, weil es den höchstmöglichen Grad von Symmetrie darstellt, das reguläre genannt wird, und besitzen ausserdem noch sechs, einander unter 60° durchschneidende Symmetrieebenen.

II. Die Krystalle mit einer Haupt-Symmetrieebene zerfallen in zwei Systeme:

2) Das hexagonale, so genannt, weil die Haupt-Symmetrieebene die Formen in hexagonalen Umrissfiguren schneidet, welche entweder gleichwinkelige Sechsecke oder einfach davon abzuleitende Polygone sind. Die hexagonalen Krystalle besitzen ausser der Haupt-Symmetrieebene noch sechs zu jener normale, einander in der Hauptaxe unter Winkeln von 30° durchschneidende Symmetrieebenen.

Das 3. System heisst das tetragonale, weil seine Haupt-Symmetrieschnitte sämmtlich tetragonale, d. h. rechtwinkelige Vierecke oder davon abgeleitete Figuren sind. Die Krystalle desselben haben ausser der Haupt-Symmetrieebene noch vier andere, zu jener normal und einander (in der Hauptaxe) unter Winkeln von 45° schneidend.

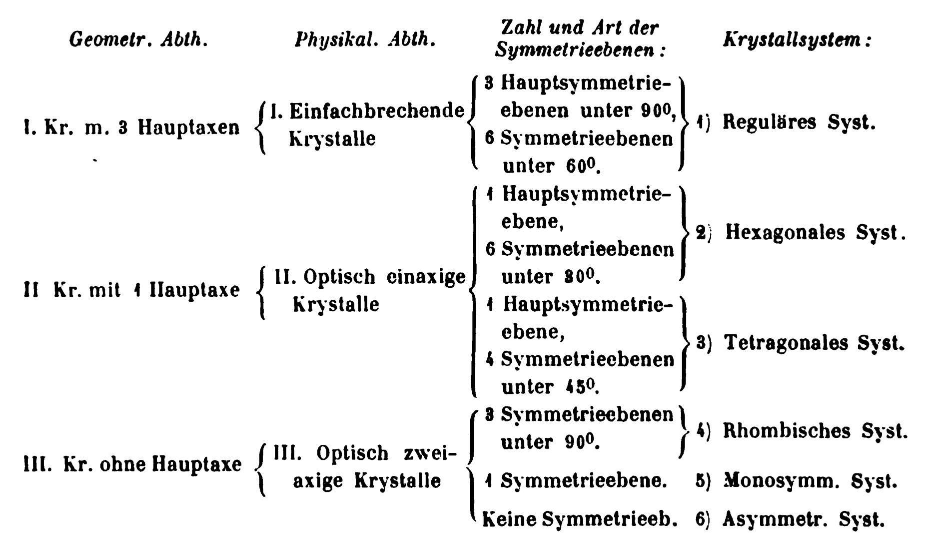
III. Die Krystalle ohne Haupt-Symmetrieebene zerfallen in drei Systeme:

4) Das **rhombische** mit drei auf einander senkrechten Symmetrieebenen; der Name kommt daher, dass die Symmetrieschnitte aller Formen sämmtlich die Gestalt von Rhomben besitzen.

5) Das **monosymmetrische***) Krystallsystem, der Inbegriff aller Formen, welche nur eine einzige Symmetrieebene haben.

6) Das **asymmetrische***) System, d. h. die Krystalle ohne Symmetrieebene.

Die folgende Tabelle wird am leichtesten eine Uebersicht über die Eintheilung der Krystalle in geometrischer und physikalischer Beziehung geben:



Geometr. Abth.	*Physikal. Abth.*	*Zahl und Art der Symmetrieebenen:*	*Krystallsystem:*
I. Kr. m. 3 Hauptaxen	I. Einfachbrechende Krystalle	3 Hauptsymmetrieebenen unter 90°, 6 Symmetrieebenen unter 60°.	1) Reguläres Syst.
II Kr. mit 1 Hauptaxe	II. Optisch einaxige Krystalle	1 Hauptsymmetrieebene, 6 Symmetrieebenen unter 30°.	2) Hexagonales Syst.
		1 Hauptsymmetrieebene, 4 Symmetrieebenen unter 45°.	3) Tetragonales Syst.
III. Kr. ohne Hauptaxe	III. Optisch zweiaxige Krystalle	3 Symmetrieebenen unter 90°.	4) Rhombisches Syst.
		1 Symmetrieebene.	5) Monosymm. Syst.
		Keine Symmetrieeb.	6) Asymmetr. Syst.

§. 46. **Einfache Krystallformen und Combinationen. Krystallreihe.** Ehe wir zur speciellen Betrachtung der einzelnen, scharf von einander getrennten Klassen der Krystalle übergehen, sind noch einige allgemeine Verhältnisse zu erläutern.

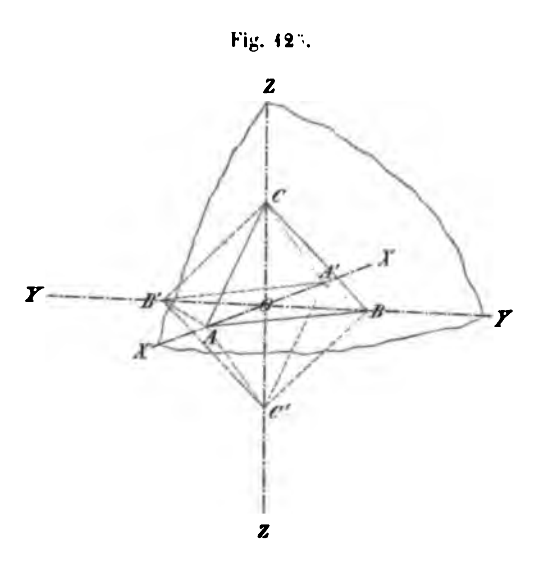
Bei denjenigen Krystallen, welche eine oder mehrere Symmetriebenen haben, erfordert die Existenz einer beliebigen Fläche (mit ihrer parallelen Gegenfläche, welche mit ihr als krystallonomisch ident betrachtet werden kann) diejenige einer oder mehrerer, welche in Bezug auf jene Ebenen symmetrisch zur ersten liegen. Nur durch die Coëxistenz dieser Flächen ist eben die Symmetrie der Krystalle erfüllt. Betrachten wir z. B. einen

---

*) Die älteren Namen »monoklinisch« und »triklinisch« für das fünfte und sechste System sind nicht, wie die übrigen, auf die Gestalt der Symmetrieschnitte, also auf die Symmetrie, als das eigentliche Wesen des Krystallsystems, gegründet, sondern auf den rein willkürlichen Gebrauch, bei der Berechnung der Formen und Ableitung derselben von einer Grundform, drei Kanten als Krystallaxen zu Grunde zu legen, welche im monosymmetrischen System einen schiefen und zwei rechte Winkel bilden, im asymmetrischen natürlich drei schiefe Winkel bilden müssen.

Krystall mit drei zu einander senkrechten Symmetrieebenen XOY, XOZ, YOZ Fig. 125, und sei ABC irgend eine Fläche desselben, so erfordert die Symmetrie nach der Ebene XOY die Existenz einer gleich geneigten ABC' auf der anderen Seite jener Symmetriebene; die Symmetrie nach der Ebene XOZ erfordert ebenso zwei weitere Flächen $AB'C$ und $AB'C'$, symmetrisch liegend zu ABC und ABC' in Bezug auf XOZ; endlich erfordert die Symmetrie nach YOZ zu allen vier bisher genannten Flächen vier symmetrisch in Bezug auf die Ebene YOZ liegende Flächen auf der hinteren Seite des Krystalls, nämlich $A'BC$, $A'BC'$, $A'B'C$, $A'B'C'$. Bei dem vorliegenden Grade der Symmetrie sind es also acht Flächen, welche vermöge desselben einander gegenseitig bedingen. Wäre nur eine Symmetrieebene vorhanden, so würde die Existenz irgend einer gegen dieselbe geneigten Krystallfläche nur diejenige einer zweiten, mit derselben Neigung auf der anderen Seite der Symmetrieebene liegenden Fläche erfordern, und weiter keiner. Ist endlich gar keine Symmetrieebene vorhanden, so bedingt keine Fläche ausser ihrer parallelen Gegenfläche die Existenz einer andern, und die gegenseitige Abhängigkeit der Flächen besteht nur noch darin, dass sie sämmtlich dem Gesetz der Rationalität der Indices genügen.

Fig. 125.



Die Gesammtheit aller der Flächen, deren Auftreten vermöge der Symmetrie des Krystalles durch die Existenz irgend einer derselben bedingt wird, nennt man eine einfache Krystallform. So bilden also die acht, aus vier parallelen Paaren bestehenden Flächen ABC u. s. f. Fig. 125 eine einfache Form, weil jede derselben wegen der drei normalen Symmetrieebenen die Existenz aller übrigen, aber weiter keiner, erfordert. So bilden ferner in dem Falle, dass nur eine Symmetrieebene vorhanden ist, schon zwei Paare paralleler Flächen mit gleicher Neigung gegen die Symmetrieebene eine einfache Krystallform. Ist endlich keine Symmetrieebene da, so wird die vollständige einfache Form schon gebildet von jeder einzelnen Fläche mit ihrer parallelen Gegenfläche.

Man sieht nun leicht, dass die acht Flächen ABC u. s. f. Fig. 125, wenn man die drei Symmetrieaxen zu Axen im Sinne des §. 40. die drei Symmetrieebenen also zu Axenebenen wählt, sämmtlich gleich grosse Para-

meter besitzen, so dass sie also, wenn sie auf irgend eine andere Fläche als Grundform bezogen werden, sämmtlich gleiche Indices (abgesehen vom Vorzeichen) erhalten. Wenn in Fig. 125 nur die Ebene XOZ eine Symmetrieebene ist, XOY und XOZ dagegen zwei beliebige Krystallflächen, welche einander in der Symmetrieaxe OY (normal zu XOZ) schneiden, und wir wählen wieder die Symmetrieebene als eine Axenebene, die erwähnten zwei Flächen als die beiden anderen, so erfordert die Existenz des Flächenpaares ABC und $A'B'C'$ nur diejenige von $AB'C$ und $A'BC'$, und diese vier Flächen haben bei dieser Wahl der Axen ebenfalls gleiche Indices; es existiren aber ausserdem noch vier andere mögliche Flächen desselben Krystalls ABC', $AB'C'$, $A'BC$ und $A'B'C$, welche die gleichen Indices besitzen, aber nicht zu derselben einfachen Form gehören, sondern für sich eine andere bilden. Sind endlich XOY, XOZ und YOZ drei beliebige Flächen eines Krystalls, welcher keine einzige Symmetrieebene besitzt, und wählen wir dieselben zu Axenebenen, so bildet, wie wir sahen, ABC mit ihrer Gegenfläche $A'B'C'$ allein die vollständige einfache Krystallform; es existiren aber noch drei Paare paralleler Flächen, also drei andere einfache Krystallformen, welche ebenfalls, abgesehen vom Vorzeichen, dieselben Indices haben, wie jene.

Man ersieht aus diesen Beispielen, dass man die Wahl der Axenebenen zwar so treffen kann, dass alle Flächen einer einfachen Form die gleichen Indices erhalten, dass aber nicht immer die Gesammtheit aller Flächen mit gleichen Indices auch eine einzige einfache Krystallform bildet, sondern dieselben oft mehreren einfachen Formen angehören können. Da nun ausserdem auch noch die Wahl der Axenebenen eine ganz willkürliche ist, so darf man in keinem Falle die »einfache Form« definiren als den Inbegriff aller Flächen mit gleichen Indices, sondern nur als denjenigen aller durch die Symmetrie einander gegenseitig bedingender Flächen. Da man zu Axenebenen jede beliebige drei Flächen eines Krystalls wählen kann, und doch stets rationale Indices für alle übrigen Flächen erhält (Grundgesetz der Krystallographie, §. 40), so sind vielmehr bei beliebiger Wahl der Axenebenen die Indices der verschiedenen Flächen einer einfachen Form im Allgemeinen verschieden, und es bedarf einer ganz bestimmten Wahl der Axenebenen und somit der Axen, um sie gleich zu erhalten. Es ist nun der Einfachheit wegen allgemein üblich, die Axenebenen so auszuwählen, dass die Parameterlängen aller Flächen einer jeden einfachen Form dieselben werden, und wir werden bei der Betrachtung der einzelnen Formen demselben Grundsatze folgen, dürfen aber niemals dabei vergessen, dass diese Wahl ganz willkürlich ist, dass sie nicht aus theoretischen, sondern nur aus praktischen Gründen geschieht, weil dadurch das Verständniss der Formen und deren Berechnung erleichtert und vereinfacht werden.

Nur solche einfache Formen können allein die Umgrenzung eines vollständig ausgebildeten Krystalles bilden, welche für sich überhaupt einen

Raum nach allen Seiten umschliessen können. Alle andern können nur zu mehreren an einem Krystall auftreten. Eine Krystallform, welche aus den Flächen mehrerer einfacher Formen zusammengesetzt ist, nennt man eine Combination, und unterscheidet zwei-, drei- und mehrzählige Combinationen, welche aus zwei, drei oder mehr einfachen Formen bestehen*). Die Durchschnittsrichtungen zweier Flächen, welche zwei verschiedenen einfachen Formen angehören, heissen Combinationskanten.

Aus dem Gesetz der Rationalität der Indices folgt unmittelbar, dass nur solche einfache Formen mit einander combinirt erscheinen können, deren entsprechende Parameter in rationalem Verhältniss zu einander stehen. Bei einem bestimmten Stoffe sind deren unendlich viele theoretisch möglich, von denen indess bei den allermeisten Körpern nur die mit den einfachsten Indices wirklich vorkommen, während bei denjenigen, deren Krystalle viele einfache Formen zu zeigen pflegen, natürlich auch solche mit weniger einfachen Indices sich finden, aber im Durchschnitt um so seltener, je weniger einfach diese Zahlen sind**). Die Gesammtheit aller an einem Körper möglicher, einfacher Formen, also aller, welche mit einander combinirt auftreten können, nennt man die Krystallreihe desselben. An manchen Substanzen bilden sich, selbst wenn sie unter sehr abweichenden äusseren Umständen zur Krystallisation gelangen, stets dieselben einfachen Formen aus, während andere bei geringer Verschiedenheit der Bildungszustände verschiedene Formen zeigen, ein Umstand, der zuweilen die Feststellung der Zugehörigkeit mehrerer Krystallisationen einer Substanz zu einer Krystallreihe, also der Identität der Krystallform, erschwert. Da aber durch die Kenntniss der Elemente eines Krystalls die ganze Krystallreihe bestimmt ist, so muss es als ein Umstand von untergeordneter Wichtigkeit angesehen werden, welche von den möglichen einfachen Formen nun wirklich an den Krystallen des Körpers auftreten. Die Auffindung neuer einfacher Formen an den Krystallen eines Körpers, dessen Krystallform bereits bekannt, ist demnach in rein krystallographischer Beziehung nur insofern von Interesse, als es sich darum

* Will man an Modellen zweier einfacher, combinationsfähiger Formen sich davon Rechenschaft geben, in welcher Weise die Flächen der einen an der anderen auftreten müssen, so hat man beide so neben einander zu halten, dass die zu Axen gewählten Richtungen, folglich auch alle Symmetrieebenen, bei beiden genau parallel sind, und alsdann die Flächen der ersteren sich parallel verschoben zu denken, bis sie die der andern schneiden. Alsdann fallen die Axen für beide zusammen, und die Combination besteht, wie die einfachen, sie zusammensetzenden Formen, nur aus Flächen, welche dem Gesetze der Rationalität der Indices entsprechen.

** Selbstverständlich hängt der Zahlenwerth derselben ganz von der Wahl der Grundform ab, und es empfiehlt sich daher aus praktischen Gründen, dieselbe so zu treffen, dass die Indices der beobachteten Formen möglichst einfach werden, ohne dass indess dieser Wahl in rein krystallographischer Hinsicht eine theoretische Wichtigkeit beizulegen ist.

handelt, die Abhängigkeit des Auftretens gewisser Formen von den Umständen bei der Bildung des Krystalls zu erforschen.

§. 47. **Holoëdrie und Hemiëdrie. Hemimorphie.** Es ist soeben erwähnt worden, dass es im Allgemeinen von den äusseren Umständen während der Krystallisation abhängt, welche von den einfachen Formen einer Krystallreihe sich ausbilden. Die verschiedenen einfachen Formen einer und derselben Krystallreihe sind demnach hinsichtlich ihres Auftretens von einander völlig unabhängig. Es giebt nun aber eine Anzahl Substanzen, bei denen diese gegenseitige Unabhängigkeit des Auftretens auch stattfindet zwischen den beiden Hälften einer und derselben einfachen Form, welche hierdurch ganz in das Verhältniss zu einander treten, in welchem zwei verschiedene einfache Formen einer Krystallreihe stehen, welche sich durch Auftreten oder Fehlen*), Vorherrschen oder Unterordnung in den Combinationen, Beschaffenheit der Flächen u. s. f. unterscheiden können. Diese Erscheinung wird nur an solchen Krystallen beobachtet, welche mehrere Symmetrieebenen besitzen, d. h. nur innerhalb der ersten vier Krystallsysteme, und die Hälfte der Flächen einer jeden einfachen Form erscheint dabei stets nach einer bestimmten Regel ausgewählt, welche sich folgendermassen aussprechen lässt:

> Denke man sich die Form durch Symmetrieebenen in eine Anzahl Theile zerlegt, welche sämmtlich vollkommen congruent sind, d. h. von denen jeder mit jedem anderen durch Drehung zur vollständigen Deckung gebracht werden kann — so wird die halbe Anzahl dieser Theile so ausgewählt, dass stets die beiden Theile, welche in Bezug auf eine zur Zerlegung des Ganzen benutzte Symmetrieebene zu einander symmetrisch liegen, verschiedenen Hälften angehören.

Seien alle Flächen der einfachen Form, wie es ihrem geometrischen Ideale entspricht, gleichweit von dem Mittelpunkte, in welchem sich alle Symmetrieaxen der Form schneiden, entfernt gedacht, so bildet die nach der angegebenen Regel ausgewählte Hälfte der Flächen, wenn sie allein vorhanden ist, eine Form, welche so beschaffen ist, dass jede Symmetrieaxe auf beiden Seiten vom Mittelpunkte in gleichen Abständen von gleich vielen Flächen, welche mit einander und mit der Symmetrieaxe beiderseits gleiche Winkel einschliessen, geschnitten wird; sind mehrere gleich-

*) In gewissen Fällen schliessen die beiden Hälften einander sogar aus, wenn nämlich mit dem Auftreten der einen und der andern entgegengesetzte physikalische Eigenschaften des Krystalls gesetzmässig verbunden sind. Ist dieses jedoch nicht der Fall, so ist a priori zu schliessen, dass die beiden Hälftgestalten einer Form mit sehr einfachen Zahlenwerthen der Indices ungleich häufiger an einem Krystall zusammen auftreten werden, als diejenigen einer Form mit complicirten Indices; denn die letzteren sind an sich weit seltener, und somit die Wahrscheinlichkeit, dass beide, in ihrem Auftreten von einander ganz unabhängige, Hälften zusammen vorkommen, noch weit kleiner (das Quadrat der ersteren). In der That wird dieser Schluss durch die Erfahrung bestätigt.

werthige Symmetrieaxen vorhanden, so zeigt die Form das gleiche Verhalten zu jeder derselben; ferner besitzen alle Flächen gleiche Umrissfigur, wie es unter gleichen Bedingungen auch bei der vollständigen Form der Fall ist; endlich: besitzt letztere die Eigenschaft, den Raum vollständig zu umschliessen, so kommt diese Eigenschaft auch der aus der Hälfte der Flächen bestehenden Form zu; lässt die vollständige Form den Raum in einer Richtung offen, so ist das Gleiche auch bei der aus der Hälfte der Flächen nach obigem Gesetz gebildeten Form der Fall u. s. w.

Formen von der halben Flächenzahl aller möglicher, welche diesen Bedingungen genügen, nennt man hemiëdrische. Aus der Regel, nach welcher die Flächen einer solchen Form aus der Gesammtzahl der Flächen der vollständigen Form (welche im Gegensatz dazu holoëdrisch genannt wird) ausgewählt worden, geht hervor, dass die hemiëdrische Form nicht nach denjenigen Ebenen symmetrisch sein kann, nach denen die Zerlegung der holoëdrischen Form in gleiche Theile erfolgt, dass also eine hemiëdrische Form stets einen geringeren Grad von Symmetrie besitzen muss, als die zugehörige holoëdrische.

In den ersten drei Krystallsystemen, in denen mehr als drei Symmetrieebenen vorhanden sind, ist eine Zerlegung der holoëdrischen Formen in congruente Theile durch Symmetrieebenen auf mehrfache Weise möglich, daher in diesen mehrere Arten von Hemiëdrie existiren.

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass eine Substanz entweder holoëdrisch krystallisirt und dann nur holoëdrische Formen zeigt, oder dass sie in einer bestimmten Art der Hemiëdrie krystallisirt, in welchem Falle sie niemals andere Formen zeigt, als solche, welche diesem bestimmten Gesetze der Hemiëdrie unterworfen sind. In jedem der ersten vier Krystallsysteme sind daher eine holoëdrische und eine oder mehrere hemiëdrische Abtheilungen zu unterscheiden, und jeder dieser Abtheilungen gehören bestimmte Substanzen an, niemals ein Körper zweien derselben zugleich.

In denjenigen Krystallsystemen, in welchen mehrere Arten von Hemiëdrie möglich sind, können die hemiëdrischen Formen einer Art noch einmal in zwei Hälften zerlegt werden nach dem Gesetz einer anderen Art der Hemiëdrie, und es können hierdurch Formen entstehen, welche nur ein Viertel von der Flächenzahl der holoëdrischen besitzen. Man nennt diese Erscheinung Tetartoëdrie, wenn die so entstehenden je vier viertelflächigen (tetartoëdrischen) Formen von einander unabhängig auftreten, wie die beiden Hälftgestalten in der Hemiëdrie.

Leitet man sämmtliche mögliche Tetartoëdrien der betreffenden Krystallsysteme dadurch her, dass man von den verschiedenen Arten der Hemiëdrie eines Systems immer je zwei mit einander combinirt anwendet, so ergeben sich einige Arten der Tetartoëdrie, bei denen die entstehenden Formen nicht mehr die Eigenschaft besitzen, dass jede Symmetrieaxe derselben auf beiden Seiten von gleich vielen Flächen gleichartig geschnitten wird. Solche Formen müssen daher an den beiden Enden der betreffenden

Symmetrieaxe (es kann dies sowohl für eine einzelne, als auch für mehrere gleichwerthige Symmetrieaxen gelten) ungleich gestaltet sein.

Krystallformen, welche in Bezug auf eine Symmetrieaxe nach den beiden entgegengesetzten Seiten derselben ungleich beschaffen sind, bezeichnet man allgemein als hemimorphe, die Erscheinung eines solchen, bei einer Substanz gesetzmässig wiederkehrenden Gegensatzes als Hemimorphie. Diese Erscheinung tritt auch unabhängig von der Tetartoëdrie auf, indem holoëdrisch krystallisirende Substanzen nach einer Symmetrieaxe hemimorph ausgebildet erscheinen, d. h. indem ihre Formen nach der zu jener Axe senkrechten Symmetrieebene in zwei Hälften zerfallen, welche von einander ebenso unabhängige Gestalten darstellen, wie die beiden aus derselben holoëdrischen Form entstehenden hemiëdrischen. Dass alsdann die Hemimorphie eine von der Hemiëdrie verschiedene und unabhängige Eigenschaft des betreffenden Körpers ist, geht daraus hervor, dass auch hemiëdrische und selbst tetartoëdrische Substanzen gleichzeitig einer solchen Hemimorphie unterworfen sein können (s. Turmalin, überjodsaures Natrium).

Die Hemimorphie ist zugleich mit einem Gegensatze der beiden Seiten der betreffenden Symmetrieaxe (diese wird auch »Axe der Hemimorphie« genannt) in Bezug auf solche physikalische Eigenschaften verbunden, bei denen überhaupt ein Gegensatz zweier paralleler, aber entgegengesetzter Richtungen möglich ist. Eine solche Eigenschaft ist die Pyroëlektricität, die auf einer durch Temperaturänderung hervorgebrachten Trennung positiver und negativer Elektricität beruht, bei welcher die erstere nach der einen Seite, die zweite nach der andern Seite hin sich auf der Oberfläche des Krystalls anhäufen kann. In der That zeigen, wie bereits S. 181 angegeben, die hemimorphen Krystalle polare Pyroëlektricität, indem ein bestimmter Pol der Axe, nach welcher die Hemimorphie stattfindet, unter denselben Umständen immer eine bestimmte Art der Elektricität annimmt. Auch in Bezug auf die Wärmeleitung ist bei hemimorphen Krystallen eine Einseitigkeit nachgewiesen worden. Nach Thompson und Lodge findet nämlich beim Turmalin die Fortpflanzung der Wärme leichter in der Richtung von dem antilogen nach dem analogen Pol hin statt, als umgekehrt. Führt man den Sénarmont'schen Versuch (s. S. 159) auf einer der Hauptaxe parallelen Fläche eines Turmalinkrystalls aus, so erhält man eine unsymmetrische, nach dem analogen Pol hin von der Zuführungsstelle der Wärme weiter abstehende Curve, welche aus zwei Halbellipsen mit gemeinsamer grosser Axe zusammengesetzt ist, deren kleine Halbaxen sich verhalten wie 1 : 1,3 (s. Zeitschr. f. Kryst. 4, 538).

Die Erscheinungen der Hemiëdrie, der Tetartoëdrie und der Hemimorphie haben das gemeinsam, dass der Grad der Symmetrie derjenigen Krystalle, welche den Gesetzen derselben unterworfen sind, ein geringerer ist, als bei den holoëdrischen Formen. Niemals wird aber durch diese Abnahme der Symmetrie diejenige eines andern Krystallsystems hervorgebracht,

insofern als die physikalischen Eigenschaften hierbei im Allgemeinen die gleichen bleiben. So existirt z. B. je eine Hemiëdrie und eine Tetartoëdrie des hexagonalen Krystallsystems, deren Formen keine Symmetrieebene besitzen; trotzdem gehören aber diese Formen nicht dem asymmetrischen Systeme an, denn die betreffenden Krystalle sind, wie alle hexagonalen, optisch einaxig, besitzen also eine physikalische Hauptaxe, welche den asymmetrischen Krystallen fehlt. Wenn somit auch die S. 222 gegebenen Definitionen der sechs Krystallsysteme in rein geometrischem Sinne streng genommen nur für deren holoëdrische Formen gelten, so können wir doch die Gesammtheit der Formen einer bestimmten Art von Hemiëdrie nicht als ein besonderes Krystallsystem bezeichnen, sondern müssen sie als eine Unterabtheilung desjenigen Systems ansehen, von dessen Formen sich die dahin gehörigen Gestalten ableiten.

Wie S. 190 Anm. angegeben, können aus dem Grundsatze, dass die Anordnung der Krystallmoleküle um jedes derselben herum die gleiche sein müsse, alle möglichen regelmässigen Punktsysteme abgeleitet werden. In dem a. a. O. citirten Werke von Sohnke wird nun gezeigt, dass dieselben Symmetrieverhältnisse, die sich bei den so theoretisch abgeleiteten regelmässigen Punktsystemen finden, auch die einzigen bei Krystallen vorkommenden sind. Man gelangt also auf diesem Wege zu denselben Krystallsystemen, welche aus dem Gesetze der Rationalität der Indices als nothwendig folgen (s. S. 213), und welche die Beobachtung an den Krystallen auch als die einzig vorhandenen kennen lehrt. Bei dieser Herleitung werden von Sohnke, nach dem Vorgange von Bravais, solche Richtungen, um welche man ein regelmässiges Punktsystem um einen gewissen Winkel drehen muss, damit jeder vorher mit einem Theilchen besetzt gewesene Punkt wieder mit einem Theilchen besetzt ist, als »Symmetrieaxe« bezeichnet, und in diesem Sinne (der von dem unsrigen verschieden ist, da derselbe auch Richtungen umfasst, zu denen keine Symmetrieebenen senkrecht stehen) durch ihre »Symmetrieaxen« die Krystallsysteme definirt. Diese Definition hat den theoretischen Vortheil, dass sie auch den hemiëdrischen und tetartoëdrischen Abtheilungen jedes Krystallsystems mit entspricht, und es zeigt sich hierbei, dass die Symmetrieverhältnisse aller bisher beobachteten Hemiëdrien und Tetartoëdrien sich unter den von Sohnke theoretisch gefundenen regelmässigen Punktsystemen wiederfinden. Was die Hemimorphie betrifft, so zeigen zwar gewisse unter den möglichen Punktsystemen Ungleichheit nach zwei entgegengesetzten Seiten derselben Richtung, aber diejenigen Fälle, in denen die Hemimorphie unabhängig von Hemiëdrie und Tetartoëdrie auftritt, sind nicht unter der Gesammtheit aller möglicher Punktsysteme vertreten. Um diese zu erklären, nimmt Sohnke daher an, dass die Hemimorphie in einer Verschiedenheit der Krystallmoleküle selbst nach den beiden entgegengesetzten Richtungen begründet sei, nicht in einer Ungleichheit ihrer Anordnung.

§. 48. **Regelmässige Verwachsungen der Krystalle. Pseudosymmetrie.** Wenn auf einem bereits vorhandenen Krystalle einer Substanz sich Theilchen einer andern absetzen, so kommt es vor, dass die von den oberflächlichen Theilchen des ersten Krystalls aus wirkenden anziehenden und abstossenden Kräfte die Art der Anlagerung der Theilchen der zweiten Substanz beeinflussen, und diese sich in einer bestimmten gesetzmässigen Orientirung auf jenem ablagern. Die zweite Substanz bildet alsdann Krystalle, welche sich in einer bestimmten Stellung zu demjenigen der ersten befinden. Solche Fälle beobachtet man mehrfach unter den Mineralien; z. B. giebt es Krystalle des hexagonalen Eisenoxyds, auf deren Hauptsymmetrieebene tetragonale Krystalle von Rutil so aufgewachsen sind, dass deren Hauptaxe je einer der gleichwerthigen Symmetrieaxen, welche in der Hauptsymmetrieebene des Eisenoxydkrystalls liegen, parallel geht.

Wenn bei einer dimorphen Substanz eine Umwandlung eines Krystalls der einen Modification in solche der andern stattfindet, so ist es sehr häufig, dass die neu entstehenden Krystalle sämmtlich eine parallele und zum ursprünglichen Krystall regelmässig orientirte Stellung annehmen. So lange nur erst ein Theil der Substanz umgewandelt ist, haben wir es also dann mit einer regelmässigen Verwachsung zweier dimorpher Substanzen zu thun.

Von grösserer Verbreitung und Wichtigkeit sind jedoch die regelmässigen Verwachsungen von Krystallen derselben Substanz, welche man Zwillings-, Drillings-... Viellings-Krystalle nennt, je nachdem sie von zwei, drei oder mehr Krystallen gebildet werden.

Wenn beim Wachsthum eines Krystalls seine Theilchen sich nach verschiedenen Richtungen in verschiedenen Abständen an einander lagern, wie es nothwendig der Fall sein muss, wenn dieselben eine regelmässige Lagerung im Raume besitzen sollen (vergl. S. 189), so ist dies nur dadurch möglich, dass die Theilchen nach verschiedenen Richtungen ungleiche anziehende Kräfte auf einander ausüben, dass es gewisse Richtungen in denselben giebt, in denen ihre anziehenden Kräfte wirken, und unter diesen eine oder mehrere Richtungen, in denen diese Kräfte am grössten sind. Die einfachste Gleichgewichtslage wird dann erreicht sein, wenn das entstandene regelmässige Molekularaggregat lediglich aus parallel orientirten Theilchen zusammengesetzt ist. Ausser der parallelen Orientirung sind aber noch andere Gleichgewichtslagen zwischen benachbarten Theilchen möglich: Denken wir uns statt der in Fig. 113 dargestellten regelmässigsten Art der Molekularaggregation den allgemeinsten Fall einer solchen, nämlich die Theilchen nach drei auf einander schiefwinkeligen Reihen geordnet, in deren jeder die Abstände andre sind, und denken wir uns ferner in diesen drei Richtungen die anziehenden Kräfte wirkend, so ist es klar, dass diese Kräfte in den drei Richtungen ungleich grosse sein müssen; dieselben mögen mit $a > b > c$ bezeichnet werden. Alle während des Wachsthums des Krystalls sich anlegenden Theilchen müssen nun, wenn die neu entstehenden Schichten den früheren gleich werden sollen, vor ihrer Fixirung

sich so orientiren, dass ihre Richtungen *abc* parallel den Richtungen *abc* der bereits fixirten Theilchen werden. Geht das Wachsthum des Krystalls in einer Lösung vor sich, in welcher natürlich die Theilchen sich in allen möglichen Orientirungen befinden, so hat jedes derselben dazu einen Widerstand zu überwinden, der um so grösser ist, je mehr die zur parallelen Orientirung desselben nöthige Drehung beträgt. Bei denjenigen, deren Orientirung am weitesten von der einfachsten Gleichgewichtslage entfernt ist, wird daher der Fall eintreten können, dass sie in einer andern, weniger einfachen, aber von ihrer zufälligen Orientirung weniger verschiedenen Gleichgewichtslage fixirt werden. Die nächst einfache Gleichgewichtslage ist nun offenbar diejenige, in welcher die beiden Richtungen der grössten Anziehung *a* und *b* den entsprechenden Richtungen bereits fixirter und sie anziehender Theilchen parallel werden, die dritte zur Ebene *a b* schiefwinkelige Richtung *c* aber nicht mit der Richtung *c* der fixirten Theilchen zusammenfällt. Wir können die Stellung der neu angelagerten Theilchen alsdann so beschreiben, dass wir uns dieselben aus der mit den übrigen parallelen Orientirung um 180° gedreht denken um die Normale zu der ihnen gemeinschaftlichen Ebene *a b*; der wirkliche Vorgang ist natürlich der umgekehrte: Die Richtungen *a* und *b* sind bei der Anlagerung parallel geworden, die Theilchen haben sich aber nicht weit genug gedreht, als dass auch ihre Richtung *c* mit der entsprechenden der andern Theilchen hätte zusammenfallen können. Ist ein Theilchen nun in einer solchen weniger einfachen Gleichgewichtslage, welche wir als Zwillingsstellung bezeichnen wollen, fixirt, so kann es seinerseits wieder die Anlagerung neuer Theilchen derart beeinflussen, dass deren Orientirung der seinigen parallel wird. Alsdann bildet sich, von diesen Theilchen ausgehend, bei weiterem Wachsthum des Krystalls eine Molekularaggregation, welche sich zu derjenigen des übrigen Krystalls in Zwillingsstellung befindet.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass eine sogenannte Zwillingsbildung erfolgen müsse nach einer Ebene, parallel welcher die Theilchen des Krystalls maximale Anziehung auf einander ausüben. Dies wird aber offenbar besonders der Fall sein bei Spaltungsebenen, deren Normalen Richtungen kleinster Cohäsion sind, und hieraus erklärt sich jedenfalls das häufige Vorkommen von Zwillingsbildung nach Ebenen, welche Spaltungsflächen der Krystalle parallel gehen.

Aus den obigen Darlegungen folgt ferner, dass eine Zwillingsbildung um so leichter entstehen müsse, je grösseren Widerstand die Flüssigkeit, aus welcher die Theilchen des Krystalls sich absetzen, ihrer Drehung entgegensetzt. In der That hat O. Lehmann gefunden, dass gewisse Salze, welche, aus einer wässrigen Lösung krystallisirt, einfache Krystalle bilden, Zwillingsverwachsungen zeigen, sobald man sie aus zähen, z. B. durch Gummi verdickten Lösungen sich abscheiden lässt. Durch diese Beobachtung wird es vollkommen verständlich, warum bei den Mineralien Zwillingsbildungen so häufig sind (bei manchen derselben findet man sogar niemals

einfache Krystalle), denn diese haben sich offenbar in den meisten Fällen aus unreinen Lösungen oder, wie die Mineralien der vulkanischen Gesteine, aus zähem Schmelzfluss ausgeschieden. In einer Lösung (resp. Schmelzfluss), welche der Drehung der Theilchen einen grossen Widerstand entgegensetzt, muss ferner die Gelegenheit zur Zwillingsbildung offenbar am günstigsten sein im Beginne der Bildung eines Krystalls, während die ersten Theilchen noch im Begriffe sind, sich an einander zu lagern, also die orientirende Gesammtwirkung auf die später sich anlagernden Theilchen noch am kleinsten ist. Damit stimmt es vollkommen überein, dass bei der mikroskopischen Beobachtung eines in Zwillingen krystallisirenden Salzes schon jeder kleinste entstehende Krystall, sobald er in die Grenzen mikroskopischer Sichtbarkeit getreten ist, als Zwilling erscheint, dessen beide Krystalle ebenso fortwachsen, wie die beiden Hälften eines und desselben Krystalls, d. h. nur insoweit verschieden, als es der niemals ganz gleichmässigen Zuführung des Materials von verschiedenen Seiten entspricht (vergl. S. 191). Es werden also die einzelnen einander entsprechenden Flächen der beiden regelmässig mit einander verwachsenen Krystalle eines solchen Zwillings niemals genau gleich gross sein können, ebenso wenig, wie die einander entsprechenden Flächen auf beiden Seiten eines einfachen Krystalls, aber stets werden die beiden Krystalle, da ihr Wachsthum unter im Allgemeinen gleichen Umständen stattfindet, die gleiche einfache Form oder Combination zeigen.

In Folge dieser Formengleichheit können wir die geometrische Beschreibung eines solchen Zwillings immer in der Weise darstellen, dass wir von zwei Krystallen von gleicher Form und paralleler Orientirung den einen um die Normale zu einer Fläche um 180° gedreht denken; die in dieser gegenseitigen Stellung, welche deshalb auch »hemitrop« genannt wird, verbundenen Krystalle haben dann offenbar jene Krystallfläche gemeinsam, d. h. dieselbe ist in beiden parallel. Die Richtung, um welche wir uns einen Krystall gedreht zu denken haben, um ihn in die Zwillingsstellung zum zweiten zu bringen, nennt man die Zwillingsaxe, die dazu senkrechte Ebene, welche demnach bei der Drehung sich selbst parallel bleibt, die Zwillingsebene. Würde man als solche eine Symmetrieebene des Krystalls nehmen, also den einen der beiden Krystalle um eine Symmetrieaxe um 180° drehen, so würde derselbe wieder sich selbst congruent, also dem andern parallel werden, wir erhielten also keinen Zwilling, sondern eine Parallelverwachsung. In Folge dessen soll im Folgenden unter »Zwillingsebene« immer eine solche Fläche verstanden werden, welche nicht Symmetrieebene der mit einander verwachsenen Krystalle ist.

a Bei der in den obigen Betrachtungen als Beispiel zu Grunde gelegten Molekularstructur ist offenbar die Zwillingsebene eine mögliche Krystallfläche*, die Zwillingsaxe die Normale einer solchen.

* Gewöhnlich sind es die durch die Molekularstructur besonders bevorzugten

Die beiden Krystalle des Zwillings liegen alsdann zu einander *symmetrisch in Bezug auf eine Krystallfläche* derselben, und dies ist der einfachste und bei weitem häufigste Fall der regelmässigen Verwachsung zweier Krystalle derselben Substanz.

Weit seltner finden sich Zwillinge nach folgenden beiden Gesetzen:

b). *Die Zwillingsaxe ist parallel einer möglichen Kante.* Alsdann liegen die beiden Krystalle symmetrisch zu einer Ebene, welche zu einer möglichen Kante (oder Zone) senkrecht steht.

c) *Die Zwillingsaxe liegt in einer möglichen Krystallfläche normal zu einer möglichen Kante.* Alsdann sind die beiden Krystalle zu einander symmetrisch in Bezug auf eine Ebene, welche zu einer möglichen Krystallfläche senkrecht und einer möglichen Kante (Zone) parallel ist.

Die Zahl der Zwillinge nach den letztern beiden Gesetzen erfährt noch dadurch eine erhebliche Einschränkung, dass die Drehung nach einer dieser Regeln in denjenigen Fällen, in denen die Zwillingsebene zu einer Symmetrieebene senkrecht steht, zu dem gleichen Resultat führt, wie die Drehung nach dem ersten Gesetze; in Folge dessen hat man bisher, abgesehen von hemiëdrischen Krystallen, nur im asymmetrischen Systeme einige Fälle von Zwillingsverwachsungen beobachtet, welche nicht durch das erste Gesetz dargestellt werden können.

Die hemiëdrischen, tetartoëdrischen und hemimorphen Krystalle haben, wie im vor. § gezeigt wurde, einen geringeren Grad von Symmetrie, als die holoëdrischen; in Folge dessen können zwei derselben einen Zwilling bilden, indem sie symmetrisch zu einander in Bezug auf eine Ebene verwachsen, welche durch die Hemiëdrie, Tetartoëdrie oder Hemimorphie ihren Charakter als Symmetrieebene der Krystalle verloren hat. Durch die Zwillingsbildung nach einer solchen Fläche wird alsdann gleichsam die Symmetrie des holoëdrischen Krystalls wieder hergestellt, daher man diese Verwachsungen auch »Ergänzungszwillinge« genannt hat. Dieselben können durch Drehung des einen Krystalls nach dem ersten Gesetze (a) dargestellt werden, sobald die Form der Einzelkrystalle noch Symmetrieebenen besitzt. Ist dies nicht der Fall, d. h. zeigt nur der Zwilling Symmetrie, so kann der eine Krystall nicht durch Drehung mit dem andern zur Congruenz gebracht werden (s. die symmetrischen Zwillinge des Quarzes). Umgekehrt finden sich bei gewissen hemiëdrischen und tetartoëdrischen Krystallen, welche keine einzige Symmetrieebene mehr besitzen, auch solche regelmässige Verwachsungen, deren Zwillingsaxe eine mögliche Kante ist, bei denen aber die beiden Krystalle nach keiner Ebene zu einander symmetrisch liegen (ein derartiges Beispiel findet man ebenfalls weiterhin unter Quarz).

Von der Zwillingsebene, die in den meisten Fällen auch Symmetrieebene der Verwachsung ist, muss unterschieden werden die *Verwach-*

Flächen, welche also bei geeigneter Wahl der Axen besonders einfache Indices erhalten, nach denen die Zwillingsbildung erfolgt.

sungsfläche, d. h. die Fläche, in welcher die beiden Krystalle einander berühren. Diese hängt von dem zufälligen Wachsthum derselben ab und kann also einen ganz unregelmässigen Verlauf nehmen*); zuweilen grenzen die Krystalle auch mit einer ebenen Fläche aneinander, welche senkrecht zur Zwillingsebene steht, nicht selten aber auch mit der Zwillingsebene selbst, und diese letztere Ausbildung ist es, welche man, gleichsam als geometrisches Ideal, in den Modellen der Zwillinge darzustellen pflegt**).

Viele Zwillinge zeigen eine Aehnlichkeit der äusseren Form mit der eines einfachen Krystalls eines andern Systems von höherer Symmetrie, die oft eine so grosse ist, dass nur auf physikalischem Wege, besonders durch die verschiedene optische Orientirung der einzelnen Theile, erkannt werden kann, dass man es nicht mit einem einfachen Krystall, sondern mit einem zusammengesetzten Gebilde zu thun hat. Diese mit dem Namen Pseudosymmetrie***) bezeichnete Aehnlichkeit beruht darauf, dass auch die einfachen, solche Gebilde zusammensetzenden Krystalle eine »Grenzform« zeigen, d. h. Winkel besitzen, welche den charakteristischen Winkeln höher symmetrischer Systeme sehr nahe kommen; diese Annäherung ist nun keine zufällige, sondern die Folge davon, dass die Substanz der Dimorphie unterworfen ist. Die beiden Modificationen einer dimorphen Substanz haben nämlich im Allgemeinen sehr ähnliche Molekularstructur, also Krystallformen mit sehr ähnlichen Winkeln. Diejenige von beiden, welcher der geringere Grad der Symmetrie zukommt, besitzt nun häufig die Eigenschaft, solche regelmässige Verwachsungen zu zeigen, die anscheinend die Symmetrie der andern Modification besitzen. Oft sind dann die Differenzen der beiderlei Gestalten, der Verwachsungen der einen und der einfachen Krystalle der andern Modification, so gering, dass sie kaum oder nicht durch Winkelmessungen nachgewiesen werden können, und, wie oben erwähnt, ihre Unterscheidung nur auf physikalischem Wege möglich ist. Von besonderem physikalischen Interesse ist der Umstand, dass es gelang, manche solcher pseudosymmetrischer Gebilde durch Temperaturerhöhung in diejenige Form der andern Modification, welcher die ihrige so nahe steht, umzuwandeln (s. Boracit, schwefelsaures Kalium).

*) In diesem Falle würde die Berührungsfläche an einer Stelle für beide Theile des Zwillings im Allgemeinen verschiedene krystallographische Orientirung besitzen, die beiderseits angrenzenden Theile also bei Temperaturänderungen, falls es sich nicht um einfachbrechende Krystalle handelt, sich ungleich ausdehnen, was unzweifelhaft zu Spannungen, d. i. zu optischen Anomalien Anlass geben muss, wenn die Krystalle bei einer wesentlich von ihrer jetzigen abweichenden Temperatur entstanden.

**) Da so regelmässig ausgebildete Zwillinge, deren Zwillingsebene zugleich Verwachsungsebene ist, meist nach dieser Fläche besonders ausgedehnt sind, so stellt man sie im Modell so dar, dass man die Krystallform nach der Zwillingsebene halbirt und die eine Hälfte um 180° um die Zwillingsaxe dreht. Solchen Modellen stehen manche natürliche Zwillinge, z. B. von Spinell, in ihrer Ausbildung sehr nahe.

***) Tschermak hat dafür den Namen »Mimesie« (Nachahmung) vorgeschlagen und nennt »Pseudosymmetrie« die Erscheinung, dass einfache Krystalle einer Substanz eine Form besitzen, welche der eines andern Systems von höherer Symmetrie sehr nahe steht.

A. Krystalle mit drei Hauptaxen.

Die Krystalle dieser Art besitzen nach §. 45 sämmtlich den gleichen Grad der Symmetrie, bilden also nur ein Krystallsystem. Dieses ist:

I. Das reguläre Krystallsystem.

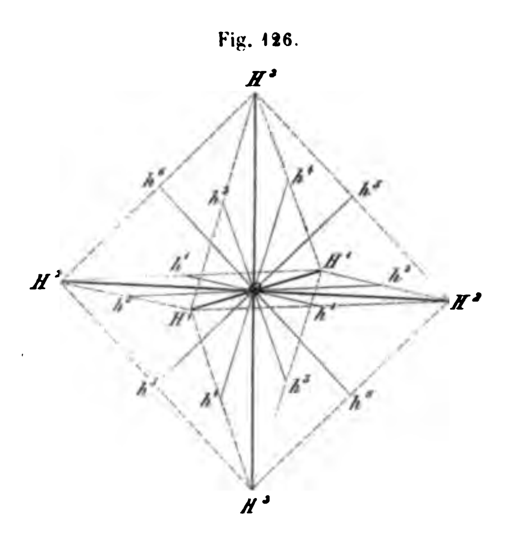
§. 49 **Einleitung.** Es ist bereits S. 218 aus dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie abgeleitet worden, dass die regulären Krystalle in ihren drei gleichwerthigen Hauptaxen gleiche Elasticität und Cohäsion besitzen, und dass sich diese zwar mit der Richtung ändern, aber stets in allen denjenigen Richtungen, welche der Symmetrie der Krystalle wegen gleichwerthig sind, denselben Werth besitzen müssen; dass ferner jeder reguläre Krystall, so lange er homogen ist, in allen Richtungen gleiche Lichtgeschwindigkeit besitzt, also einfachbrechend ist, dass derselbe nach allen Richtungen gleiches Wärmeleitungsvermögen, gleiche thermische Ausdehnung (daher die Winkel für alle Temperaturen denselben Werth haben), gleiche magnetische oder diamagnetische Eigenschaften u. s. f. besitzen muss; dass folglich die allgemeinen optischen, thermischen und magnetischen Eigenschaften aller regulärer Krystalle dieselben sind, wie bei den isotropen amorphen Körpern. Sie unterscheiden sich von diesen nur dadurch, dass sich ihre Elasticität und Cohäsion mit der Richtung ändert, während sie bei letzteren constant bleibt. Die Aenderung dieser Eigenschaften mit der Richtung in einem regulären Krystall findet aber stets so statt, wie es die geometrische Symmetrie erfordert.

Die holoëdrische Abtheilung des regulären Systems bildet die Gesammtheit aller einfacher Formen, welche drei auf einander senkrechte Haupt-Symmetrieebenen und ausserdem noch sechs gewöhnliche Symmetrieebenen besitzen. Die Lage dieser neun Symmetrieebenen wird am leichtesten veranschaulicht*) durch die Richtung ihrer Normalen: in Fig. 126 (folg. S.) bedeuten H^1, H^2, H^3 die Normalen zu den

*) Der Anfänger kann sich die Anschauung dieser Verhältnisse wesentlich erleichtern durch ein leicht anzufertigendes Modell, in welchem die einzelnen Symmetrieebenen durch starkes Papier dargestellt sind, welches man am besten kreisförmig ausschneidet und dann in die einzelnen Segmente zerlegt, worauf diese in den richtigen Stellungen an einander gefügt werden.

drei Haupt-Symmetrieebenen, so dass H^1 normal zu derjenigen ist, in welcher H^2 und H^3 liegen, also kurz H^2OH^3, während H^1OH^2 und H^1OH^3 die beiden anderen Haupt-Symmetrieebenen sind. Von den Normalen zu den sechs übrigen Symmetrieebenen, h^1, h^2, h^3, h^4, h^5, h^6, liegen je zwei in einer Haupt-Symmetrieebene und halbiren den rechten Winkel der beiden in derselben liegenden Hauptaxen, bilden also mit einander ebenfalls einen rechten Winkel. Die beiden zu einem solchen Paar von Symmetrieaxen normalen Symmetrieebenen sind also ebenfalls senkrecht zu einander, während zwei solcher, deren Normalen in verschiedenen Haupt-Symmetrieebenen liegen, einander unter einem Winkel von 60° schneiden, wie weiterhin gezeigt werden soll. In jeder Hauptaxe schneiden einander demnach zwei Haupt-Symmetrieebenen und zwei gewöhnliche, jedes Paar unter 90°, eine der ersteren mit einer der letzteren unter 45°.

Fig. 126.



Die drei Hauptaxen sind gleichwerthig, d. h. können beliebig mit einander vertauscht werden, ohne dass sich dadurch die Form ändert. Der einfachste Fall einer Form, welche diese Bedingung erfüllt, ist offenbar derjenige einer Fläche, welche sämmtliche drei Hauptaxen in gleichem Abstande schneidet, nebst den sieben, durch die Symmetrie nach den drei Haupt-Symmetrieebenen erforderlichen*), Flächen, welche mit ihr die ganze einfache Form liefern, wie sie in Fig. 126 durch die punktirten Linien dargestellt ist. Diese Linien bezeichnen die Kanten dieser Form, des **Oktaëders**, welche sämmtlich gleiche Winkel haben und je zwei Hauptaxen unter 45° durchschneiden.

Jede der acht Flächen des Oktaëders schneidet die drei Hauptaxen in gleichem Abstande, alle müssen daher die gleichen Indices erhalten, wenn wir die Hauptaxen zu Axen, die drei Haupt-Symmetrieebenen also zu Axenebenen wählen. Obgleich wir bekanntlich jede beliebige drei Flächen eines Krystalls zu Axenebenen wählen können und doch für alle anderen rationale Indices erhalten, so wird doch die Betrachtung der Formen wesentlich erleichtert, wenn die Axenebenen so gewählt werden, dass alle Flächen einer jeden einfachen Form die gleichen Indices erhalten. Dies ist aber bei dem Oktaëder und, wie wir sehen werden, auch bei allen anderen

*) Vergl. S. 223 und Fig. 125.

regulären Formen, nur dann der Fall, wenn wir die drei Haupt-Symmetrieebenen zu Axenebenen machen. Für diese Wahl spricht noch ein weiterer sehr wichtiger Umstand, d. i. die weit grössere Einfachheit der Berechnungen, da wir, weil die Axenebenen alsdann normal zu einander stehen, fast immer nur rechtwinkelige sphärische Dreiecke zu berechnen haben. Ebenso beliebig, wie die Wahl der Axen, ist nach §. 40 auch die der Grundform, und es handelt sich auch hier wieder um den rein praktischen Gesichtspunkt grösster Einfachheit der Ableitungen. Fassen wir diesen ins Auge, so ist es klar, dass keine Form geeigneter sein wird, als Grundform zu dienen, als das **Oktaëder**, dessen Flächen die drei Hauptaxen in gleichen Abständen schneiden. Es sollen demnach im Folgenden alle Formen auf die drei Hauptaxen als **Axen***) und auf eine Oktaëderfläche als **Grundform** bezogen werden. Alsdann sind die Elemente (vergl. S. 197) jedes regulären Krystalls gegeben durch die Grössen:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^0$$
$$a : b : c = 1 : 1 : 1$$

Diese Grössen sind sämmtlich durch die Symmetrie bestimmt und von der Natur des einzelnen Krystalls unabhängig, also bedarf es keiner Messung, um die Elemente eines regulären Krystalls zu bestimmen; dieselben sind durch die Erkennung seines Systems (z. B. auf optischem Wege) bereits gegeben, und werden, da die angegebene Wahl der Axen die ganz allgemein adoptirte ist, niemals besonders angeführt.

Nachdem so die Elemente gegeben sind, können die einzelnen Formen durch ihre Indices bezeichnet werden. Was zunächst das Oktaëder selbst betrifft, so haben seine acht Flächen offenbar folgende Symbole:

$$(111)\ (1\bar{1}1)\ (\bar{1}11)\ (\bar{1}\bar{1}1)$$
$$(11\bar{1})\ (1\bar{1}\bar{1})\ (\bar{1}1\bar{1})\ (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$$

wobei die hintere Hälfte der Axe H^1, die linke von H^2 und die untere von H^3 Fig. 126 als negative genommen worden sind. Der allgemeine Fall einer beliebigen anderen Fläche des regulären Systems ist ausgedrückt durch das Symbol (hkl), d. i. dasjenige einer Fläche, deren Parameter sämmtlich ungleich sind, aber, weil die Grundform gleiche Parameter hat, sich wie rationale Zahlen verhalten. Da die drei Axen beliebig vertauschbar sind, so liegen in dem vorderen Oktanten rechts oben, in welchem alle Parameter positiv sind, folgende Flächen der in Rede stehenden Form:

$$(hkl)\quad (khl)\quad (hlk)\quad (klh)\quad (lhk)\quad (lkh)$$

In dem links oben vorn befindlichen Oktanten liegen die Flächen:

$$(h\bar{k}l)\quad (k\bar{h}l)\quad (h\bar{l}k)\quad (k\bar{l}h)\quad (l\bar{h}k)\quad (l\bar{k}h)$$

u. s. f. in jedem der acht Oktanten sechs Flächen, so dass die vollflächige Form 48 Flächen besitzt. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn h, k, l von

*) Und sollen die Formen stets so gestellt werden, dass eine der drei Axen vertical und eine zweite horizontal auf den Beobachter zuläuft: dann ist die dritte quer gehende natürlich auch horizontal.

einander und von Null verschieden sind. Es giebt sechs verschiedene Specialfälle jenes allgemeinen Falles, in welchen die Flächenzahl eine eingeschränktere ist; wenn zwei der Indices gleich sind, deren Vertauschung also keine neue Fläche liefert, Flächenzahl = 24; hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) der dritte Index grösser, 2) kleiner, als die beiden gleichen; 3) wenn einer der Indices = 0, je zwei Flächen, welche sich nur durch das Vorzeichen dieses Index unterscheiden, nur eine darstellen, Flächenzahl = 24; 4) wenn zwei Indices gleich, der dritte = 0, wobei je vier Flächen nur eine darstellen können, Flächenzahl = 12; 5) zwei Indices = 0, der dritte kann dann = 1 gesetzt werden, liefert die drei Axenebenen (001) (100) (010), Flächenzahl = 6; 6) alle Indices gleich, d. i. (111), das von uns zur Grundform gewählte Oktaëder mit der Flächenzahl 8. Inclusive des allgemeinen Falles (hkl) resultiren also sieben verschiedene Arten von Flächensymbolen, entsprechend ebenso vielen verschiedenen Arten von einfachen Formen. Da man von der Gestalt dieser Formen am leichtesten aus dem Parameterverhältniss ihrer Flächen eine Vorstellung gewinnt, so sollen dieselben zunächst aus dem Verhältniss ihrer Parameter hergeleitet werden, indem wir letztere als Vielfache der Parameter der Grundform betrachten.

§. 50. **Herleitung und Bezeichnung der regulären Krystallformen.** Da die Parameter der Grundform, des Oktaëders, sämmtlich gleich gross sind, so können wir das Verhältniss derselben setzen

$$= a : a : a.$$

I. Dasjenige einer Fläche, deren Parameter sämmtlich ungleich sind, ist demnach

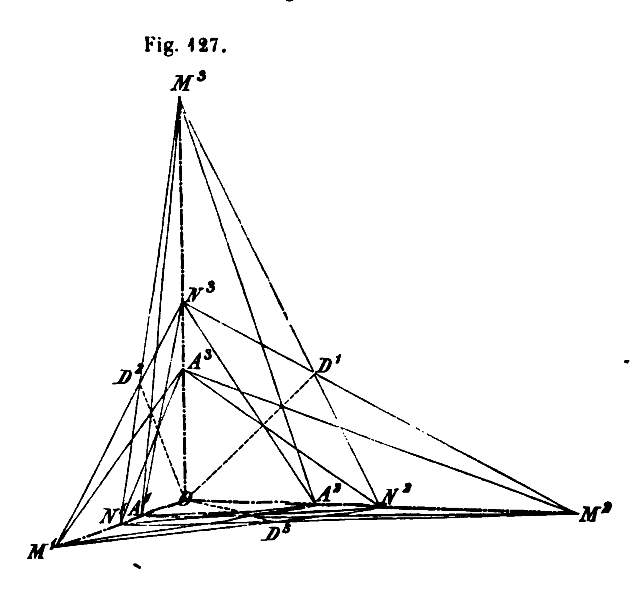
$$a : na : ma,$$

wo nach S. 198 die Coëfficienten n und m (im Allgemeinen einfache) rationale Zahlen sind, welche grösser als 1, da wir stets den kleinsten Parameter gleich der beliebigen Zahl a setzen wollen. Sei in Fig. 127 *) $OA^1 = OA^2 = OA^3 = a$, und wählen wir z. B. $n = \frac{3}{2}$, $m = 3$, so ist die Ebene, welche die drei Axen in den Punkten $A^1 N^2 M^3$, schneidet, kurz: die Ebene $A^1 N^2 M^3$, eine Krystallfläche mit dem obigen Parameterverhältniss. Nun ist die Ebene, welche, normal zur Haupt-Symmetrieebene $A^2 O A^3$, den Winkel der beiden anderen Axenebenen halbirt (sie ist bestimmt durch die beiden Geraden OA^1 und OD^1), ebenfalls eine Symmetrieebene der regulären Krystalle; die Symmetrie nach dieser fordert also die Existenz einer zweiten Fläche, welche in Bezug auf jene Ebene symmetrisch liegt zu $A^1 N^2 M^3$, dies ist die Fläche $A^1 N^3 M^2$, welche mit der vorigen die Punkte

*) Hier ist es für den Anfänger fast nothwendig, sich die Anschauung zu erleichtern durch ein Modell, bestehend in drei, einander rechtwinkelig durchkreuzenden Metallstäben, welche in bestimmten Abständen durchbohrt sind, um diese Punkte mittelst Fäden zu verbinden, wie die Punkte $A^1 N^2 M^3$ u. s. w. in Fig. 127 durch die feineren Geraden verbunden sind.

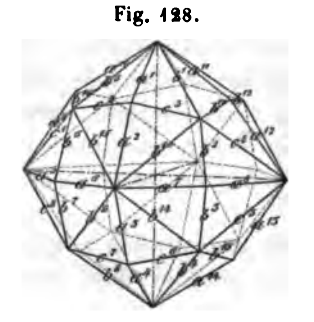
A^1 und D^1, also die Gerade zwischen beiden gemein hat. Ferner ist auch die Ebene $A^2 O D^2$, welche den Winkel zwischen $A^1 O A^2$ und $A^3 O A^2$ halbirt, eine Symmetrieebene, also muss auch in Bezug auf diese eine zu $A^1 N^2 M^3$ symmetrische Fläche existiren; diese ist $A^3 N^2 M^1$. Endlich ist auch die den Winkel zwischen $A^3 O A^1$ und $A^3 O A^2$ halbirende Ebene eine Symmetrieebene, so dass durch die Existenz von $A^1 N^2 M^3$ auch diejenige der symmetrisch liegenden $A^2 N^1 M^3$ gegeben ist. $A^3 N^2 M^1$ erfordert ihrerseits wieder das Auftreten einer in Bezug auf die Ebene $A^3 O D^3$ zu ihr symmetrisch liegenden Fläche $A^3 N^1 M^2$, und $A^2 N^1 M^3$ das einer Fläche $A^2 N^3 M^1$, welche in Bezug auf $A^2 O D^2$ zu ihr symmetrisch liegt.

Fig. 127.



Hieraus ersieht man, dass allein in dem rechten oberen Oktanten der Vorderseite durch die Symmetrie sechs verschiedene Flächen erfordert werden, deren Schnittpunkte mit den drei Axen man erhält, wenn man die Längen a, na und ma auf den drei Hauptaxen aufträgt und dann alle möglichen Vertauschungen derselben vornimmt. Das Resultat ist also ganz dasselbe, welches uns im vorigen § die Vertauschung der Indices (hkl) geliefert hat. Wegen der Haupt-Symmetrieebene $A^1 O A^3$ müssen in dem links oben anliegenden Oktanten sechs ganz gleich liegende Flächen vorhanden sein, zu diesen 12 weitere 12, symmetrisch zur horizontalen Haupt-Symmetrieebene gelegene, unten, endlich zu diesen 24 noch ebenso viele in Bezug auf die dritte Haupt-Symmetrieebene symmetrisch liegende auf der abgewandten Seite des Krystalls. Die vollständige einfache Form Fig. 128, deren Parameterverhältniss $a : na : ma$, hat somit 48 Flächen und heisst deshalb Achtundvierzigflächner oder Hexakisoktaëder. Da Fig. 128 diese Form, wie es weiterhin mit allen einfachen Formen geschehen soll, unter gleichem Abstand aller Flächenpaare darstellt, so zeigt dieselbe unmittelbar die Symmetrie nach den neun Symmetrieebenen. Die drei Haupt-Sym-

Fig. 128.



metrieebenen gehen durch folgende Kanten: Die 1. durch a^1, a^2, a^3, a^4 und die entsprechenden der abgewandten Seite, die 2. durch a^5, a^6, a^7, a^8 u. s. f., die 3. durch a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, a^{13}, a^{14}. Die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen, durch deren jede der Achtundvierzigflächner ebenfalls in zwei gleiche und entgegengesetzte Hälften zerlegt wird, gehen durch die Kanten 1. b^1, b^2, b^3, b^4 u. s. f., 2. b^5, b^6, b^7, b^8 u. s. f., 3. b^9, b^{10}, b^{11}, b^{12} u. s. f., 4. b^{13}, b^{14}, b^{15}, b^{16} u. s. f., 5. c^1, c^2, c^3, c^4 u. s. f., 6. c^5, c^6, c^7, c^8 u. s. f.

In der Naumann'schen Bezeichnungsweise, welche nichts Anderes ist, als eine Abkürzung der Angabe des Parameterverhältnisses, erhält die Grundform des regulären Systems das Zeichen O (Anfangsbuchstabe des Namens »Oktaëder«), und mit diesem Symbole werden, um die übrigen Formen zu bezeichnen, die Coëfficienten der Parameter, falls sie von 1 verschieden sind, in der Weise verbunden, dass der grössere, m, vor dasselbe, der kleinere, n, dahinter gesetzt wird. Darnach erhält das Hexakisoktaëder das Zeichen mOn. Da das Parameterverhältniss dieser Form

$$a : na : ma = \frac{a}{mn} : \frac{a}{m} : \frac{a}{n}$$

so sind mn, m und n*) die drei Indices hkl derselben, durch welche je nach ihrer Reihenfolge und ihrem Vorzeichen die einzelnen Flächen charakterisirt werden.

Nach Miller wird die vollständige einfache Form bezeichnet durch das Symbol irgend einer der zu ihr gehörigen Flächen, eingeschlossen in gebrochene Klammern**); demnach ist $\{hkl\}$ das Zeichen des Hexakisoktaëders, welches im Folgenden immer so geschrieben werden soll, dass unter h der grösste, unter l der kleinste der drei Zahlenwerthe verstanden wird.

II. Wir sahen, dass sämmtliche Flächen mit dem Parameterverhältniss $a : na : ma$ innerhalb eines Oktanten dadurch erhalten wurden, dass die Grössen a, na, ma auf je einer Axe aufgetragen und dann so oft, als es möglich ist, vertauscht wurden. In dem speciellen Falle nun, dass zwei der Parameter gleich gross sind, kann offenbar ihre Vertauschung mit einander keine neue Fläche mehr liefern, es wird also für je zwei Flächen des Hexakisoktaëders nur eine auftreten, d. h. wir erhalten eine aus 24 Flächen bestehende einfache Krystallform. Hierbei sind jedoch zwei Fälle zu unterscheiden: entweder sind die beiden gleichen Parameter grösser als der dritte, oder kleiner. Behandeln wir zunächst den ersten Fall; in diesem ist das Parameterverhältniss, da $m = n$,

$$= a : ma : ma.$$

Die sämmtlichen möglichen Flächen dieser Form in einem Oktanten, z. B. dem rechten oben vorn, werden wir wieder am leichtesten mittelst eines

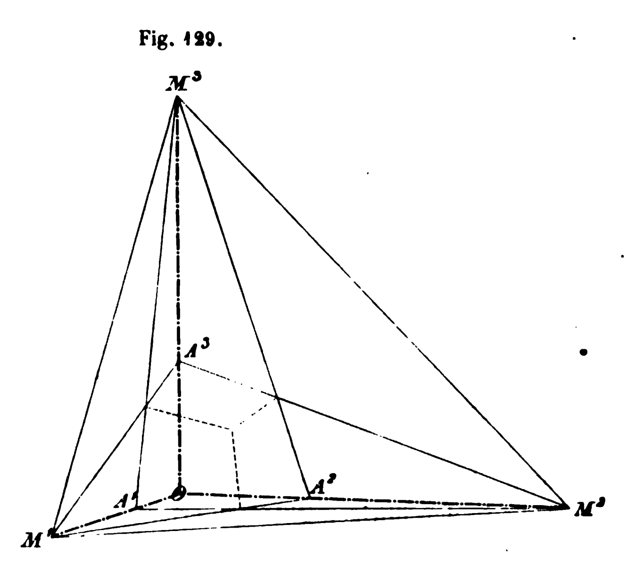
---

*) Diese Zahlen werden, wenn sie einen gemeinsamen Factor besitzen oder gebrochen sind, natürlich auf den einfachsten Ausdruck dreier ganzer Zahlen gebracht.

**) Vielfach bezeichnet man auch mit hkl, ohne Klammer, die einzelne Fläche und mit (hkl) die vollständige Form.

nmodelles finden, wie es Fig. 129, ganz entsprechend der Fig. 127, per-
:tivisch darstellt, in welcher aber nunmehr die Punkte N mit denen M
ımmenfallen. In Folge dessen wird die erste Hauptaxe in A^1 nur von
er Fläche geschnit-
welche die beiden
eren Axen im m-
en (in Fig. 129 ist
= 3) Abstand trifft;
ist dies $A^1M^2M^3$;
:h A^2 geht nur die
he $A^2M^1M^3$ und
:h A^3 nur $A^3M^1M^2$.
können also in die-
Oktanten nur drei
hen der Form, de-
Parameterverhält-
$a : 3a : 3a$ ist, auf-
en, deren Durch-
hnitts-Richtungen
:h die punktirten
en angegeben sind.

Fig. 129.



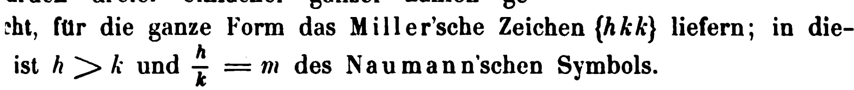
ʒen der Symmetrie nach den drei Haupt-Symmetrieebenen muss in
n acht Oktanten das Gleiche stattfinden, und somit eine Form resultiren,
che in Fig. 130 dargestellt ist und ein **Ikositetraëder** genannt wird.
dem Modell einer solchen Form wird man
chwer die Existenz der neun Symmetrie-
nen constatiren können, von denen die
ıpt-Symmetrieebenen die mit a bezeichneten
ıten, die anderen Symmetrieebenen die mit b
eichneten Kanten halbiren.

Fig. 130.

Das Naumann'sche Zeichen der Ikosite-
der ist mOm. Da das Parameterverhältniss

$$a : ma : ma = \frac{a}{m} : \frac{a}{1} : \frac{a}{1}$$

ind die drei Indices m, 1, 1, welche, auf den
druck dreier einfacher ganzer Zahlen ge-
:ht, für die ganze Form das Miller'sche Zeichen $\{hkk\}$ liefern; in die-



ist $h > k$ und $\frac{h}{k} = m$ des Naumann'schen Symbols.

III. In dem bereits erwähnten Falle, dass zwei Parameter gleich, aber
ner als der dritte sind, ist deren Verhältniss:

$$a : a : ma.$$

Die Lage der möglichen Flächen einer solchen Krystallform, wenn z. B.
= 2 ist, wird in der bisherigen Weise gefunden, wie es Fig. 131 zeigt.
ch den Punkt M^1, dessen Abstand von der Mitte $= 2 \cdot OA^1$ ist, geht

nur eine Fläche, welche die beiden anderen Hauptaxen in gleichen Abständen ($OA^2 = OA^3 = OA^1$) durchschneidet, nämlich $M^1A^2A^3$, durch M^2 die Fläche $M^2A^1A^3$, endlich durch M^3 die Fläche $M^3A^1A^2$. Die punktirten Linien bezeichnen wiederum die Kanten, in denen die drei Flächen des betreffenden

Fig. 131.

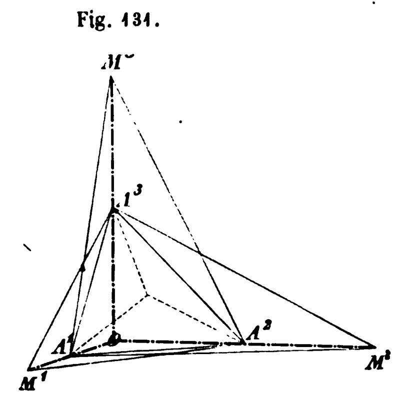
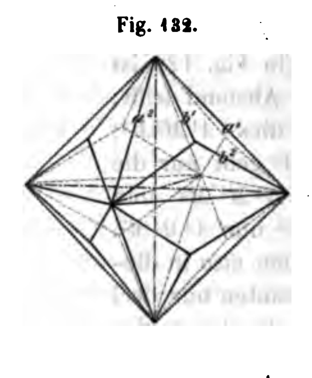


Fig. 132.



Oktanten einander schneiden. Fig. 132 stellt die vollständige Form, ergänzt durch die in den übrigen Oktanten erforderlichen Flächen, dar. Dieselbe wird ein Triakisoktaëder oder Pyramidenoktaëder genannt. Ihre Kanten a sind diejenigen, durch welche die Haupt-Symmetrieebenen, die Kanten b diejenigen, durch welche die andern Symmetrieebenen gehen. Nach Naumann wird eine solche Form mit mO bezeichnet, während ihr Miller'sches Symbol $= \{hhk\}$, in welchem, wie im vorigen Falle, $h > k$ und $\frac{h}{k} = m$.

IV. Für einen dritten besonderen Fall, wenn nämlich m gleich seinem obersten Grenzwerth ∞ ist, während n einen endlichen Werth hat, das Parameterverhältniss also

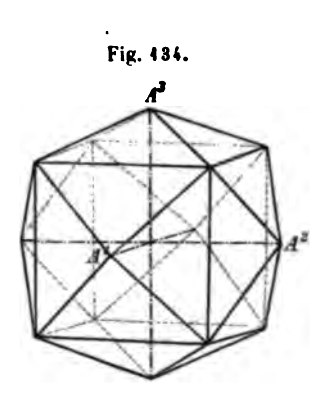
$$= a : na : \infty a,$$

Fig. 133.

entsteht eine vierte besondere Form. Setzen wir z. B. $n = 2$, so ist aus Fig. 133 ersichtlich, dass in einem Oktanten, wie beim Achtundvierzigflächner, sechs Flächen durch die Symmetrie erfordert werden, denn der Hauptaxe OA^1 parallel (sie im Abstand ∞ schneidend) gehen nothwendigerweise zwei Flächen, welche die beiden anderen Hauptaxen, die eine im Verhältniss 1 : 2, die andere in 2 : 1 schneiden; es sind dies die Flächen $A^2N^3M^1_3M^1_4$ und $A^3N^2M^1_1M^1_2$; der Hauptaxe OA^2 parallel gehen: $A^1N^3M^2_3M^2_4$ und $A^3N^1M^2_1M^2_2$; endlich der Hauptaxe OA^3 parallel: $A^1N^2M^3_3M^3_4$ und $A^2N^1M^3_1M^3_2$. Die Durch-

schnittsrichtungen dieser sechs Flächen sind wiederum durch punktirte Gerade angedeutet, von denen natürlich drei den drei Hauptaxen parallel laufen. Gehen wir von diesen sechs Flächen zu den durch die Symmetrie erforderten Flächen der anderen Oktanten über, so liegt auf der Hand, dass je zwei jener sechs mit zwei eines benachbarten Oktanten zusammenfallen müssen, weil sie auf einer Haupt-Symmetrieebene senkrecht stehen, und die Fläche, welche zu einer Symmetrieebene normal ist, in Bezug auf diese nur sich selbst, keiner andern symmetrisch sein kann. Während die so entstehende Form in jedem der acht Oktanten sechs Flächen hat, ist die Gesammtzahl ihrer möglichen Flächen demnach nur 24, wie sie Fig. 134 mit gleicher Ausdehnung zeigt. Diese Form wird ein Tetrakishexaëder oder Pyramidenwürfel genannt. Ihr Naumann'sches Zeichen ist $\infty O n$. Da ihr Parameterverhältniss

Fig. 134.



$$a : na : \infty a = \frac{a}{n} : \frac{a}{1} : \frac{a}{0}$$

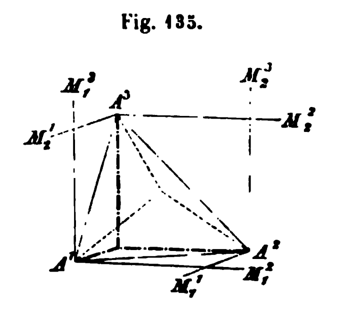
so ist n = dem Verhältniss der beiden ersten Indices $\frac{h}{k}$ und der dritte $= 0$, also das Miller'sche Zeichen $\{hk0\}$.

V. Zu einer weiteren fünften Form führt der Fall, dass in dem Parameterverhältniss zwei derselben gleich, der dritte den Maximalwerth ∞ erreicht. Alsdann ist dieses Verhältniss

$$a : a : \infty a.$$

Während die bisherigen Formen stets Beispiele aus je einer Klasse von Formen waren, deren so viele möglich sind, als rationale Zahlenwerthe für die Coëfficienten m und n denkbar, kann das obige Parameterverhältniss nur einer einzigen Form angehören. Die Flächen derselben schneiden je zwei Axen in gleichem Abstand und sind der dritten parallel, es müssen in einem Oktanten also drei Flächen: $A^1 A^2 M^3_1 M^3_2$, $A^1 A^3 M^2_1 M^2_2$ und $A^2 A^3 M^1_1 M^1_2$ Fig. 135 derselben existiren. Da jede derselben aber einer Hauptaxe parallel, also normal zu einer Haupt-Symmetrieebene ist so muss ihre symmetrische Gegenfläche im anstossenden Oktanten mit ihr identisch sein; statt $3 \times 8 = 24$ kann die ganze Form Fig. 136 also nur 12 Flächen besitzen und heisst deshalb das Dodekaëder (auch Rhombendodekaëder nach der Gestalt ihrer Flächen). Sein Zeichen nach Naumann ist ∞O, und da das Parameterverhältniss

Fig. 135.



$$a : a : \infty a = \frac{a}{1} : \frac{a}{1} : \frac{a}{0},$$

so ist sein Zeichen nach Miller {110}.

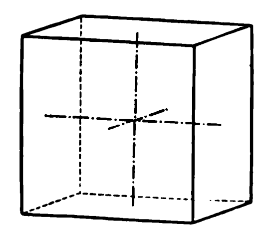
Construiren wir an dem Dodekaëder Fig. 136 ausser den drei Haupt-Symmetrieebenen, welche durch die Hauptaxen unmittelbar gegeben sind, noch die sechs anderen nach der S. 236 gegebenen Definition derselben, so gehen diese durch den Mittelpunkt O und durch folgende Kanten: die 1. durch BD, EG; die 2. durch BC, EF; die 3. durch AC, AG; die 4. durch AD, AF; die 5. durch GH, FJ und die 6. durch DH, CJ. Jeder dieser sechs Symmetrieebenen ist aber ein Flächenpaar des Dodekaëders parallel, weil dieses, wie jene Symmetrieebenen, einer Hauptaxe parallel, die beiden anderen unter 45° schneidet. Die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen des regulären Systems sind demnach die Flächen des Dodekaëders, und es ist leicht, an Modellen der bisher betrachteten Achtundvierzig- und Vierundzwanzigflächner zu constatiren, dass sie nach allen Dodekaëderflächen symmetrisch sind. Das Dodekaëder ist die erste Form, von der wir die Eigenschaft kennen lernen, dass sie nach ihren eigenen Flächen symmetrisch ist.

Fig. 136.

VI. Wir hatten gefunden, dass zwei Fälle zu unterscheiden sind, sobald zwei Parameter gleich und der dritte davon verschieden ist, dass nämlich eine andere Form resultirt, wenn dieser dritte grösser als die beiden anderen, ein anderer, wenn er kleiner ist. Dies muss auch für $m = \infty$ gelten. Das Parameterverhältniss, in welchem zwei Parameter gleich, der dritte $= \infty$, lieferte das Dodekaëder; der entgegengesetzte Fall, dass nämlich zwei Parameter gleich und unendlich gross, der dritte kleiner, also endlich ist, muss daher eine weitere reguläre Krystallform liefern, deren Parameterverhältniss

$$a : \infty a : \infty a.$$

Fig. 137.



Es bedarf keiner Construction, um zu sehen, dass eine Form mit diesem Parameterverhältniss nur aus drei, den drei Haupt-Symmetrieebenen parallelen Flächenpaaren bestehen kann, wie es Fig. 137 zeigt. Die Flächen dieser Form, des Hexaëders oder des Würfels*), liegen so, dass in jeden Oktanten drei fallen, von denen jede eine Hauptaxe in endlichem Abstande von der Mitte schneidet, da sie aber zu zwei Haupt-Symmetrieebenen normal ist, mit ihren symmetrischen Flächen in

*) Nach dem griechischen Namen des Würfels wird das reguläre System auch das tesserale genannt.

den Nachbar-Oktanten zusammenfällt. Man sieht leicht ein, wenn man durch einen Punkt der verticalen Hauptaxe oberhalb der Mitte eine Ebene legt, welche die beiden horizontalen Hauptaxen in unendlichem Abstand schneidet, diese in allen vier oberen Oktanten die gleiche sein muss, nämlich die parallele Ebene zur horizontalen Haupt-Symmetrieebene. Die vollständige Form kann also statt $3 \times 8 = 24$ nur den vierten Theil, d. i. sechs Flächen haben. Diese schneiden einander, da sie den Haupt-Symmetrieebenen parallel sind, unter rechten Winkeln, und aus demselben Grunde ist auch diese Form nach ihren eigenen Flächen symmetrisch. Ihre Zeichen nach Naumann bez. Miller sind $\infty O \infty$ resp. {100}.

VII. Der letzte mögliche specielle Fall ist derjenige, dass alle drei Parameter gleich gross sind. Dieser führt uns zu der Grundform zurück, von der wir ausgingen, und zu welcher in jedem Oktanten nur eine Fläche gehören kann, da die Vertauschung der drei gleichen Parameter keine neue Fläche liefert. Die entstehende Form ist das Oktaëder Fig. 138 mit dem Parameterverhältniss

$$a : a : a.$$

und dem Zeichen $O = \{111\}$.

Fig. 138.

Auch diese Form ist symmetrisch nach den sechs Dodekaëderflächen, deren Durchschnitte mit den ihrigen auf Fig. 138 mit schwächeren Linien eingezeichnet sind. Man sieht daraus unmittelbar, dass jede Oktaëderfläche von drei dodekaëdrischen Symmetrieebenen unter rechten Winkeln geschnitten wird, dass also zwei parallele Oktaëderflächen zu sechs Flächen des Dodekaëders normal stehen.

Die sieben Arten von Formen, welche wir aus den möglichen Fällen des Verhältnisses dreier Parameter auf rechtwinkeligen gleichwerthigen Axen hergeleitet haben, unterscheiden sich in solche, deren nur eine einzige möglich ist (das Oktaëder, das Hexaëder und das Dodekaëder), und solche, deren mehrere mit verschiedenen Ableitungscoëfficienten möglich sind (die Hexakisoktaëder, die Tetrakishexaëder, die Triakisoktaëder und die Ikositetraëder). Von jeder der letzteren vier Arten von Formen sind eigentlich unendlich viele krystallonomisch möglich, da es unendlich viele rationale Zahlen als Werthe der Coëfficienten m und n oder der Indices hkl giebt, von diesen ist aber nur eine beschränkte Zahl mit meist sehr einfachen Zahlenwerthen bisher beobachtet worden.

Das Oktaëder ist die einzige Form, welche unter allen regulären Formen (d. h. denjenigen, die symmetrisch sind zu den drei Würfel- und zu den sechs Dodekaëderflächen) drei gleiche Parameter haben kann, wenn wir die Normalen zu den Hexaëderflächen (die Hauptaxen) zu Axen wählen. In Folge dessen ist das Oktaëder zweier verschiedener, regulär krystallisi-

render Körper krystallographisch vollkommen identisch, d. h. seine Flächen schneiden sich bei beiden unter genau denselben Winkeln. Da aber alle anderen regulären Formen sich durch rationale Vervielfältigung oder als rationale Theile der Parameter des Oktaëders von diesem ableiten, so müssen auch alle Formen eines regulär krystallisirenden Stoffes an den Krystallen eines andern identisch, d. h. mit denselben Winkeln, auftreten können. Wie ebenso auch aus der Identität der Elemente aller regulärer Krystalle (s. S. 237) hervorgeht, können die Krystallformen zweier regulär krystallisirender Körper (abgesehen von etwaiger Hemiëdrie) in rein krystallographischer Hinsicht keine anderen Unterschiede zeigen, als sie die verschiedenen Krystalle eines und desselben Körpers ebenfalls aufweisen, d. h. sie können wohl aus verschiedenen Formen bestehen, welche sich aber durch rationale Coëfficienten resp. rationale Indices von einander ableiten lassen, welche also einer Krystallreihe (s. S. 225) angehören. Alle regulären Krystallformen bilden eine Krystallreihe, und diese ist zugleich diejenige aller regulär krystallisirender Substanzen.

§. 51. **Die Beziehungen der regulären Krystallformen zu einander.** Die Hexakisoktaëder stellen, wie bereits bemerkt, den allgemeinen Fall einer regulären Form dar, von welcher die übrigen sechs nur specielle Fälle sind, in welchen die Coëfficienten m und n besondere Werthe ($m = n$, 1, oder ∞) haben. Je mehr die Zahlenwerthe eines Achtundvierzigflächners sich einem dieser speciellen Fälle nähern, desto ähnlicher muss daher die Gestalt desselben derjenigen sein, welche die den speciellen Fall realisirende Krystallform besitzt. Sind z. B. die Zahlenwerthe m und n eines Hexakisoktaëders nur wenig verschieden (etwa 3 und $\frac{5}{2}$, so müssen die Kanten b Fig. 139 sehr stumpfwinkelig sein, und zwar um so mehr, je geringer jener Unterschied ist; die Form ähnelt alsdann immer mehr einem Ikositetraëder, und fällt vollkommen mit einem solchen zusammen, wenn die Flächen 1 und 2 u. s. f. sich in ihrer Lage nicht mehr unterscheiden, in eine Ebene fallen, d. h. wenn m nicht von n verschieden ist. Das Ikositetraëder mit den Parametern $1 : n : n$ ist alsdann dasjenige Hexakisoktaëder, in welchem m nicht mehr von n verschieden ist, d. h. jedes Ikositetraëder ist das eine Grenzglied einer Reihe von möglichen Achtundvierzigflächnern, der es selbst als specieller Fall angehört. Eine solche, sich immer mehr der Form von $2O2$ nähernde Reihe ist z. B.

$$\ldots, 4O2, \ 3O2, \ \tfrac{5}{2}O2, \ \tfrac{9}{4}O2, \ 2O2.$$

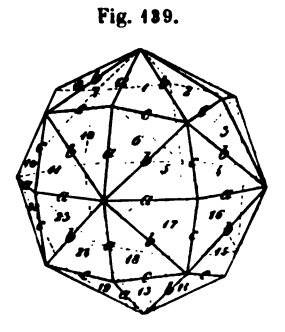
Jede derartige Reihe, innerhalb welcher der Coëfficient n constant bleibt, und nur m variirt, muss nun noch eine Grenze nach der anderen Seite haben, welche einer Form entspricht, der sich die Glieder der Reihe um so mehr nähern, je mehr m von n verschieden ist, d. h. je grösser m wird. Die oberste Grenze, welche der Zahlenwerth dieses Coëfficienten erreichen kann, ist aber $= \infty$, und derjenige Achtundvierzigflächner, dessen $m = \infty$

ist, heisst Tetrakishexaëder. Die vorhin beispielsweise gewählte Reihe, nach der anderen Seite fortgesetzt:

$$\infty O 2, \ldots 16 O 2, 8 O 2, 4 O 2 \ldots$$

enthält Hexakisoktaëder, deren Gestalt um so ähnlicher der Grenzform $\infty O 2$ ist, je grösser m ist; um so stumpfwinkeliger sind alsdann die Kanten a, Fig. 139. Für $m = \infty$ wird der Winkel derselben $= 0$, d. h. die Flächen 1 und 7, 6 und 12 u. s. w. fallen in eine Ebene. Danach haben wir auch jeden Pyramidenwürfel als einen Achtundvierzigflächner zu betrachten, und zwar als Grenzform einer Reihe von Hexakisoktaëdern, welche sämmtlich denselben Coëfficienten n haben und deren zweite Grenzform dasjenige Ikositetraëder ist, dessen m demselben Zahlenwerth gleich ist. Da in allen Formen einer derartigen Reihe, incl. der beiden Grenzformen, zwei Hauptaxen in dem constanten Verhältniss $1 : n$ geschnitten werden, so sind die Flächen aller Formen jener Reihe parallel Geraden, welche zwei jener Axen in demselben Verhältniss schneiden, d. h. die entsprechenden Flächen aller derselben liegen in einer Zone*). Demnach liegt eine beliebige Fläche irgend eines der Hexakisoktaëder einer bestimmten Reihe stets mit parallelen Kanten zwischen je einer Fläche der beiden Grenzformen derselben Reihe; also ist auch die Lage der Flächen aller einer Reihe angehöriger Achtundvierzigflächner eine zwischen inneliegende zwischen denjenigen des Pyramidenwürfels und des Ikositetraëders, welche die Grenzformen der Reihe bilden.

Fig. 139.



Ist in dem Parameterverhältniss eines Hexakisoktaëders der kleinere Coëfficient n nur wenig von 1 verschieden, z. B. $\frac{5}{4}$, so können sich die Flächen 1 und 6 Fig. 139, ebenso 7 und 12 u. s. f. nur wenig in ihrer Richtung unterscheiden, d. h. die Kanten c müssen sehr stumpfwinkelig sein. Die Form ähnelt alsdann einem Pyramidenoktaëder, und zwar um so mehr, je weniger n grösser als 1 ist. Das Triakisoktaëder mit demselben m endlich ist derjenige Achtundvierzigflächner, dessen $n = 1$ ist. So giebt es denn wieder eine Reihe von möglichen Hexakisoktaëdern, deren m gleich ist, deren n dagegen variirt; die untere Grenzform bildet das Triakisoktaëder $(1 : 1 : m)$, in welchem n seinen kleinsten Werth hat; die obere Grenze der Reihe bildet das Ikositetraëder $(1 : m : m)$, in welchem n, da es der kleinere Coëfficient ist, seinen grösstmöglichen Werth erreicht. Die entsprechenden Flächen einer solchen Reihe bilden ebenfalls eine Zone, zu deren Flächen auch die der beiden Grenzformen, zwischen denen die übrigen liegen, gehören, da sie sämmtlich einer Geraden parallel sind, welche zwei Hauptaxen in dem für diese Reihe constanten Verhältniss $1 : m$ schneidet.

*) Wie auch leicht durch Einsetzen ihrer Indices in die Bedingungsgleichung der Tautozonalität bewiesen werden kann.

Endlich kann auch eine ganze Reihe von möglichen Achtundvierzigflächnern mit parallelen Kanten liegen zwischen den Flächen eines beliebigen Tetrakishexaëders und eines Pyramidenoktaëders; aus den Indices der beiden Grenzformen einer solchen Reihe ergiebt sich in bekannter Weise (s. S. 205) die Bedingungsgleichung, welcher die Indices der Hexakisoktaëder genügen müssen, um mit parallelen Kanten zwischen jenen beiden Grenzformen zu liegen.

Daraus ergiebt sich, dass jedes Hexakisoktaëder ein Glied dreier verschiedener Ableitungsreihen ist, 1) einer solchen, deren Endglieder ein Ikositetraëder und ein Pyramidenwürfel sind; 2) einer von einem Triakisoktaëder und einem Ikositetraëder begrenzten; 3) von einer Reihe, deren Grenzformen ein Pyramidenwürfel und ein Triakisoktaëder sind. So bilden die drei Vierundzwanzigflächner die Grenzformen für alle Achtundvierzigflächner, deren Flächen sämmtlich zwischen den Grenzen liegen, welche durch die Flächen jener bestimmt sind. Dieser drei Grenzformen giebt es aber ebenfalls eine beliebige Zahl möglicher Einzelfälle, welche unter einander selbst wieder eine Ableitungsreihe mit bestimmten Grenzformen bilden.

Betrachten wir zunächst die Ikositetraëder ($1 : m : m$), welche sich durch den bestimmten Zahlenwerth von m von einander unterscheiden, so ist klar, dass die vierkantige Ecke, in welcher die Kanten a Fig. 140 zusammenstossen, um so stumpfwinkeliger wird, je grösser m ist; mit steigendem Zahlenwerth dieses Coëfficienten nähern sich die vier, eine solche Ecke bildenden, Flächen in ihrer Lage einander immer mehr. Wenn m seinen

Fig. 140.

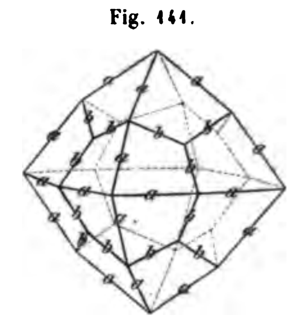


Fig. 141.

höchstmöglichen Werth ∞ erreicht, so fallen jene vier Flächen in eine Ebene, welche der einen Haupt-Symmetrieebene parallel ist, folglich einer Würfelfläche entspricht. Das Hexaëder, d. h. dasjenige Ikositetraëder, dessen $m = \infty$ ist, bildet somit nach einer Seite hin die Grenzform der sämmtlichen Ikositetraëder. Je kleiner dagegen m ist, desto spitzer erscheinen die vierkantigen Ecken dieser Formen, desto stumpfwinkeliger dagegen die Kanten b Fig. 141 $= \frac{4}{3}O\frac{4}{3}$ {433}, welche die dreikantigen Ecken bilden. Bei einem bestimmten Werthe von m, wenn dies nämlich $= 1$ ist, wird der Winkel der letzteren Kanten Null, d. h. die drei in einem Oktanten liegenden Flächen dieses Ikositetraëders unterscheiden sich in ihrer Lage nicht

mehr von einander; wir nennen es dann Oktaëder und haben in demselben die andere Grenzform der Reihe aller Ikositetraëder gefunden. Da die Flächen aller Glieder dieser Reihe zwei Hauptaxen in gleichem Abstande schneiden, so müssen die einander entsprechenden Flächen sämmtlich einer Geraden parallel sein, welche zwei Axen in demselben Verhältniss schneidet, sie müssen also sämmtlich einer Zone angehören, welche durch die beiden Endglieder der Reihe, durch die Würfel- und die Oktaëderfläche bestimmt ist. Alle Ikositetraëder liegen mit parallelen Kanten zwischen Hexaëder und Oktaëder.

Gehen wir über zu der Betrachtung der Triakisoktaëder, deren Parameterverhältniss $1 : 1 : m$, so ist klar, dass dieselben eine Reihe bilden, deren untere Grenze das Oktaëder ist, d. h. dasjenige Triakisoktaëder, dessen m den kleinstmöglichen Werth 1 hat, weshalb sich die drei in einem Oktanten liegenden Flächen desselben in ihrer Lage nicht von einander unterscheiden. Je grösser der Zahlenwerth von m ist, desto stumpfwinkeliger werden die Kanten, welche denen des Oktaëders parallel laufen, und für $m = \infty$ werden ihre Winkel $= 0$, d. h. die beiden in einer Oktaëderkante zusammenstossenden Flächen fallen in eine Ebene, welche einer Dodekaëderfläche entspricht. Das Oktaëder und das Rhombendodekaëder sind die beiden Grenzformen der Reihe der Pyramidenoktaëder; die Flächen der letzteren liegen sämmtlich mit parallelen Kanten zwischen je einer Oktaëder- und einer Dodekaëderfläche.

Die dritte Klasse von Vierundzwanzigflächnern, die Tetrakishexaëder, mit dem Parameterverhältniss $1 : n : \infty$, bilden ebenfalls eine einzige Ableitungsreihe, deren Anfangsglied das Dodekaëder ist, d. h. derjenige Pyramidenwürfel, dessen $n = 1$, bei welchem sich also je zwei, in einer Hexaëderkante zusammenstossende Flächen in ihrer Lage nicht mehr unterscheiden. Das Endglied der Reihe ist offenbar der Würfel, derjenige Pyramidenwürfel, dessen $n = \infty$, bei welchem folglich je vier in einer vierkantigen Ecke sich schneidende Flächen in eine Ebene fallen. Je grösser n, desto ähnlicher muss die Form dem Hexaëder werden. Da die Flächen aller Pyramidenwürfel einer Hauptaxe, d. i. einer Würfelkante, parallel sind, so liegen sie stets in der Zone zweier Würfelflächen; in dieselbe fällt auch die Dodekaëderfläche, also liegen die Flächen aller Tetrakishexaëder mit parallelen Kanten zwischen je einer Hexaëder- und einer Dodekaëderfläche.

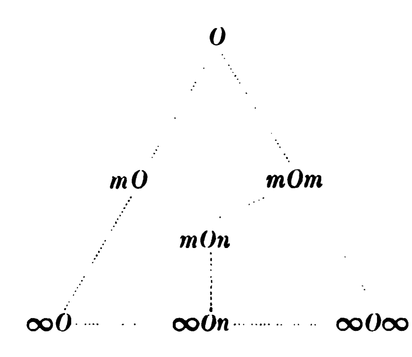
Das Rhombendodekaëder haben wir soeben betrachten gelernt als dasjenige Triakisoktaëder, dessen $m = \infty$, oder als denjenigen Pyramidenwürfel, dessen $n = 1$ ist. Da diese beiden Vierundzwanzigflächner selbst aber nur Grenzglieder der verschiedenen Reihen von Achtundvierzigflächnern sind, so können wir nunmehr das Rhombendodekaëder bezeichnen als denjenigen speciellen Fall der Hexakisoktaëder, in welchem $m = \infty$ und $n = 1$ ist, und es ist klar, dass es nur einen einzigen Achtundvierzigflächner mit diesem Parameterverhältniss geben kann. Es ist derjenige, bei welchem je 4 Flächen, z. B. 1, 6, 7, 12 Fig. 142, in eine Ebene fallen.

Das Hexaëder ergab sich aus obigen Betrachtungen als dasjenige Ikositetraëder, dessen $m = \infty$, sowie auch als der Pyramidenwürfel, dessen n denselben Werth hat; wir können es folglich auch auffassen als denjenigen Achtundvierzigflächner, dessen m und n beide den höchstmöglichen Werth ∞ haben, und bei welchem sich je 8 Flächen, z. B. 5, 6, 11, 12, 17, 18, 23, 24 Fig. 142, in ihrer Lage nicht mehr unterscheiden.

Fig. 142.

Endlich ist das Oktaëder dasjenige Ikositetraëder, dessen $m = 1$, oder dasjenige Triakisoktaëder, dessen m denselben kleinsten Werth hat, es ist also auch dasjenige Hexakisoktaëder, bei welchem m und $n = 1$, folglich die sechs in einen Oktanten fallenden Flächen sämmtlich einander parallel sind und somit nur eine einzige Fläche bilden.

Den Zusammenhang aller Ableitungsreihen ersieht man am leichtesten durch das folgende Schema, in welchem ausser den Endgliedern nur noch das allgemeine Glied jeder Reihe aufgeführt ist, und alle durch Linien verbundene Zeichen eine Ableitungsreihe bilden:



Wir gelangen somit zu der Vorstellung, dass es im regulären System eigentlich nur eine Art holoëdrischer Formen giebt, welche im Allgemeinen 48 Flächen besitzen, von denen aber bei besonderen Zahlenwerthen der Parametercoëfficienten je 2, 4, 6 oder 8 parallel werden können, und somit Formen mit 24, 12, 8 oder 6 Flächen entstehen. Diese letzteren müssen, da sie ja nur specielle Fälle der Hexakisoktaëder sind, allen denselben krystallographischen Gesetzen unterworfen sein, wie jene. Dieser Umstand ist von besonderer Wichtigkeit für das Gesetz der Hemiëdrie. Es ist bereits in §. 47 bei der allgemeinen Besprechung derselben erwähnt worden, dass erfahrungsgemäss ein Körper, welcher hemiëdrisch krystallisirt, nur eine bestimmte Art der Hemiëdrie zeigt und niemals andere Formen, als hemiëdrische, welche jener Art von Hemiëdrie entsprechen. Nach Obigem muss es genügen, die Art der Hemiëdrie an den Achtundvierzigflächnern eines regulären Krystalls zu bestimmen, um die resultirenden Formen aus den übrigen sechs Gestalten zu kennen. Da diese letzteren nur specielle Fälle der Hexakisoktaëder sind, so muss für sie ganz das Gleiche gelten; sind diese an einem Körper nach einem bestimmten Gesetze hemiëdrisch, so müssen es auch die übrigen Formen, und zwar nach demselben Gesetze, sein.

§. 52. **Beschreibung der regulären Krystallformen und ihrer Combinationen.** Im Folgenden sind nun für sämmtliche holoëdrische reguläre Formen, von den einfachsten ausgehend, ihre näheren geometrischen Eigenschaften und die Art und Weise angegeben, wie sie in Combinationen zusammen auftreten.

1) Das Oktaëder $\{111\} = O$ (Fig. 143), dessen Kanten Winkel von $70^0\ 31',8$ bilden, hat bei gleicher Centraldistanz der Flächen 12 Kanten, von denen je vier in einer Haupt-Symmetrieebene liegen, während je zwei parallele jedesmal einer der sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen parallel gehen. Die sechs Ecken des Oktaëders werden, da in denselben vier gleiche, d. h. gleichwinkelige, Kanten zusammenstossen, als vierkantige bezeichnet.

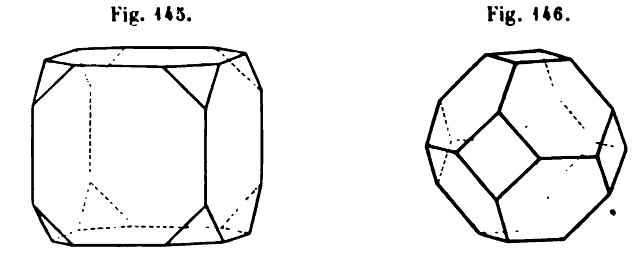
Fig. 143.

Fig. 144.

2) Das Hexaëder oder der Würfel, $\{100\} = \infty O \infty$, Fig. 144, dessen Flächen den Haupt-Symmetrieebenen parallel sind und daher einander unter 90^0 schneiden, besitzt 12 Kanten, welche zu acht dreikantigen Ecken zusammenstossen. Die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen halbiren je einen Kantenwinkel.

Bringt man die Symmetrieebenen des Würfels und des Oktaëders zur Deckung, so erscheint, je nach der Centraldistanz der Flächen der einen und der anderen Form, das Oktaëder als gerade Abstumpfung*)

Fig. 145. Fig. 146.



der Ecken des Würfels, Fig. 145, oder das Hexaëder als gerade Abstumpfung der Ecken des Oktaëders, Fig. 146. Wie aus diesen beiden Figuren her-

*) Eine gerade Abstumpfung einer Ecke oder Kante ist: das Auftreten einer Fläche statt derselben, welche mit allen die Ecke oder Kante bildenden Krystallflächen gleiche Winkel einschliesst.

vorgeht, liegt jede Würfelfläche in zwei Zonen, deren jede durch zwei Oktaëderflächen bestimmt ist. Leitet man nach §. 41 die beiden Zonensymbole ab, so ergiebt sich in der That daraus das Symbol der Würfelfläche *).

3) Das Dodekaëder, $\{110\} = \infty O$, Fig. 147, hat die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen zu Flächen. Je zwei benachbarte Flächen desselben bilden 60°, je zwei an einer vierkantigen Ecke gegenüber liegende bilden 90° mit einander. Von den vierkantigen Ecken liegen je vier in einer Haupt-Symmetrieebene, welche die Flächen in der Richtung ihrer grösseren Diagonale durchschneidet. Ausser den sechs vierkantigen Ecken besitzt das Dodekaëder noch acht dreikantige, deren jede genau symmetrisch in der Mitte eines Oktanten liegt. Von den 24 Kanten sind je sechs einander parallel, so dass je sechs Flächen eine Zone bilden, wie sich aus der Bedingung der Tautozonalität, §. 41, leicht beweisen lässt; solcher Zonen existiren also vier. Jede Dodekaëderfläche liegt in zwei dieser Zonen.

Fig. 147.

Das Oktaëder muss wegen der erwähnten Lage der dreikantigen Ecken diese gerade abstumpfen Fig. 148, und da zwei benachbarte Oktaëderflächen mit der zwischenliegenden Dodekaëderfläche parallele Kanten bilden (alle drei schneiden dieselben beiden Hauptaxen in gleichem Abstand), so muss das Dodekaëder die Kanten des Oktaëders gerade abstumpfen, Fig. 149.

Fig. 148.

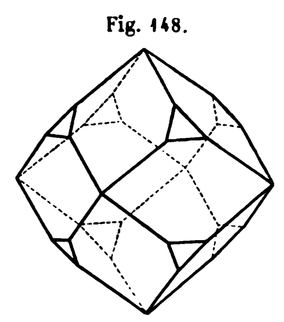
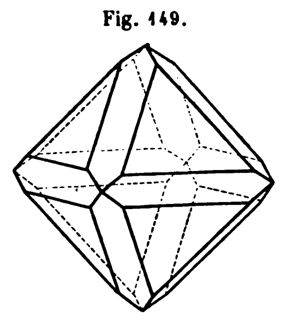


Fig. 149.



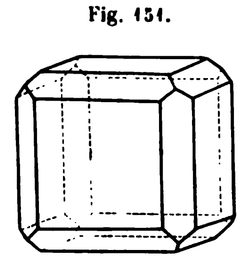
Nach der obigen Angabe der Lage der drei Haupt-Symmetrieebenen müssen die Würfelflächen die vierkantigen Ecken des Dodekaëders gerade abstumpfen, Fig. 150, d. h. jede derselben muss in zwei Zonen liegen, welche durch je zwei an einer vierkantigen Ecke gegenüber liegende Dodekaëderflächen gegeben sind, wie sich leicht aus den Indices ergiebt. Da die Combina-

*) Der Anfänger möge zur Uebung diese Ableitung im vorliegenden und in den folgenden Fällen ausführen.

tionskanten zweier Hexaëderflächen mit einer und derselben Dodekaëderebene parallel sind, so stumpft das Dodekaëder die Kanten des Würfels gerade ab, Fig. 151.

Fig. 150.

Fig. 151.



4) Die **Ikositetraëder**, $\{hkk\} = mOm$, besitzen zweierlei Kanten: 1) 24, zu je 4 in sechs vierkantigen Ecken zusammenstossende, sämmtlich in den Haupt-Symmetrieebenen liegend; deren Winkel ist um so stumpfer, je grösser $\frac{h}{k} = m$ ist; er beträgt z. B.

für $\{211\} = 2O2$ (Fig. 152) $= 48^\circ 11'$
für $\{311\} = 3O3$ (Fig. 153) $= 35^\circ\ 6'$.

Fig. 152.

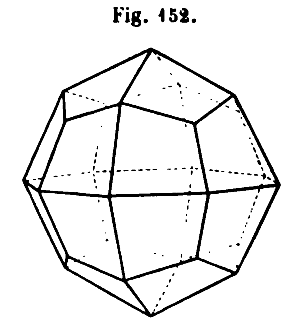
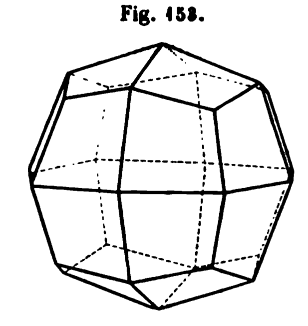


Fig. 153.



2) 24 andere, deren je 3 in einem Oktanten zu einer dreikantigen Ecke zusammenstossen, und deren Winkel um so weniger stumpf ist, je grösser $\frac{h}{k} = m$. Er beträgt z. B.

für $\{211\} = 2O2 = 33^\circ 33'$
für $\{311\} = 3O3 = 50^\circ 29'$.

Die Ecken, in denen je zwei Kanten der ersten und zwei der zweiten Art zusammentreffen, nennt man 2 + 2 kantige (**zweiundzweikantige**).

Die beiden angeführten Formen $\{211\}$ und $\{311\}$ sind die am häufigsten vorkommenden Ikositetraëder.

In Combination mit dem Oktaëder erscheint ein Ikositetraëder als **vierflächige Zuspitzung***) der Ecken desselben, wobei die Zuspitzungs-

*) Eine **Zuspitzung** ist das Eintreten einer Ecke für eine andere, wobei natürlich die neue Ecke die stumpfere ist, so dass es eigentlich »Zustumpfung« heissen

flächen auf die Flächen des Oktaëders so aufgesetzt sind, dass die Combinationskanten beider mit einer dieselbe Oktaëderfläche begrenzenden Oktaëderkante parallel sind. Fig. 154 stellt die Combination {111} {211} dar. Umgekehrt stumpft das Oktaëder die dreikantigen Ecken jedes Ikositetraëders ab, Fig. 155.

Fig. 154.

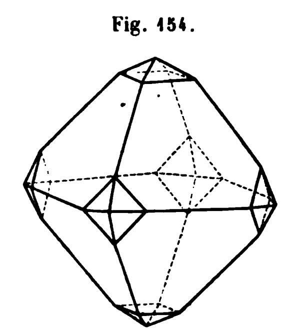
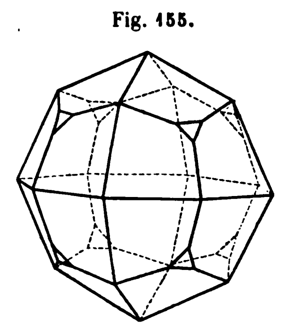


Fig. 155.



An dem Hexaëder tritt ein Ikositetraëder als dreiflächige Zuspitzung der Ecken auf, Fig. 156, wobei die Zuspitzungsflächen auf die Flächen des Würfels aufgesetzt sind, so dass die beiden Würfelkanten (= 2 Axen) in gleichem Abstande geschnitten werden, die Combinationskante also der Diagonale der Würfelfläche parallel läuft. Dieselbe Richtung hat aber auch

Fig. 156.

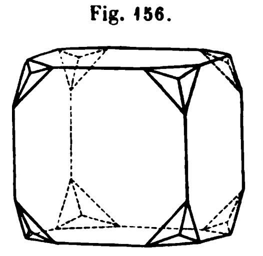


Fig. 157.

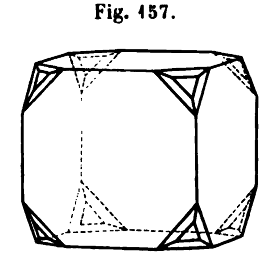
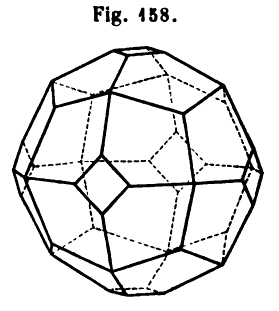


Fig. 158.



die Combinationskante derselben Hexaëderfläche mit der geraden Abstumpfung der gleichen Ecke, d. i. die Kante (100) : (111), folglich liegt die Fläche eines Ikositetraëders stets in einer Zone mit einer Oktaëder- und einer Würfelfläche, sie stumpft die Combinationskante beider ab, s. Fig. 157. Das Hexaëder stumpft die vierkantigen Ecken der Ikositetraëder gerade ab, Fig. 158.

Die Combinationen der verschiedenen Ikositetraëder mit dem Rhombendodekaëder haben ein verschiedenes Ansehen, je nach den Indices der

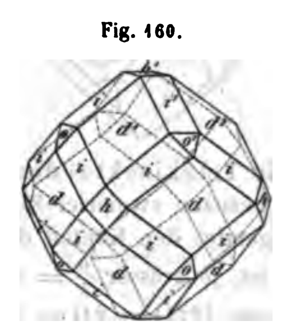
---

müsste; je nachdem die neue Ecke von 3, 4, ... Flächen gebildet wird, heisst die Zuspitzung drei-, vierflächig u. s. w.

ersteren Form. Die Fig. 159 stellt z. B. das Dodekaëder mit der geraden Abstumpfung aller seiner 24 Kanten dar, d. h. mit einer Form, welche zu der Klasse der Ikositetraëder gehören muss, da jede ihrer Flächen gleiche Neigung gegen zwei Dodekaëderflächen, also auch gegen die beiden Hauptaxen, denen jene parallel laufen, hat, folglich diese beiden in gleichem Abstande schneidet. Es liegt deshalb auch jede solche Abstumpfungsfläche in der Zone einer Hexaëder- und einer Oktaëderfläche, wie aus Fig. 160

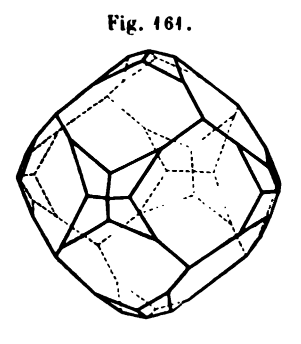
Fig. 159.

Fig. 160.



hervorgeht, in welcher $d = \{110\}$, $h = \{100\}$, $o = \{111\}$ und i das Ikositetraëder bedeutet. Da die mit i^1 bezeichnete Fläche in zwei Zonen des Krystalls liegt, so sind auch ihre Indices rational, sie selbst krystallonomisch möglich. Die Indices der Flächen d^1 und d^2 sind (101) und (011), das Symbol ihrer Zone somit $[\bar{1}\bar{1}1]$; die Indices von h^1 und o^1: (001) und (111), das Symbol ihrer Zone folglich $[\bar{1}10]$; die in beiden Zonen liegende Fläche hat demnach das Zeichen $(\bar{1}\bar{1}\bar{2})$; dieses bezeichnet aber die Parallelfläche von (112), die selbstverständlich auch in denselben beiden Zonen liegt. Das Ikositetraëder i, welches die Dodekaëderkanten gerade abstumpft, hat demnach das Zeichen $\{211\} = 2O2$; es ist unter allen Ikositetraëdern das häufigste und dasjenige mit dem einfachsten Parameterverhältniss. Ein Ikositetraëder, dessen $\frac{h}{k} = m > 2$, hat, der Fläche i^1 entsprechend, eine solche, deren Neigung gegen die Horizontalebene eine geringere ist, als bei i^1, welche also mit d^1 und d^2 Kanten bildet, die nach unten convergiren. Eine solche Form, z. B. $\{311\} = 3O3$ in Fig. 161, bildet eine vierflächige Zuspitzung der vierkantigen Ecken des Dodekaëders, die Zuspitzungsflächen auf die Dodekaëderkanten aufgesetzt. Ist endlich $\frac{h}{k} = m < 2$, z. B. $\frac{3}{2}$, so bildet dieses Ikositetraëder, $\{322\} = \frac{3}{2}O\frac{3}{2}$, eine dreiflächige Zuspitzung der dreikantigen Ecken des Dodekaëders, die Zuspitzungsflächen auf dessen Kanten aufgesetzt, wie es Fig. 162 zeigt, weil die der Fläche i^1 (in Fig. 160) entsprechende nun-

Fig. 161.



mehr eine steilere Lage hat, als die Kante $d^1 : d^2$, also mit diesen beiden Flächen nach oben convergirende Kanten bilden muss.

Fig. 162.

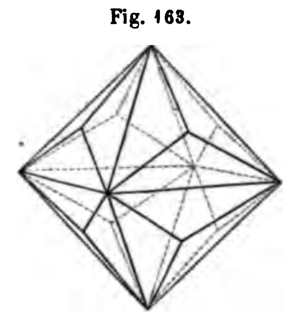


Fig. 163.

5) Die Triakisoktaëder oder Pyramidenoktaëder, $\{hhk\} = mO$, Fig. 163, besitzen zweierlei Kanten: 1) 12 zu je 4 in einer Haupt-Symme-ebene liegende, den Kanten des Oktaëders parallele, deren Winkel um so stumpfer ist, je grösser $\frac{h}{k} = m$; er beträgt für die häufigste Form (Fig. 163) dieser Klasse $\{221\} = 2O = 38^0 57'$;

2) 24 andere, von denen je 3 in einem Oktanten zu einer dreikantigen Ecke zusammenstossen, und deren Winkel um so weniger stumpf ist, je grösser $\frac{h}{k} = m$. Er beträgt

$$\text{für } \{221\} = 2O = 27^0 16'.$$

Die Ecken, in denen vier Kanten der ersten mit vier der zweiten Art zusammenstossen, heissen vierundvierkantige.

Da die Triakisoktaëderflächen zu je zwei sich in einer Kante schneiden, welche die Richtung einer Oktaëderkante hat, so müssen sie in Combination mit dem Oktaëder als eine Zuschärfung*) der Kanten desselben erscheinen, Fig. 164, während umgekehrt das Oktaëder die dreikantigen

Fig. 164.

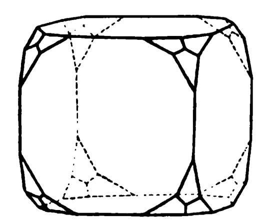


Fig. 165.

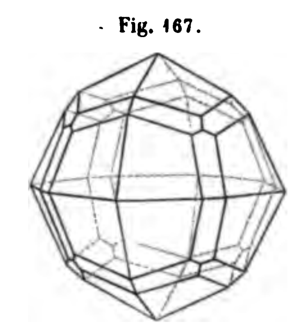
Ecken der Pyramidenoktaëder gerade abstumpft. Am Hexaëder treten diese Formen als dreiflächige Zuspitzung der Ecken auf, Fig. 165, wobei die Zu-

*) Unter einer Zuschärfung einer Kante versteht man das Auftreten einer ihr parallelen Kante, welche von zwei, natürlich einander unter stumpferem Winkel schneidenden Kanten gebildet wird, so dass es eigentlich »Zustumpfung« heissen müsste. Auch eine Ecke wird als zugeschärft bezeichnet, wenn statt derselben eine Kante erscheint.

spitzungsflächen auf die Kanten des Würfels aufgesetzt sind. Das Hexaëder stumpft die vierundvierkantigen Ecken der Pyramidenoktaëder gerade ab. An dem Dodekaëder erscheinen diese Formen als dreiflächige Zuspitzungen der dreikantigen Ecken, die Zuspitzungsflächen so auf die Dodekaëderflächen aufgesetzt, dass jede dieser letzteren in der Zone zweier Triakisoktaëderflächen liegt, wie Fig. 166 zeigt. Es ist also das Dodekaëder die gerade Abstumpfung der 12 Kanten erster Art an dem Pyramidenoktaëder.

Fig. 166.

Fig. 167.

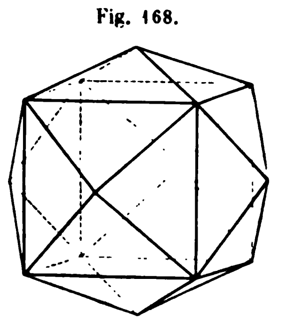


Die Combinationen einer solchen Form mit einem Ikositetraëder haben natürlich ein ganz verschiedenes Aussehen, je nach dem speciellen Werthe der Coëfficienten *m*. So ist z. B. die gerade Abstumpfung aller 24 Kanten der zweiten Art bei einem Ikositetraëder ein Pyramidenoktaëder, wie aus Fig. 167 zu ersehen ist. Da eine solche Fläche nicht nur in der Zone zweier Ebenen des betreffenden Ikositetraëders, sondern auch in derjenigen einer Oktaëder- und einer Dodekaëderfläche liegt, so ist sie durch die Indices des Ikositetraëders bestimmt und nach bekannter Methode zu berechnen: so findet man z. B., dass die gerade Abstumpfung jener Kanten an dem Ikositetraëder $\{211\} = 2O2$, das Pyramidenoktaëder $\{332\} = \frac{3}{2}O$ ist.

6) Die Tetrakishexaëder oder Pyramidenwürfel, $\{hk0\} = \infty On$, haben ebenfalls zweierlei Kanten: 1) 12 denjenigen des Hexaëders parallele, deren Winkel um so stumpfer ist, je kleiner $\frac{h}{k} = n$, d. h. je weniger es sich von 1 unterscheidet. Derselbe beträgt für die häufigste Form dieser Art (Fig. 168)

$$\{210\} = \infty O2 = 36^0\ 52',2.$$

Fig. 168.



2) 24, zu je 4 in einer vierkantigen Ecke zusammenstossend, gleichsam eine auf jede Würfelfläche aufgesetzte vierseitige Pyramide bildend. Der Winkel dieser ist um so stumpfer, je grösser $\frac{h}{k} = n$ ist, und beträgt

$$\text{für } \{210\} = \infty O2 = 36^0\ 52',2.$$

Für diesen einzigen Pyramidenwürfel sind demnach beide Kantenwinkel gleich gross, so dass je drei Kanten der ersten mit dreien der zweiten Art

in einer sechskantigen Ecke zusammentreffen, während die entsprechenden Ecken bei allen anderen Pyramidenwürfeln dreiunddreikantige sind.

In Combination mit dem Oktaëder müssen die Tetrakishexaëder als vierflächige Zuspitzung der Ecken jenes erscheinen, die Zuspitzungsflächen auf die Oktaëderkanten aufgesetzt, Fig. 169. Umgekehrt stumpft das Oktaëder die dreiunddreikantigen Ecken der Pyramidenwürfel gerade ab. Die letzteren Formen bilden ferner eine Zuschärfung der Kanten des Hexaëders, Fig. 170, während dieses die vierkantigen Ecken der Pyramidenwürfel gerade abstumpft. In der Zone zweier Hexaëderflächen und derjenigen eines Pyramidenwürfels, welche die Kante jener zuschärfen, liegt auch die Dodekaëderfläche, welche dieselbe Würfelkante abstumpft, folglich bildet das

Fig. 169.

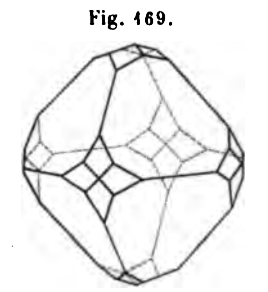


Fig. 170.

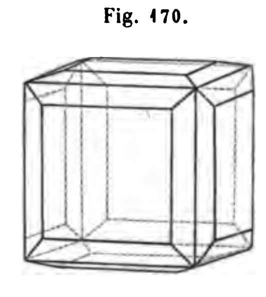
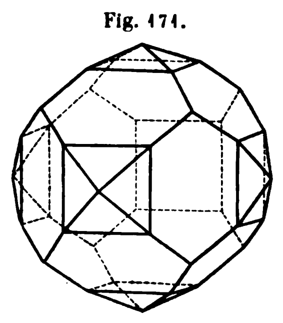


Fig. 171.



Rhombendodekaëder die Abstumpfung aller Kanten erster Art an den Tetrakishexaëdern, und diese spitzen die vierkantigen Ecken des Dodekaëders derart zu, dass die Zuspitzungsflächen auf dessen Flächen gerade aufgesetzt erscheinen, Fig. 171. Was die Combinationen der Pyramidenwürfel mit den Ikositetraëdern und Triakisoktaëdern betrifft, so sind dieselben sehr mannigfaltige, je nach den bestimmten Werthen der Indices der einen und der anderen Form. So ist z. B. leicht einzusehen, dass die gerade Abstumpfung aller in den Haupt-Symmetrieebenen liegender Kanten des Ikositetraëders $\{211\}$ den Pyramidenwürfel $\{210\}$ liefert u. s. f.

7) Die Hexakisoktaëder oder Achtundvierzigflächner, $\{hkl\} = mOn$, von denen in Fig. 172 und 173 die beiden häufigsten,

Fig. 172.

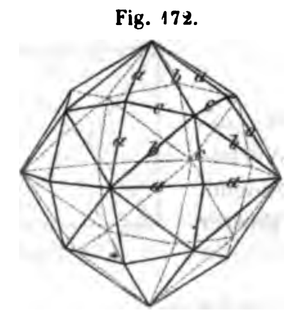
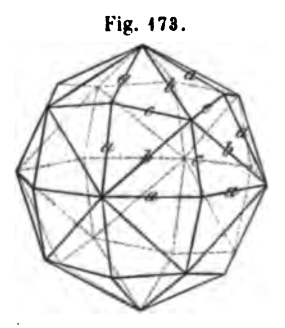


Fig. 173.



$\{321\} = 3O\frac{3}{2}$ und $\{421\} = 4O2$, abgebildet sind, besitzen dreierlei Kanten, deren Winkel im Allgemeinen verschieden sind: 1) 24 mit a bezeichnete,

sämmtlich in den Haupt-Symmetrieebenen gelegen; 2) 24 längere *b* und 3) 24 kürzere *c*, in den Dodekaëderebenen liegende Kanten. Diejenigen, welche in Figg. 172 und 173 mit *a* und *b* bezeichnet sind, bilden sechs vierundvierkantige Ecken; die Kanten *a* und *c* zwölf zweiundzweikantige, endlich *b* und *c* acht dreiunddreikantige Ecken. Die Winkel dieser Kanten sind für die beiden angeführten Hexakisoktaëder:

	a	*b*	*c*
für $\{321\} = 3O\frac{3}{2}$: =	31° 0′	21° 47′	21° 47′
für $\{421\} = 4O2$: =	25 13	17 45	35 57.

In Combination mit dem Oktaëder bildet jeder Achtundvierzigflächner eine achtflächige Zuspitzung der Oktaëderecken, Fig. 174, während letztere Form die dreiunddreikantigen Ecken der ersteren gerade abstumpft. An dem Hexaëder treten die Hexakisoktaëder als sechsflächige Zuspitzungen der Ecken auf, Fig. 175, während der erstere die vierundvierkantigen Ecken der letzteren gerade abstumpft. Die Combinationen der Achtundvierzigflächner mit dem Rhombendodekaëder sind verschieden, je nach den

Fig. 174.

Fig. 175.

Fig. 176.

Werthen der Indices. Es giebt eine bestimmte Klasse unter denselben, deren Kanten *b*, Fig. 172, genau den Kanten des Dodekaëders parallel sind; ein solcher erscheint also als Zuschärfung der Dodekaëderkanten, Fig. 176. Das Verhältniss, in welchem hierbei die Indices stehen müssen, ist leicht zu finden: Aus der S. 205 entwickelten Bedingungsgleichung für die Lage einer Fläche in der Zone zweier anderer ergiebt sich für diesen Fall, da das Symbol der Zone zweier Dodekaëderflächen (101) (110) = $[\bar{1}11]$ ist,

$$h = k + l$$

als die Bedingung, welcher die drei Indices eines Hexakisoktaëders genügen müssen, damit eine Fläche desselben in die Zone zweier Dodekaëderflächen falle. Setzt man für diese Werthe die auf die Coëfficienten *m* und *n* bezogenen (s. S. 240) ein, so wird diese Bedingung:

$$mn = m + n$$

d. i.

$$n = \frac{m}{m-1}.$$

Das in Fig. 176 in Combination mit dem Dodekaëder dargestellte Hexakisoktaëder ist $\{321\} = 3O\frac{3}{2}$, das einfachste, welches dieser Bedingung genügt.

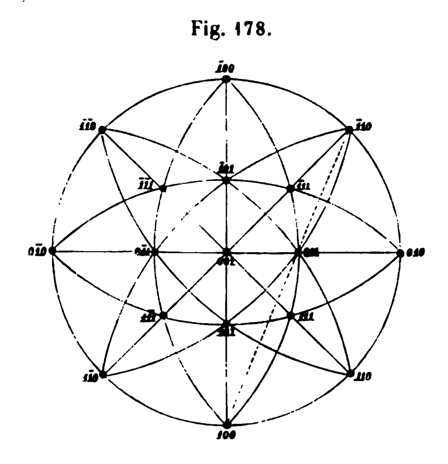
Da die Achtundvierzigflächner dieser Klasse die Kanten des Dodekaëders besitzen, diese aber durch das Ikositetraëder $\{211\} = 2O2$ abgestumpft werden, so müssen dessen Flächen auch die entsprechenden Kanten eines derartigen Hexakisoktaëders abstumpfen, wie Fig. 177 zeigt, in welcher dieselben Flächen, wie in Fig. 176, und zu diesen noch das Ikositetraëder $\{211\}$ hinzutretend, dargestellt sind.

Fig. 177.

§. 53. **Projection und Berechnung der regulären Formen.** Eine Projection der regulären Krystallformen, welche geeignet sein soll, nicht nur einen Ueberblick über die Zonenverhältnisse derselben zu gewähren, sondern auch die Symmetrie der regulären Krystalle zur Anschauung zu bringen, muss zur Projectionsebene eine der Haupt-Symmetrieebenen haben. In Fig. 178 ist daher die den horizontalen Hexaëderflächen parallele Ebene zur Ebene des Grundkreises genommen; alsdann sind offenbar die mit 100, $\bar{1}00$, 010, $0\bar{1}0$, 001 bezeichneten Punkte die Pole der diesen Symbolen entsprechenden Hexaëderflächen.

Nach diesen durch ihre Bogenabstände von 90° unmittelbar gegebenen Polen sollen zunächst diejenigen der Dodekaëderflächen eingetragen werden: Von diesen fallen vier, 110, $1\bar{1}0$, $\bar{1}\bar{1}0$, $\bar{1}10$, in den Grundkreis und in die Mitte zwischen zwei Hexaëderpolen, da die Dodekaëder-Normalen ja den Winkel zwischen zwei Hauptaxen halbiren. Die vier weiter noch darzustellenden oberen Dodekaëderflächen 101, 011, $\bar{1}01$, $0\bar{1}1$ liegen in den Zonen $[100, 001]$ resp. $[010, 001]$, also ihre Pole auf denjenigen beiden grössten Kreisen der Kugel, welche in der Projection als Durchmesser, den Hauptaxen parallel laufend, erscheinen. Um den Abstand eines solchen Poles von 001 zu finden, hat man sich durch einen der beiden Durchmesser eine senkrechte Ebene gelegt zu denken, welche die Kugel ebenfalls in einem grössten Kreise schneidet, auf diesem von dem obersten Punkte, dem Pol der Fläche (001), ab 45° aufzutragen und diesen Pol mit dem untersten Punkte des grössten Kreises durch eine Gerade zu verbinden; wo diese den horizontalen Durchmesser schneidet, liegt die Projection des Poles (vergl. S. 207). Zu dieser Hülfsconstruction kann man aber auch die Fig. 178 benutzen, indem man z. B. die Punkte 100 und $\bar{1}10$ verbindet; wo die Verbindungsgerade den Durchmesser

Fig. 178.



010 : 0$\bar{1}$0 schneidet, muss ein Dodekaëderpol liegen. Nachdem so die in der Zeichnungsebene darzustellenden Dodekaëderpole sämmtlich eingetragen sind, kann man dieselben unter einander durch Zonenkreise, wie [110, 101, 0$\bar{1}$1, $\bar{1}\bar{1}$0], verbinden, und es sind alsdann auch die Projectionen derjenigen sphärischen Dreiecke dargestellt, welche zur Berechnung des Winkels zweier benachbarter Dodekaëderflächen erforderlich sind. Suchen wir z. B. den Winkel zwischen den Flächen 101 und 011, so dient dazu das sphärische Dreieck: 001, 011, 101; dieses hat in 001 einen rechten Winkel, und ausserdem sind seine Seiten 001 : 011 und 001 : 101 bekannt, nämlich beide gleich 45°; der gesuchte Winkel der beiden Dodekaëderflächen, d. i. die dem rechten Winkel des Dreiecks gegenüberliegende Seite c, ist demnach gegeben durch die Formel:

$$\cos c = \cos 45^0 \cos 45^0 = \tfrac{1}{2}$$

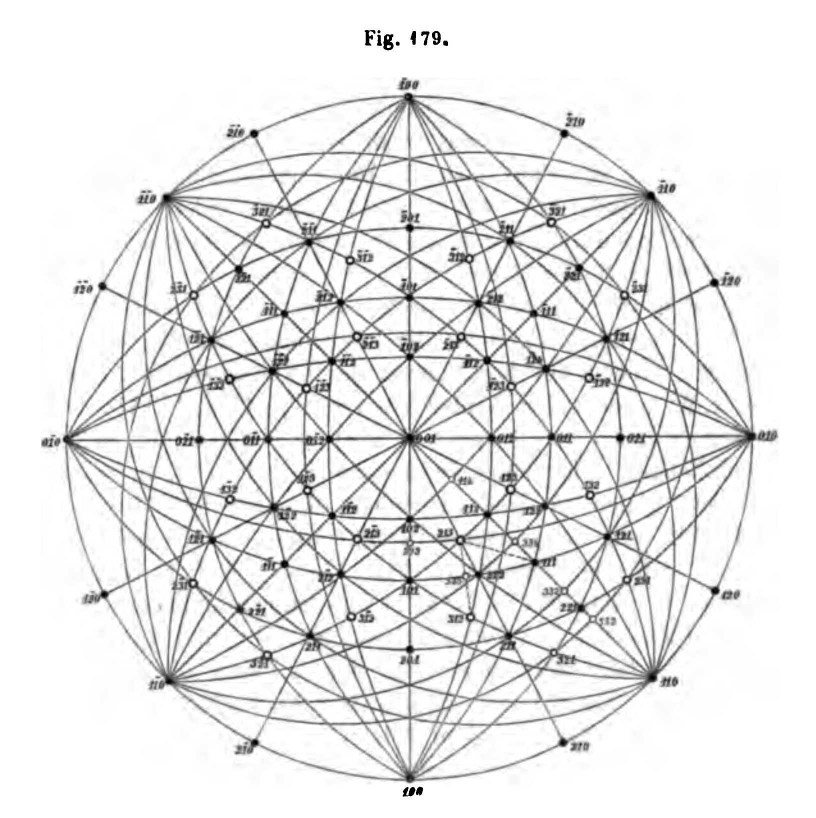
c ist also = 60°, wie bereits früher angegeben wurde.

Um die Lage des Pols 111 einer Oktaëderfläche zu finden, hat man sich nur zu erinnern, dass dieselbe sowohl in der Zone [100, 011], als in [010, 101] liegt. Construirt man diese und sämmtliche entsprechende Zonenkreise, so erhält man als Durchschnittspunkte derselben die gesuchten Oktaëderpole 111, 1$\bar{1}$1 u. s. w. Durch jeden derselben geht noch ein dritter Zonenkreis, der in der Projection als Durchmesser erscheint, denn 111 gehört noch der Zone [001, 110] an u. s. f. Ziehen wir auch diese Linien, d. h. die diagonalen Durchmesser von 110 nach $\bar{1}\bar{1}$0 und von 1$\bar{1}$0 nach $\bar{1}$10, so enthält nunmehr die Projection auch diejenigen sphärischen Dreiecke, welche zur Bestimmung des Oktaëderwinkels führen. Als solcher sei z. B. gesucht der Winkel zwischen (111) und (1$\bar{1}$1), so ist die Hälfte desselben gleich dem Bogen 111 : 101 und dieser die Seite des in 101 rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks 101, 111, 001, in welchem der Winkel an 001 gleich 45° und ausserdem die Seite 001 : 101 = 45° bekannt sind. Die tang des gesuchten Bogens ist = sin 45° tang 45° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; daraus ergiebt sich der ganze Bogen 111 : 1$\bar{1}$1 = 70° 31',8, ferner der Abstand der Pole 111 und 001 = 54° 44',1 (das halbe Supplement des vorigen) und der Winkel zwischen den Zonenkreisen [001, 111] und [101, 111] = 60°. Der letzte Werth folgt ausserdem auch daraus, dass die Ebenen dieser beiden Zonenkreise parallel den beiden Dodekaëderflächen 1$\bar{1}$0 resp. $\bar{1}$01 sind, sowie daraus, dass in dem Pole 111 sich die drei Zonenkreise [001, 110] [100, 011] [010, 101] unter gleichen Winkeln, also unter 60°, schneiden müssen.

Von den drei einfachsten Formen soll nunmehr zu den Vierundzwanzigflächnern übergegangen und mit den in der Zone der Hauptaxen liegenden Tetrakishexaëdern ($hk0$) begonnen werden. Da die Normale z. B. zu der Fläche ($k0h$) in der Ebene (010) liegt, ihr Pol also zwischen 001 und 101 fällt (um so näher an 001, je mehr die Form des Pyramidenwürfels dem Hexaëder ähnelt), so lehrt eine einfache Ueberlegung, dass sein Abstand von 001 dadurch bestimmt ist, dass dessen tang = $k : h$. So ergiebt sich z. B. 102 : 001 = 26° 33',9, woraus für 102 : 101 = 18° 26,1

und für 102 : 201 = 36° 52',2 (vergl. S. 257) folgt. Trägt man (Fig. 179) mit demselben Abstande von 001 auch den Pol 012 ein, so kann man den Winkel einer Kante zweiter Art am Tetrakishexaëder, nämlich 102 : 012, unmittelbar aus den beiden gleichen Bögen 102 : 001 und 012 : 001 ableiten, da dieselben mit dem gesuchten Bogen ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck bilden. Handelt es sich darum, umgekehrt das Verhältniss $k : h$, also das Zeichen des Tetrakishexaëders, aus einer gemessenen Kante zu berechnen, so leuchtet ein, dass die hexaëdrische Kante, z. B. $h0k : k0h$ unmittelbar den Winkel $k0h$: 001 giebt, dessen tang das gesuchte Verhältniss ist. Liegt dagegen die Messung einer Kante der zweiten Art vor, wie eine solche in Fig. 179 durch den

Fig. 179.



Bogen 102 : 012 repräsentirt ist, so halbirt man den gemessenen Werth und hat dann in demselben die Seite eines rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks, in welchem ausserdem noch der gegenüberliegende Winkel = 45° bekannt ist (ein solches Dreieck ist das in der Figur von 001, 012, 114 gebildete); man berechnet in demselben die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite, d. h. den Abstand des Poles einer Tetrakishexaëderfläche von 001, dessen tang nach Obigem das gesuchte Verhältniss $k : h$ ist.

Als Beispiel der Berechnung eines **Ikositetraëders** mag diejenige der durch die Zonen [101, 011] und [001, 111] gegebenen Form {211} dienen. Sei von derselben der Winkel einer Kante 1. Art (s. S. 253), z. B. 112 : 1$\bar{1}$2, zu berechnen, so ist dieser das Doppelte des Bogens 112 : 102, welcher sich leicht aus dem rechtwinkelig sphärischen Dreiecke 112, 102, 001 ergiebt, dessen Winkel an 001 = 45° und dessen Seite 001 : 102 bekannt ist (s. oben unter Tetrakishexaëder). Diese Methode ist aber auch für jedes andere Ikositetraëder gültig, da alle Pole *kkh* zwischen 001 und 111 liegen und mit *k*0*h*, d. h. einer Fläche des Pyramidenwürfels, welcher dieselben Werthe *h* und *k* besitzt, je ein ähnliches sphärisches Dreieck bilden, dessen Seite *k*0*h* : 001 unmittelbar durch das Verhältniss *k* : *h* gegeben ist. Sie kann also auch umgekehrt dazu dienen, um aus dem gemessenen Winkel der Ikositetraëderkante, resp. aus der Hälfte derselben, d. i. dem Bogen *kkh* : *k*0*h*, den Abstand des letzteren Pols von 001 und daraus die Indices zu berechnen. Um eine Kante der 2. Art, z. B. 211 : 121, aus dem gegebenen Zeichen der Form herzuleiten, hat man in demselben Dreieck den Abstand des Poles 112 (allgemein *kkh*) von 001 zu berechnen und diesen von dem Bogen 001 : 111 = 54° 44',1 (s. S. 261) abzuziehen; der so erhaltene Bogen 112 : 111 (*kkh* : 111) ist gleich 211 : 111 (*hkk* : 111) = 121 : 111 (*khk* : 111), der gesuchte Winkelabstand 211 : 121 (allgemein *hkk* : *khk*) ist also die dritte Seite in dem gleichschenkeligen Dreieck 211, 121, 111, in welchem die beiden gleichen Seiten und der zwischenliegende Winkel = 120° (da in 111 sich die Zonenkreise unter 60° schneiden) bekannt sind. Dieses Dreieck wird aber von dem Zonenkreise [111, 110] symmetrisch halbirt, daher von demselben in zwei rechtwinkelige sphärische Dreiecke getheilt, deren rechter Winkel im vorliegenden Falle an dem Pol 332 liegt, dessen Indices aber auch in jedem andern Falle durch die beiden daselbst sich kreuzenden Zonen gegeben sind; in einem solchen rechtwinkeligen Dreiecke, z. B. 211, 111, 332, sind nunmehr die Seite 211 : 111 und der Winkel an 111 (= 60°) bekannt, daher am einfachsten aus diesem der Bogen 211 : 332, d. i. die Hälfte des Winkels einer Kante 2. Art am Ikositetraëder, berechnet werden kann. Soll umgekehrt aus dem Winkel einer solchen Kante das Zeichen der Form hergeleitet werden, so benutzt man das gleiche rechtwinkelige Dreieck, in welchem aber diesmal die dem Winkel von 60° gegenüberliegende Seite (= dem halben gemessenen Winkel) bekannt, und die anliegende, d. i. die Neigung der Ikositetraëder- zur Oktaëderfläche zu berechnen ist; aus letzterer ergiebt sich dann direct diejenige zur Würfelfläche 001 und aus dieser der Winkel der Kante 1. Art, sowie die Neigung des zugehörigen Tetrakishexaëders zu 001, welche letztere unmittelbar das Verhältniss der Indices liefert.

Die Flächen der **Triakisoktaëder** {*hhk*} liegen zwischen denen des Oktaëders und des Dodekaëders, also ihre Pole auf den Zonenkreisen [111, 101] u. s. w., je nach dem Verhältniss ihrer Indices *h* : *k* näher dem einen oder dem andern Pole. In Fig. 179 sind ausser dem, einem Pyrami-

denoktaëder angehörigen, bereits benutzten Pole 332 diejenigen des häufigsten Triakisoktaëders {221} vollständig eingetragen. Will man den Winkel der oktaëdrischen Kanten einer solchen Form berechnen, z. B. 212 : 2$\bar{1}$2, so ist hierzu nur erforderlich die Berechnung von 212 : 101, da dieses die Hälfte jenes ist; dieser letztere Bogen ist aber eine Seite des rechtwinkeligen Dreiecks 001, 101, 212, in welchem ausser der Seite 001 : 101 = 45° auch der Winkel an 001 gegeben ist: die Verlängerung des Zonenkreises 001 : 212 (allgemein: 001 : *hkh*) trifft nämlich den Grundkreis in einem Pol, dessen Symbol = 210 (allgemein: *hk*0, worin das Verhältniss *h* : *k* gleich dem des Pyramidenoktaëders); der Winkel 100 : 210, dessen tang = *k* : *h*, ist nun aber offenbar gleich dem Winkel zwischen den Zonenkreisen [001 : 210] und [001 : 100]. Soll umgekehrt das Zeichen {*hhk*} aus der Messung des Winkels einer oktaëdrischen Kante berechnet werden, so benutzt man dasselbe Dreieck, wie vorher, indem man aus der Seite 101 : *hkh* (der Hälfte des gemessenen Winkels) den gegenüberliegenden Winkel sucht, der gleich dem Bogen 100 : *hk*0 auf dem Grundkreis ist und daher durch seine tang das gesuchte Verhältniss *k* : *h* giebt. Zur Berechnung des Winkels einer Kante zweiter Art am Pyramidenoktaëder, z. B. 212 : 122, hat man zunächst nach Obigem den halben Winkel der oktaëdrischen Kante zu berechnen, aus dem sich unmittelbar der Winkel zum Oktaëder, z. B. 212 : 111 ergiebt; dieser ist gleich 122 : 111, also ist der gesuchte Bogen 212 : 122 die dritte Seite in dem gleichschenkeligen Dreieck 212, 122, 111, in welchem der an 111 anliegende Winkel = 120°. Da der Zonenkreis [001 : 110] dieses Dreieck in zwei rechtwinkelige theilt, so ist es einfacher, die Hälfte des gesuchten Bogens aus einem Dreieck der letzteren Art, z. B. 212, 334, 111, in welchem natürlich der Winkel an 111 nun = 60° ist, herzuleiten. Ein ebensolches Dreieck benutzt man auch bei der Berechnung des Zeichens eines Triakisoktaëders aus der Messung einer Kante zweiter Art, indem man nunmehr umgekehrt aus dem Bogen, welcher dem Winkel von 60° gegenüberliegt, d. i. aus der Hälfte des gemessenen Winkels, denjenigen der Triakisoktaëderfläche zu 111 bestimmt, daraus durch Subtraction den derselben Fläche zu 101, d. h. den halben Winkel der oktaëdrischen Kante und aus dieser die Indices wie oben berechnet.

In Fig. 179 sind nun endlich noch sämmtliche Pole der 24 oberen Flächen des häufigsten Hexakisoktaëders {321} eingetragen, und soll an diesem Beispiel zunächst gezeigt werden, wie man bei der Berechnung der Winkel eines Achtundvierzigflächners zu verfahren hat. Die gerade Abstumpfung der dreierlei Kanten einer jeden derartigen Form wird von den Flächen je eines Vierundzwanzigflächners gebildet; es werden nämlich die mittleren Kanten abgestumpft durch ein Tetrakishexaëder, die längsten von einem Ikositetraëder und die kürzesten von einem Triakisoktaëder, deren Zeichen durch dasjenige des Achtundvierzigflächners in bekannter Weise bestimmt sind. So liegt z. B. zwischen den Flächen 213 und 2$\bar{1}$3 als Abstumpfung einer mittleren Kante die Fläche 203, deren Polabstand von 001

durch ihre Indices gegeben ist; dieser Abstand bildet aber eine Seite in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck 001, 203, 213, in welchem ausserdem der spitze Winkel an 001 bekannt ist; derselbe ist nämlich gleich dem Abstand zwischen 100 und demjenigen im Grundkreis gelegenen Pole, dessen Indices der Zone [001, 213] genügen, d. i. 210, also ist seine tang $= \frac{1}{2}$. Die diesem Winkel gegenüberliegende Seite des angeführten Dreiecks ist aber die Hälfte des gesuchten Winkels der mittleren Kanten am Achtundvierzigflächner. Es ist leicht einzusehen, dass dieselbe Rechnungsmethode für jedes Hexakisoktaëder gilt, nur führen die beiden benutzten Zonen für eine andere Form auf ein anderes Tetrakishexaëder als Abstumpfung oder auf einen andern Pol im Grundkreis oder sie ergeben beides verschieden. Ganz analog ist die Berechnung der längsten Kante, welche durch ein Ikositetraëder abgestumpft wird. In dem in Fig. 179 gewählten speciellen Falle ist dieses {211}, und man erhält die Hälfte des gesuchten Winkels, z. B. den Bogen 213 : 112, aus dem rechtwinkeligen Dreieck, in welchem die Seite 001 : 112 und der spitze Winkel an 001 durch die Zugehörigkeit von 213 zur Zone [001, 210] bestimmt ist. Ebenso einfach ist auch die Herleitung des Winkels der kürzesten Kante, z. B. derjenigen zwischen (321) und (231), mittelst der abstumpfenden Fläche (552), denn die Hälfte des gesuchten Winkels, d. i. der Bogen 321 : 552, bildet die Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks 321, 552, 110, in welchem der Bogen 552 : 110 leicht aus den Indices der ersteren Fläche zu berechnen ist, und der spitze Winkel an 110 gleich dem Bogen 001 : $1\bar{1}2$, allgemein: gleich der Neigung desjenigen Ikositetraëders zum Hexaëder, welches in den Zonen [hkl, 110] und [001, $1\bar{1}0$] liegt und offenbar durch das Zeichen des Achtundvierzigflächners vollkommen bestimmt ist.

Handelt es sich jedoch darum, das Zeichen eines Hexakisoktaëders aus seinen Winkeln zu berechnen, so leuchtet ein, dass hierzu die Messungen zweier verschiedener Kanten vorliegen müssen, andererseits aber auch genügen, da das Verhältniss der drei Indices $h : k : l$ nur zwei Unbekannte enthält. Seien z. B. die Winkel der mittleren und der längsten Kanten gemessen worden, so sind damit an der in Fig. 179 projicirten Form die Bögen 213 : 203 und 213 : 112, als die Hälften jener Winkel, bestimmt. Jeder dieser beiden Bögen bildet mit 001 ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck, und diese Dreiecke haben die Seite 001 : 213 gemeinsam; werde die letztere mit c, der im ersten Dreieck dem Bogen 213 : 203 $= a$ gegenüberliegende Winkel mit A, der im zweiten Dreieck dem Bogen 213 : 112 $= a'$ gegenüberliegende Winkel mit A' bezeichnet, so ist

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin A'},$$

daraus folgt:

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin a}$$

und da $A' = 45^0 - A$, so ist

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \text{cotang}\ A - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sin a'}{\sin a},$$

somit
$$\text{cotang}\ A = \frac{\sin a'}{\sin 45^0 \sin a} + 1.$$

Nachdem in dieser Weise A aus den bekannten Grössen a und a' berechnet ist, ergiebt sich unmittelbar der Bogen 001 : 203, d. h. allgemein dasjenige Tetrakishexaëder, welches die mittleren Kanten des Achtundvierzigflächners abstumpft, wodurch zwei Indices des letzteren gegeben sind; der dritte folgt alsdann aus dem Winkel A, denn dieser bestimmt einen Pol auf dem Grundkreis, dessen Verbindungslinie mit 001 den Pol 213 (allgemein klh) enthält. Noch einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn eine mittlere und eine kürzeste Kante gemessen wurde: die Hälfte der ersteren ist die Seite a eines rechtwinkeligen Dreiecks, welches bei dem in Fig. 179 gewählten Beispiele die Eckpunkte 203, 213, 101 hat; der die kürzeste Kante repräsentirende Bogen 213 : 312 wird von dem Zonenkreise [101, 111], weil dieser einer Dodekaëderfläche parallel ist, symmetrisch halbirt, daher der punktirt angedeutete Bogen 213 : 525 die Seite a' eines ebenfalls rechtwinkeligen Dreiecks 525, 213, 101 ist, welches mit dem ersten die jedesmal dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite 101:213 = c gemeinsam hat. Wie im vorigen Falle, gilt also für die beiden an 101 anliegenden Winkel die Gleichung

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin a}.$$

Da hier aber $A + A' = 90^0$, so ist

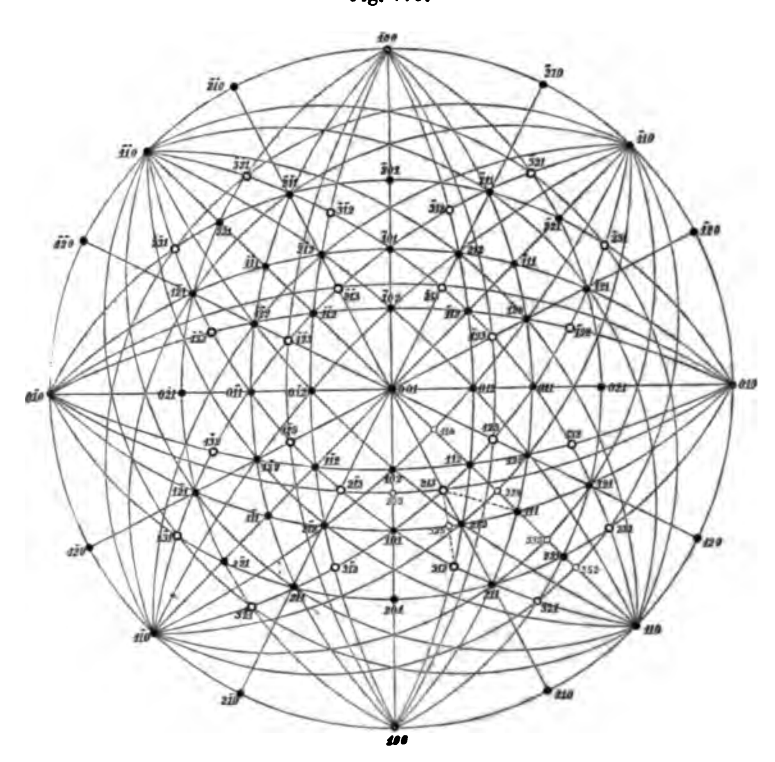
$$\text{cotang}\ A = \frac{\sin a'}{\sin a}.$$

Hiermit sind nun die beiden sphärischen Dreiecke vollständig bestimmt, also auch die beiden Bögen 101 : 203 und 101 : 525, d. h. allgemein die Zeichen der beiden die gemessenen Kanten abstumpfenden Vierundzwanzigflächner, aus denen sich das Zeichen des Hexakisoktaëders in leicht ersichtlicher Weise ergiebt. In ganz ähnlicher Art verfährt man endlich, wenn eine längste und eine kürzeste Kante gemessen wurde, deren Hälften wieder mit a und a' bezeichnet werden mögen: alsdann ist (s. Fig. 179) 213 : 112 = a, 213 : 525 = a', und auch diese Bögen bilden, diesmal mit 111, zwei rechtwinkelige Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite 213 : 111 (in der Figur punktirt), ihre Sinus verhalten sich also wiederum ebenso, wie die Sinus des einem jeden gegenüberliegenden Winkels A und A', deren Summe in diesem Falle 60^0 beträgt, folglich ist

$$\text{cotang}\ A = \frac{\sin a'}{\sin 60^0 \sin a} + \tfrac{1}{2}.$$

Durch die Berechnung von A und A' sind wieder die beiden sphärischen Dreiecke und damit die Symbole der beiden die gemessenen Kanten abstumpfenden Vierundzwanzigflächner bekannt, welche in allen Fällen das Zeichen des Hexakisoktaëders bestimmen.

Fig. 179.



Zum Schluss möge noch als specielles Beispiel der Entwickelung einer flächenreichen regulären Combination die Berechnung der in Fig. 180 dargestellten Form folgen, wie sie die Krystalle des Magneteisens zuweilen zeigen. An derselben sind die Formen $d = \{110\}$ ∞O und $o = \{111\}$ O ohne Berechnung zu constatiren. Zur Bestimmung der übrigen Formen genügt die Messung einer einzigen Zone $d\, x\, i$; diese, nach Maassgabe der Flächenbeschaffenheit auf $\pm 5'$ genau, habe ergeben:

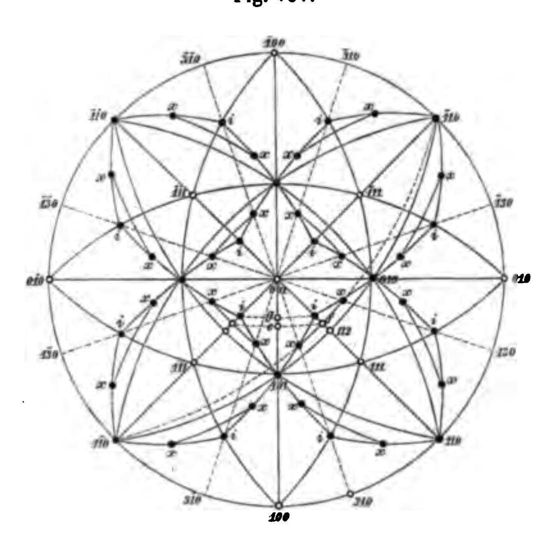
Fig. 180.

$$d{:}x = 16^0\,58' \qquad x : i = 14^0\,33'$$
$$\text{folglich: } d : i = 31^0\,31'.$$

Die Form i ist offenbar ein Ikositetraëder, dessen $h : k > 2$, und dessen Zeichen zunächst berechnet werden soll. In Fig. 181 (s. folg. S.), in welcher alle Flächen der Combination und sämmtliche durch Kanten an derselben repräsentirte Zonen eingetragen und von den nur zur Hülfe benutzten Zonen und Flächenpolen unterschieden sind, ist der Bogen $101 : i$, gleich dem gemessenen Winkel $31^0\,31'$, eine Seite des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks $101, 112, i$,

in welchem ausserdem die Seite 101 : 112 = $\frac{1}{2}$ (101 : 011) = 30° bekannt ist. Hieraus ergiebt sich die Seite i : 112 = 10° 8$\frac{1}{2}$′, und da 112 : 001 = 35° 16′ *), so ist 001 : i = 25° 7$\frac{1}{2}$′. Aus diesem Werthe folgt mittelst des rechtwinkeligen Dreiecks 001, i, g, in welchem der Winkel an 001 = 45°, der Bogen 001 : g = 18° 21′, dessen cotang, d. i. $h : k$, = 3,012, d. h. unzweifelhaft = 3. Setzt man letzteren Werth ein und berechnet auf demselben Wege rückwärts $i : d$, so findet man dafür den Werth 31° 29′, also eine Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung von nur 2′. Um nunmehr auch das Zeichen des Hexakisoktaëders x zu bestimmen, bedarf es zunächst der Kenntniss der Richtung des Zonenkreises [i, 101], auf welchem x liegt; diese ist gegeben durch den Winkel 101 · i · 112 des oben benutzten Dreiecks und folgt aus den angeführten Daten = 73° 2′. Derselbe Winkel gehört aber zugleich dem ebenfalls rechtwinkeligen Dreieck xif an, in welchem durch Einführung des gemessenen Bogens $x : i$ sich ergiebt: $x : f$ = 13° 54′ und $i : f$ = 4° 20′. Hierdurch ist nun in dem Dreieck x, f, 001 ausser der Seite xf auch die Seite f : 001 = 29° 27$\frac{1}{2}$′ bekannt, woraus der Winkel desselben an 001 zu 26° 43′ folgt. Durch letzteren ist aber der Pol des Grundkreises bestimmt, welcher in der Zone [001, x] liegt; aus seinem Abstande von 100, welcher 45° — 26° 43′ = 18° 17′ beträgt, ergeben sich nämlich die Indices desselben $k : h$ = 1 : 3,027, also ist dieser Pol derjenige der Fläche (310). Aus dem rechtwinkeligen Dreieck 001, e, f folgt 001 : e = 21° 46′, dessen cotang = 1 : 2,504, daher die Indices des Poles e = 205 und das Symbol der Ikositetraëderfläche, deren Pol der Punkt f, = (225). Diese stumpft aber die längste Kante des Achtundvierzigflächners x ab, von dessen Indices bereits das Verhältniss zweier (= 1 : 3) bekannt ist; setzen wir daher die Indices der rechts und links von f liegenden Flächen desselben = (31x) und (13x), so ergiebt sich als Symbol ihrer Zone [$\overline{x}$, $\overline{x}$, 4], und da in dieser Zone die Fläche (225) liegt, so muss 4x = 20 sein, d. h. x = 5. Das

Fig. 181.



*) Weil $\bar{1}\bar{1}1$: 112 = 90° (da nach S. 245 zu einer Oktaëderfläche sechs Dodekaëderflächen, also auch die Abstumpfungen ihrer Kanten senkrecht stehen) und $\bar{1}\bar{1}1$: 001 = 54° 44′.

suchte Symbol des Hexakisoktaëders ist {531}. Die Rückberechnung sselben liefert für den Winkel $x : i$ den Werth 14° 27½′.

§. 54. **Zwillinge des regulären Systems.** Wenden wir die allge-einen Auseinandersetzungen des §. 48 auf den speciellen Fall der holo-risch regulären Krystalle an, so ergiebt sich, dass als Zwillingsebene ıer regelmässigen Verwachsung zweier Krystalle dieses Systems eine Fläche ler regulären Form fungiren kann, ausgenommen die des Hexaëders d des Dodekaëders, weil diese Symmetrieebenen sind und die beiden ystalle alsdann eine parallele Stellung erhalten, also krystallographisch ntisch sein würden. Solche Parallelverwachsungen entstehen oft bei ınellem Wachsthum der Krystalle, indem an den Ecken und Kanten be-ıders viel Substanz angelagert, und dadurch eine Aneinanderreihung ılreicher kleiner paralleler Krystalle nach krystallographisch bestimmten :htungen gebildet wird, welche man als »Wachsthumsformen« zu bezeich-n pflegt.

Die einfachste von denjenigen Formen des regulären Systems, welche :ht Symmetrieebenen sind und nach denen deshalb Zwillingsbildung, h. regelmässige Verwachsung nicht paralleler Krystalle, stattfinden kann, das Oktaëder. Aus den Elasticitäts- und Cohäsionsverhältnissen der gulären Krystalle folgt, dass zweifellos die drei Hauptaxen die Richtungen icher, sei es maximaler, sei es minimaler Anziehung darstellen, und rnach leuchtet es ein, dass die beständigste Gleichgewichtslage zwischen ei Theilchen ausser der parallelen diejenige sein wird, in welcher die eilchen in Bezug auf eine Ebene zu einander symmetrisch liegen, gegen lche die drei Hauptaxen gleich geneigt sind; dies ist aber die Oktaëder-che. Nach den Eingangs des §. 48 angestellten Betrachtungen ist daher erwarten, dass am leichtesten eine symmetrische Verwachsung nach m Oktaëder entsteht, und in der That sind bisher fast noch nie andere illinge holoëdrisch regulärer Krystalle beobachtet worden, als solche, in nen die beiden verbundenen Krystalle umgekehrt in Bezug auf die Fläche s Oktaëders liegen. Alsdann ist ihre Zwillingsaxe eine sogenannte »tri-ıale Axe«, nämlich die Normale zu der betreffenden Oktaëderfläche, d. i. Axe der Zone, welche aus denjenigen sechs Flächen des Dodekaëders steht, welche zu jener normal sind; in dieselbe Zone fallen auch sechs hen von {211}, welche die Kanten jener sechs Dodekaëderflächen ab-ımpfen und je zwölf Flächen derjenigen Hexakisoktaëder, welche sie zu-härfen (s. S. 259). Da alle diese Flächen auf der Zwillingsebene senkrecht hen, so fallen dieselben, wenn wir einen Krystall aus der mit dem eiten parallelen Stellung heraus um die Zwillingsaxe um 180° drehen, odurch er in die Zwillingsstellung gelangt, mit den ihnen gegenüber-genden in eine Ebene, die Flächen der Zone der Zwillingsaxe sind also r beide Krystalle identisch. Da in diesem Falle die Zwillingsaxe parallel ıer möglichen Kante des Krystalls, nämlich der Dodekaëderkante, und in ıer möglichen Krystallfläche (der Dodekaëderfläche) normal zu einer mög-

lichen Kante (Combinationskante von {110} und {111}) liegt, so fallen hier die drei Arten von Zwillingsgesetzen, welche S. 232 und 233 aufgeführt wurden, in eines zusammen.

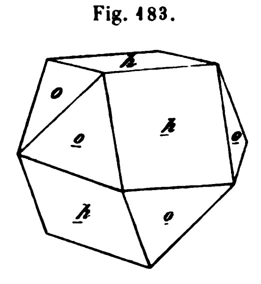
Lediglich von theoretischem Interesse ist der Satz, welcher für die symmetrischen Verwachsungen des regulären Systems, nach welcher Fläche sie auch verzwilligt seien, gilt: Jede mögliche Fläche des einen Krystalls ist zugleich eine solche des andern, d. h.: bezieht man eine Fläche des einen Krystalls auf die Axen des andern, so erhält sie rationale Indices. Ueber den Beweis dieses Satzes siehe z. B. Naumann, Elemente der theoret. Krystallographie, Leipzig 1856, S. 62.

Da, wie bemerkt, andere Zwillingsverwachsungen, als solche nach {111}, nur sehr selten vorkommen, so sollen im Folgenden nur diese des gewöhnlichen Gesetzes näher beschrieben werden:

Zwillingsebene eine Oktaëderfläche: Sind die beiden Krystalle selbst als Oktaëder ausgebildet, ungefähr gleich gross und mit der Zwillingsebene selbst verwachsen, so haben sie, da sie gewöhnlich nach der Zwillingsaxe verkürzt erscheinen, das Ansehen der Fig. 182*); die Zwillingskanten bilden ein regelmässiges Sechseck und sind abwechselnd ein- und ausspringend, und da einspringende Winkel an einem einfachen Krystall nicht auf-

Fig. 182.

Fig. 183.



treten können, so ist das dargestellte Gebilde leicht als Zwilling zu erkennen (Beipiele: Spinell, Magneteisenerz). Wenn dagegen die Einzelkrystalle nicht einfache Oktaëder, sondern z. B. Combinationen mit dem Würfel sind, so können sie wie Fig. 183 erscheinen, d. h. ohne einspringende Winkel, einer hexagonalen Combination zweier trigonaler Pyramiden mit der Basis (d. i. die Zwillingsebene) gleichend (Beispiel: Bleiglanz). Sind bei einer solchen Verwachsung die beiden Krystalle ungleich gross, so können sie in der mannigfaltigsten Weise, der eine über den andern, übergreifen; s. eine Anzahl solcher Formen in den Abbildungen zu der Arbeit von Sadebeck, »über die Krystallisation des Bleiglanzes, Zeitschr. d. d. geolog.

* Hier, wie in den folgenden Figuren, hat ein Krystall die übliche Stellung, die ihm als einfachem zukommt; die Flächenzeichen des anderen sind unterstrichen, z. B. $\underline{o}$.

Gesellsch. 1874, 617*a*, von denen in Fig. 184 eine copirt ist. Sind die nach dem Oktaëder verwachsenen Krystalle als Hexaëder ausgebildet, so erscheinen sie gewöhnlich ganz durch einander gewachsen, wie es Fig. 185 darstellt; hier sind beide Hexaëder gleich gross und genau concentrisch,

Fig. 184.

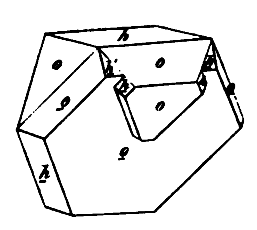
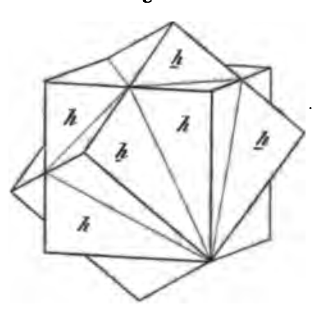


Fig. 185.



während dies an natürlichen Krystallen selbstverständlich nicht der Fall ist: ist das eine Hexaëder z. B. beträchtlich kleiner, so ragen nur einige Ecken desselben um ein Weniges über die Flächen des anderen hervor u. s. w. (Beispiel: Flussspath).

§. 55. Beispiele holoëdrisch regulär krystallisirender Substanzen.

Phosphor = *P*. Krystallisirt aus Chlorschwefel u. a. Lösungsmitteln in Dodekaëdern, bei der Sublimation im Vacuum oder in sauerstofffreien Gasen in Combinationen von {110} {111} {100} {311} {421}.

Silicium = *Si*. Schwarze, metallglänzende Oktaëder, meist Zwillinge = Fig. 182, aber parallel einer Kante $o : \underline{o}$ zu Stäben mit rinnenförmig einspringenden Winkeln verlängert.

Eisen = *Fe*. Kleine oktaëdrische, nach den Hauptaxen an einander gereihte Krystalle in porös erstarrtem Roheisen: hexaëdrische Spaltbarkeit sehr deutlich in manchen Meteoreisen.

Kupfer = *Cu*. In Schlacken abgeschiedenes und galvanisch gefälltes zeigt meist {111}, die natürlichen Krystalle {100} {111} {110} {301} (Fig. 170) u. s. f. — Zwillinge nach {111} Fig. 183.

Blei = *Pb* erstarrt aus dem geschmolzenen Zustand in Oktaëdern oder Combinationen von {111} und {100}.

Quecksilber = *Hg* erstarrt in Oktaëdern.

Silber = *Ag*. Galvanisch abgeschiedene und natürliche Krystalle: {100} {111} {110} {311} u. s. f. — Zwillinge nach {111}.

Gold = *Au* zeigt dieselben Formen und Zwillinge.

Platin = *Pt*. Natürlich {100}.

Bleisulfid (nat. Bleiglanz) = *PbS*. Künstliche {100}, natürliche Krystalle: {100} {111} {110} {221} {211} u. a. (s. Figg. 145, 146, 157, 164). Zwillinge nach {111}, Figg. 183, 184. Spaltbar {100} vollkommen.

Silbersulfid (nat. Silberglanz) = Ag^2S. Natürliche Krystalle {100} {111} {110} {211} (Figg. 146, 147).

Arsenige Säure = As^2O^3. Aus Lösungen und sublimirt {111}.

Antimonoxyd (nat. Senarmontit) = Sb^2O^3. Dito. Anomal doppeltbrechend.

Chlornatrium (nat. Steinsalz) = $NaCl$. Aus wässeriger Lösung {100}, aus harnstoffhaltiger {111}. Spaltbar nach {100} vollkommen, daher die Härte sehr verschieden in verschiedenen Richtungen. So ist nach den Untersuchungen Exner's (s. S. 9) die Härtecurve auf den Hexaëderflächen symmetrisch sowohl zu den Seiten, als zu den Diagonalen derselben und zeigt parallel den ersteren vier Minima, parallel den letzteren vier Maxima, wobei sich die Radien, welche der Härte proportional sind, in dem einen und dem anderen Falle verhalten wie 1 : 1,3. Directe Messungen der Zugfestigkeit in verschiedenen Richtungen stellte Sohnke (Poggend. Ann. 137, 177) an und fand das Gewicht, welches nöthig ist, um ein Steinsalzprisma von 1 Quadratmillim. Querschnitt zu zerreissen, = 35 Loth, wenn die Längsaxe des Prismas senkrecht zum Hexaëder, über 105 Loth, wenn dieselbe senkrecht zu einer Oktaëderfläche ist. Mit dieser grossen Differenz der Cohäsion in verschiedenen Richtungen dürfte es wohl zusammenhängen, dass auch der Elasticitätscoëfficient sich mit der Richtung erheblich ändert; nach den Messungen Voigt's (»Untersuchung über die Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes, Dissertat. Leipzig 1874) ist der Elasticitätscoëfficient

parallel den drei Hauptaxen	= 4170	Kilogr.
normal zu {110}	= 3400	„
normal zu {111}	= 3180	„

und ist in allen krystallographisch gleichwerthigen Richtungen gleich gross. Die Gleitflächen des Steinsalzes sind die sechs Dodekaëderflächen; stumpft man zwei gegenüberliegende Kanten eines Würfels durch Schleifen ab und presst das Stück senkrecht zu diesen Flächen zusammen, so entsteht eine bleibende Verdichtung in der Richtung der Diagonale und daher ein das Licht doppeltbrechender Streifen; durch stärkeren Druck kann man eine glänzende Bruchfläche nach der diagonalen Dodekaëderebene erhalten. Ein von den sechs Würfelflächen begrenztes Prisma von den Endflächen her, also in der Richtung einer Hauptaxe, zusammengepresst, wird kürzer und dicker durch Gleiten der Theilchen nach den Dodekaëderflächen, und lassen sich so bedeutende Deformationen hervorbringen, ohne dass das Stück zerbricht. Hierbei, sowie beim Zerschlagen, Schleifen u. s. w. entstehen aber immer lokale Verdichtungen im Steinsalz, welche sich durch Doppelbrechung (Aufhellung zwischen gekreuzten Nicols) zu erkennen geben. Man findet sogar selten ganz homogene und von doppeltbrechenden Stellen freie Steinsalzstücke. Die Gleitflächen erhält man auch durch die Körnerprobe, indem die Schlagfigur auf den Würfelflächen ein rechtwinkeliges Kreuz darstellt,

dessen Radien den Diagonalen parallel laufen (Reusch, Poggend. Ann. 132, 441).

Brechungsexponent des Steinsalzes

$n = 1{,}54418$ für Natriumlicht (Linie D)

s. Stefan, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 63, II, 241).

Chlorsilber = $AgCl$. Aus ammoniakalischer Lösung {111}; natürliche Krystalle: {100} {111} {110}.

Fluorcalcium (nat. Flussspath) = CaF^2. An natürlichen Krystallen sehr viele Formen bekannt; am häufigsten: {100} {111} {110} {310} {311} {421} (s. Figg. 170, 175). Zwillinge nach {111}, Fig. 185. Spaltbar nach {111}.

Kaliumplatinchlorid = K^2PtCl^6. Oktaëder. Dieselbe Form hat das analoge Ammoniumsalz, auch wenn der Wasserstoff des NH^4 durch organische Radicale ersetzt ist.

Spinell (nat.) = $MgAl^2O^4$: {111} oder Comb. {111} {311}, Fig. 154. Zwillinge nach {111}, Fig. 182.

Eisenoxydoxydul (nat. Magneteisenerz) = $FeFe^2O^4$. {111} oder {110} {111}, selten die Combination {110} {311} {531} {111} Fig. 180. Häufig Zwillinge gleich denen des Spinell.

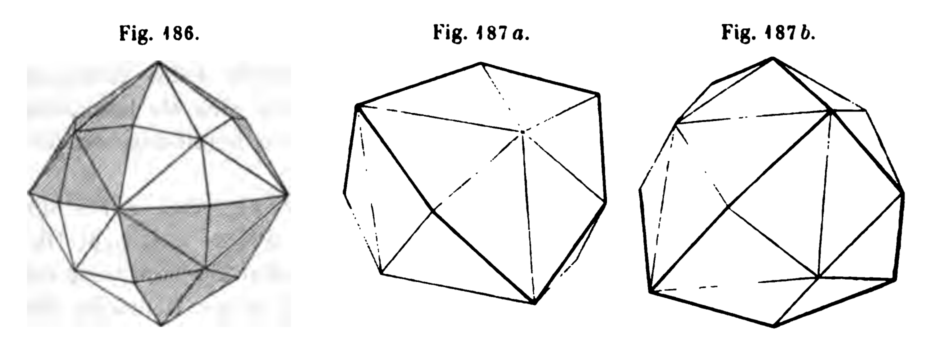
Granat (nat.) = $\ddot{R}^3 \dddot{R}^2 Si^3 O^{12}$, worin $\ddot{R} = Ca, Mg, Fe$ oder Mn, $\dddot{R} = Al, Fe$ oder Cr. Häufigste Formen: {110} Fig. 147, {110} {211} Fig. 159, {110} {211} {321} Figg. 176, 177. Brechungsexp. $n = 1{,}77$ (roth) bei rothen Granaten. Oft anomal doppelbrechend (s. C. Klein, Zeitschr. f. Kryst. 9, 96.)

§. 56. **Die tetraëdrische Hemiëdrie.** Nach S. 226 erhalten wir die hemiëdrischen Formen, indem wir die holoëdrischen durch Symmetrieebenen in eine Anzahl congruenter Theile zerlegen und die Hälfte der letzteren so auswählen, dass immer zwei in Bezug auf die theilenden Ebenen symmetrische Flächen entgegengesetzten Hälftformen angehören. Die nächstliegende Art der Theilung durch Symmetrieebenen im regulären System wird nun offenbar diejenige sein, bei welcher hierzu die drei Haupt-Symmetrieebenen, als die wichtigsten Symmetrieebenen der Krystalle, benutzt werden, und wir haben die Theilung durch dieselben zuerst anzuwenden bei dem Hexakisoktaëder, weil dieses nach §. 51 den allgemeinen Repräsentanten aller übrigen Formen darstellt, in welchem die letzteren als specielle Fälle gleichsam mit enthalten sind, so dass deren hemiëdrische Formen sich als besondere Fälle der aus dem Achtundvierzigflächner resultirenden hemiëdrischen Gestalt von selbst ergeben.

1) Denken wir uns daher ein Hexakisoktaëder (Fig. 186) durch die drei Haupt-Symmetrieebenen in acht Theile zerlegt, welche den acht Oktanten des Raumes entsprechen, und bezeichnen wir den Theil im vorderen oberen rechten Oktanten als positiv, so müssen nach obiger Definition der linke obere und der rechte untere der Vorderseite, da sie in Bezug auf (010) und (001) zu jenem symmetrisch liegen, der entgegengesetzten (negativen) Hälftform angehören und sind deshalb in der Figur durch Schraf-

firung unterschieden. Es kann also von der Vorderseite nur noch der linke untere Oktant zur positiven Hälfte gehören. Auf der Rückseite muss der rechte obere Oktant negativ sein, und ebenso der linke untere, weil diese symmetrisch zu den beiden positiven der Vorderseite in Bezug auf (100) sind, dagegen positiv der linke obere und der rechte untere. Wenn man an einem Modell des Achtundvierzigflächners die in dieser Weise ausgewählten, d. i. die vier alternirenden Oktanten von den übrigen unterscheidet, etwa durch Colorirung, so kann man sich leicht überzeugen, dass jede der beiden Hälften so beschaffen ist, wie es nach S. 226 erforderlich, d. h. beide Seiten einer jeden der drei gleichwerthigen Hauptaxen werden in gleichem Abstande von gleich vielen Flächen unter gleichen Winkeln geschnitten. Der vorliegende Achtundvierzigflächner besitzt die Parameter $1 : \frac{3}{2} : 3$; im Abstand 1 wird jede Hauptaxe beiderseits durch 4 Flächen geschnitten, welche eine $2+2$kantige Ecke bilden, in allen sechs Fällen mit denselben Winkeln; im Abstand $\frac{3}{2}$ sind es wiederum vier Flächen, welche verlängert einander schneiden würden, und die entstehenden $2+2$kantigen Ecken wären ebenfalls sämmtlich congruent; endlich ist das Gleiche der Fall für die $2+2$kantigen Ecken, welche entständen, wenn man die im Abstand 3 jede Seite einer Hauptaxe schneidenden Flächen bis dahin verlängern würde. Denken wir uns nur eine von diesen beiden Hälften der Flächen vorhanden, so bildet dieselbe eine Form, welche ebenso, wie die holoëdrische, den Raum allseitig umschliesst und die drei Hauptaxen oben und unten, rechts und links, vorn und hinten gleichartig schneidet; dasselbe gilt für die andere Hälfte. Das Hexakisoktaëder zerfällt also nach diesem Gesetze in zwei hemiëdrische Formen, und diese verhalten sich nun, wie zwei von einander ganz unabhängige Gestalten derselben Krystallreihe. Da zu jeder Fläche die parallele dem entgegengesetzten Hemiëder angehört, so sind die hierdurch entstehenden Formen nicht parallelflächig, sondern g e n e i g t f l ä c h i g, weshalb man auch oft diese Hemiëdrie die geneigtflächige nennt. Die in Fig. 186 weiss gelassenen Flächen bilden die Form Fig. 187 *a*, die schwarzen Fig. 187 *b*.

Fig. 186. Fig. 187 *a*. Fig. 187 *b*.



Jede derselben besteht aus vier Gruppen von je sechs Flächen, welche ebenso auch dem holoëdrischen Körper angehören, sich also auch in den-

selben Kanten schneiden; diese letzteren sind in den Figuren etwas schwächer gezeichnet, als die den Hemiëdern eigenthümlichen schärferen, welche dadurch entstehen, dass die Flächen verschiedener Oktanten, zwischen denen solche ausgefallen sind, zum Durchschnitt gelangen. Dadurch tritt das tetraëderähnliche Aussehen mehr hervor, welchem diese Formen ihren Namen »Hexakistetraëder« verdanken. Man bezeichnet dieselben mit

$$\varkappa\{hkl\}^{*)} = +\frac{mOn}{2} \text{ und } \varkappa\{h\bar{k}l\} = -\frac{mOn}{2}.$$

Denkt man sich die erste dieser beiden Formen um eine Hauptaxe um 90° gedreht, so gelangt sie mit der zweiten zur Congruenz, die beiden Hexakistetraëder eines und desselben Achtundvierzigflächners sind also nicht durch ihre Gestalt, sondern nur durch ihre Stellung verschieden. Da die Fläche, welche zu einer beliebigen Fläche des einen Hexakistetraëders symmetrisch ist in Bezug auf die Würfelfläche, dem entgegengesetzten Hexakistetraëder angehört, so sind diese Formen nicht symmetrisch nach den Hexaëderflächen; sie sind es jedoch in Bezug auf die Flächen des Dodekaëders, da diese jeden Oktanten symmetrisch halbiren, und vier der letzteren vollzählig vorhanden sind.

2) Wenden wir nun dasselbe Gesetz der Hemiëdrie auf die Ikositetraëder an (Fig. 188), so bilden die weiss gelassenen Flächen die hemiëdrische Form Fig. 189 *a*, die schwarzen Fig. 189 *b*, welche **Triakistetraëder**

Fig. 188.

Fig. 189 *a*.

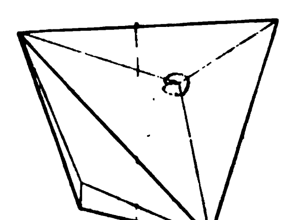
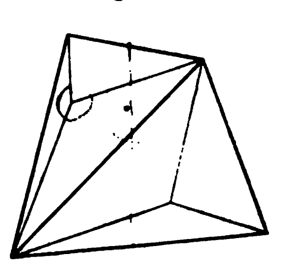


Fig. 189 *b*.



oder **Pyramidentetraëder** (auch »Trigondodekaëder«) genannt werden. Ihre Bezeichnung ist

$$\varkappa\{hkk\} = +\frac{mOm}{2} \text{ und } \varkappa\{h\bar{k}k\} = -\frac{mOm}{2}.$$

Je drei benachbarte Flächen eines solchen sind identisch in ihrer Lage mit je drei des zugehörigen Ikositetraëders, bilden also dieselben dreikantigen Ecken, deren Kanten in beiden Figuren schwächer gezeichnet sind. Ebenso, wie in der holoëdrischen Form, sind diese Kanten um so stumpfwinkeliger, je weniger das Verhältniss $h : k = m$ von 1 verschieden ist. Derartige Gruppen von je drei Flächen hat jedes Pyramidentetraëder vier, also 12 Kanten, welche denselben Winkel haben, wie die betreffenden Ikositetraëderkanten.

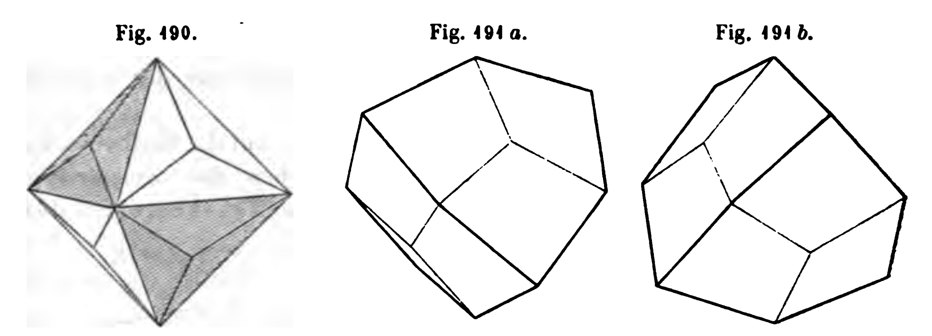
*) κ als Abkürzung von κλινος, geneigt.

Je zwei Flächen verschiedener Oktanten schneiden einander in **Kanten**, welche um so schärfer sind, je kleiner $\frac{h}{k} = m$ ist, und die je einer Diagonale einer Würfelfläche parallel laufen. Je drei solcher Kanten, deren im Ganzen sechs vorhanden sind, bilden mit drei der ersteren Art vier 3+3-kantige Ecken.

Wie das Ikositetraëder denjenigen speciellen Fall des Achtundvierzigflächners darstellt, in welchem wegen der Gleichheit zweier Indices die längsten Kanten den Winkel Null annehmen, so kann man auch die Pyramidentetraëder betrachten als diejenigen Hexakistetraëder, in welchen die an denselben (jetzt den kürzesten) Kanten zusammentreffenden Flächen paarweise in eine Ebene fallen.

3) Die Pyramidenoktaëder, demselben Gesetz der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 190, liefern zwei sogenannte **Deltoiddodekaëder** Fig. 191 *a* und *b*, welche, wie die beiden Pyramidentetraëder, einander vollkommen

Fig. 190. Fig. 191 *a*. Fig. 191 *b*.



congruent sind, wenn man das eine um eine Hauptaxe um 90⁰ dreht. Ihre Bezeichnungen sind:

$$\varkappa\{hhk\} = +\frac{mO}{2} \text{ und } \varkappa\{h\bar{h}k\} = -\frac{mO}{2}.$$

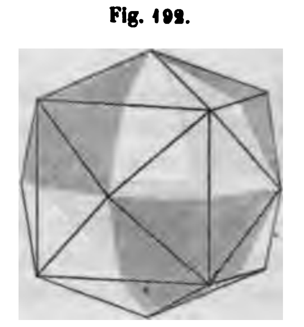
Auch hier liegen wieder in jedem Oktanten drei Flächen, welche in derselben Lage auch dem holoëdrischen Pyramidenoktaëder angehören, folglich haben die dreikantigen Ecken, deren jedes Deltoiddodekaëder vier hat, dieselben Kantenwinkel, wie die dreikantigen Ecken des Triakisoktaëders. Bei gleicher Ausdehnung der Flächen dieser Hemiëder haben die ersteren die Gestalt von »Deltoiden«, d. h. Vierecken mit dreierlei Winkeln, indem nur zwei gegenüberliegende gleich sind. Die (in den Figg. 191 stärker gezeichneten) 12 Kanten, welche dadurch entstehen, dass Flächen verschiedener Oktanten zum Durchschnitt gelangen, bilden vier dreikantige Ecken und mit denen der ersten Art sechs 2+2kantige.

Die Deltoiddodekaëder bilden denjenigen speciellen Fall der Hexakistetraëder, in welchen deren längste Kanten verschwinden, wegen der Gleichheit der beiden grösseren Indices.

4) Gehen wir nun zur Anwendung derselben Hemiëdrie auf diejenigen Achtundvierzigflächner über, deren je zwei in benachbarten Oktanten ge-

legene Flächen in eine Ebene fallen, d. h. die Pyramidenwürfel, so muss aus diesem Grunde die eine hemiëdrische Form derselben vollkommen mit der anderen zusammenfallen. Aus Fig. 192 ist ersichtlich, dass in der That die 24 Flächen des Tetrakishexaëders sowohl der positiven als der negativen Hälfte angehören; durch die tetraëdrische Hemiëdrie werden also die Pyramidenwürfel scheinbar nicht verändert. Trotzdem müssen wir den Pyramidenwürfel einer tetraëdrisch-hemiëdrisch krystallisirenden Substanz als eine hemiëdrische, nur scheinbar holoëdrische Form betrachten, denn es fehlt ihm die charakteristische Eigenschaft des holoëdrischen Tetrakishexaëders, aus acht gleichwerthigen Oktanten zu bestehen; dass vielmehr an demselben zwei benachbarte Oktanten ungleichwerthig sind, tritt in den Combinationen mit anderen Gestalten dieser Hemiëdrie hervor. Der hemiëdrische Pyramidenwürfel ist derjenige specielle Fall des Hexakistetraëders, in welchem dessen Flächen den Hauptaxen parallel sind, nur dass alsdann die positive und die negative Hälfte des Achtundvierzigflächners dieselbe Gestalt annehmen; diese ist die gemeinsame Grenzform, welcher sich die beiderlei Hexakistetraëder nähern, wenn zwei Indices sehr gross im Verhältniss zum dritten werden.

Fig. 192.



5) Dasselbe findet statt bei dem Dodekaëder, Fig. 193, da seine Flächen ebenfalls zwei benachbarten Oktanten angehören, und deshalb die beiden hemiëdrischen Formen zusammenfallen. Man kann das Rhombendodekaëder betrachten als dasjenige Deltoiddodekaëder, in welchem die Flächen den Hauptaxen parallel werden und daher die 2+2kantigen Ecken sich in vierkantige verwandeln, und offenbar liefern die beiden Deltoiddodekaëder 191 *a* und *b* in diesem Falle eine gemeinsame Grenzform.

Fig. 193.

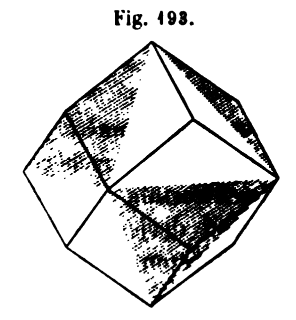
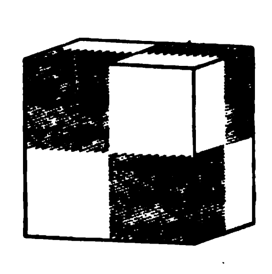


Fig. 194.



6) Dasjenige Hexakistetraëder, dessen m und $n = \infty$ sind, hat sechs den drei Haupt-Symmetrieebenen parallele Flächen, unterscheidet sich also nicht vom holoëdrischen Würfel, noch von der entgegengesetzten Hälftgestalt: Fig. 194.

7) Das Oktaëder Fig. 195, derselben Hemiëdrie unterworfen, liefert die beiden Tetraëder, Fig. 196*a* den weissen Flächen, Fig. 196*b* den schwarzen Flächen der vorigen Figur entsprechend. Die beiden entgegen-

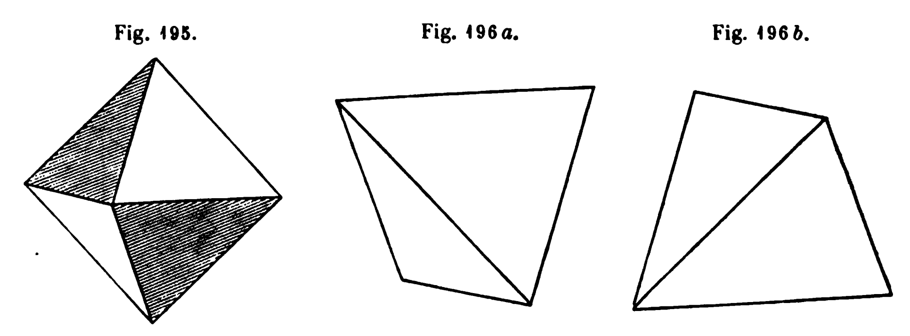


Fig. 195. Fig. 196*a*. Fig. 196*b*.

gesetzten Formen $\varkappa\{111\} = +\frac{O}{2}$ und $\varkappa\{1\bar{1}1\} = -\frac{O}{2}$ sind vollkommen congruent, da sie, wie alle Formen dieser (nach ihnen genannten) Hemiëdrie, durch eine Drehung von 90° um eine Hauptaxe zur Deckung gebracht werden können. Jedes der beiden Tetraëder besteht nur aus vier Flächen, welche einander in sechs, den Diagonalen der Hexaëderflächen parallelen Kanten schneiden, deren Winkel gleich dem Supplement des Oktaëderwinkels, d. i. 109°28′ beträgt. Die gerade Abstumpfung dieser sechs Kanten liefert demnach den Würfel, Fig. 197. Die Combination beider Formen mit vorherrschendem Hexaëder stellt Fig. 198 dar, aus welcher zugleich der krystallographische Unterschied des hemiëdrischen Würfels vom holoëdrischen

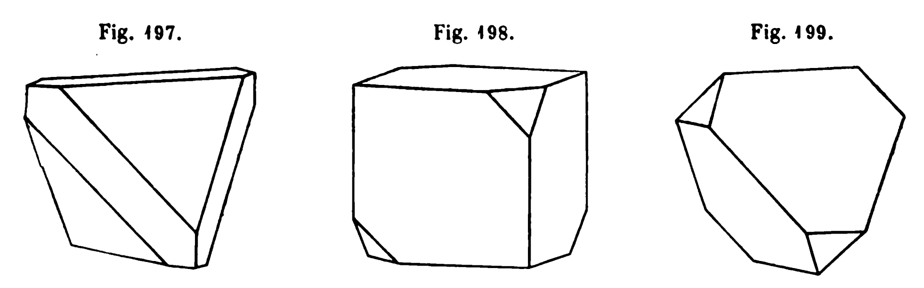


Fig. 197. Fig. 198. Fig. 199.

erhellt: an dem letzteren sind die acht Ecken vollkommen gleichwerthig, da sie je einem der gleichwerthigen acht Oktanten angehören, an dem hemiëdrischen Würfel sind vier Ecken ungleichwerthig den vier anderen, die Abstumpfung der einen ist unabhängig von derjenigen der anderen. Da das Oktaëder zu den häufigsten, weil einfachsten, Formen gehört, so gilt das Gleiche auch für die beiden Tetraëder, und es ist deshalb natürlich, dass nicht selten auch beide an demselben Krystall zusammen auftreten, wobei sie sich aber durch ihre Grössenausdehnung, ihre Oberflächenbeschaffenheit u. dergl. unterscheiden. Die Combination $\varkappa\{111\}$, $\varkappa\{1\bar{1}1\}$, das eine die Ecken des anderen abstumpfend, s. Fig. 199. Weitere Combinationen folgen bei den Beispielen.

Aus der Anschauung, dass alle Formen des regulären Systems specielle Fälle der Hexakisoktaëder sind, ergiebt sich also, dass die hemiëdrischen Gestalten einiger derselben nicht von den holoëdrischen verschieden sein können; nämlich die Pyramidenwürfel, das Dodekaëder und das Hexaëder. Wo solche Formen auftreten, kann demnach die Hemiëdrie erst durch die Combination mit anderen erkannt werden.

Diese scheinbar holoëdrischen Formen ergeben sich nun aber als wirkliche hemiëdrische Formen auch noch dadurch, dass sie die Grenzgestalten hemiëdrischer Ableitungsreihen bilden. Diese Reihen können genau in gleicher Weise durch ein Schema graphisch veranschaulicht werden, wie dies S. 250 mit den holoëdrischen Reihen geschehen ist.

Das Hexakistetraëder, als allgemeinste Form, geht durch Grösserwerden von m ($= h : k$) bis ∞ über in einen Pyramidenwürfel als Grenzform, durch Kleinerwerden von n in ein Deltoiddodekaëder, d. h. dasjenige Hexakistetraëder, dessen n (d. i. $k : l$) $= 1$, endlich durch Gleichwerden von m und n ($k = l$) in ein Pyramidentetraëder; jede dieser drei Arten von Grenzformen der Hexakistetraëder bildet wieder eine Ableitungsreihe, deren letzte Grenzglieder das Tetraëder, das Dodekaëder und der Würfel sind. So gestaltet sich hier das Schema folgendermaassen, wie nebenstehend.

$\frac{O}{2}$

$\frac{mO}{2}$ $\frac{mOm}{2}$

$\frac{mOn}{2}$

∞O ∞On $\infty O\infty$

Alles, was bei Besprechung des Ableitungsschemas für die holoëdrischen Gestalten in Bezug auf Zonenverhältnisse gesagt wurde, gilt natürlich auch hier.

Durch die tetraëdrische Hemiëdrie geht die Symmetrie nach den Hexaëderebenen verloren, und die Formen sind nur noch nach den Dodekaëderflächen symmetrisch. Dieser geringere Grad der Symmetrie gilt auch für die scheinbar holoëdrischen Gestalten; z. B. ist der tetraëdrisch hemiëdrische Würfel, obgleich geometrisch dem holoëdrischen gleich, nicht symmetrisch zu seinen eigenen Flächen, denn alsdann müssten zwei benachbarte Ecken desselben gleichwerthig sein; dies sind sie aber nicht, wie die Unabhängigkeit des Auftretens der Abstumpfung an der einen und der anderen positives und negatives Tetraëder) beweist. So treten also, wie es früher als allgemeines Gesetz der Combinationslehre angeführt wurde, in jeder dieser Reihen nur Formen mit gleichem Grade der Symmetrie mit einander in Combination.

Vermöge der geringeren Symmetrie der tetraëdrischen Krystalle gegenüber den holoëdrischen tritt zu den Formen, nach denen in dieser Abtheilung eine Zwillingsbildung stattfinden kann, noch das Hexaëder hinzu,

dessen Ebenen nun nicht mehr Symmetrieebenen darstellen, daher zwei tetraëdrische Krystalle, nach einer Hexaëderfläche zu einander symmetrisch, nicht parallel sind, sondern sich in derjenigen relativen Stellung befinden, wie die beiden entgegengesetzten Hälften einer holoëdrischen Form. Die Stellung solcher »Ergänzungszwillinge« (vergl. S. 233), wie deren mehrere bei den Beispielen im nächstfolgenden §. angeführt werden sollen, erhält man, wenn man, vom Parallelismus beider Krystalle ausgehend, den einen um 90° um eine Hauptaxe oder um 180° um eine Dodekaëdernormale dreht.

§. 57. **Beispiele tetraëdrisch-hemiëdrischer Substanzen.** Da die beiden entgegengesetzten Formen, die von einer holoëdrischen sich ableiten, genau dieselbe Gestalt besitzen, so hängt es von der ihnen gegebenen Stellung ab, welche man als positive und welche als negative bezeichnet. Eine Bedeutung gewinnt diese Unterscheidung erst dadurch, dass sie uns die Möglichkeit gewährt, eine Combination unzweideutig zu bezeichnen, indem alle in denselben Oktanten erscheinenden Hälftflächner mit demselben Vorzeichen versehen werden, die der entgegengesetzten Oktanten mit verschiedenem, denn ohne dies würde man z. B. die beiden ganz verschiedenen Combinationen, welche ein Tetraëder mit einem Triakistetraëder gleicher Stellung (welches seine Kanten zuschärft) und mit einem entgegengesetzter Stellung (welches seine Ecken dreiflächig zuspitzt) bildet, durch die Symbole nicht unterscheiden können. In den folgenden Beispielen ist der Einfachheit wegen für die Vorzeichen der Formen immer eine bestimmte Wahl getroffen, z. B. bei der Zinkblende stets das glänzende Tetraëder das positive, das matte das negative genannt, und alsdann diejenigen anderen Formen (Triakistetraëder etc.), welche in denselben Oktanten, wie das glänzende Tetraëder, liegen, als positive, die in denselben mit dem matten Tetraëder liegenden als negative bezeichnet. Es ist aber wohl zu beachten, dass durch Nichts bewiesen ist, dass dasjenige Tetraëder, welches an einem Krystall glänzend auftritt, dasselbe ist, welches an einem anderen Krystall als das glänzendere erscheint, denn die beiden von einander unabhängigen Gestalten $\varkappa\{111\}$ und $\varkappa\{1\bar{1}1\}$ verhalten sich zu einander, wie zwei verschiedene Formen, — und wir finden z. B. an demselben Fundort Flussspathkrystalle, an denen alle Oktaëderflächen matt, alle Hexaëderflächen glänzend sind, neben solchen, an denen genau das Entgegengesetzte stattfindet. Unter Annahme jener, oben als nicht bewiesen bezeichneten Hypothese hat man gefunden, dass die eine abgeleitete Form nur als positive, die andere nur als negative Hälfte vorkommt, und hat die in Rede stehende Hypothese dadurch gestützt geglaubt, dass zwar die beiden Tetraëder zuweilen zusammen auftreten, von den selteneren hemiëdrischen Formen aber fast nie die beiden entgegengesetzten Hälften beobachtet wurden. Das letztere erscheint aber ganz natürlich, nach der S. 226 gemachten Anmerkung, nach welcher die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens derselben an einem Krystall ausserordentlich klein ist. Eine wirklich sichere Unterscheidung positiver und negativer Formen kann also die

des Auftretens derselben, ihre Oberflächenbeschaffenheit und dergl. mals liefern, sondern nur physikalische Eigenschaften, welche unabhängig 1 von den zufälligen Umständen bei der Bildung der Krystalle. Eine he Eigenschaft ist z. B. die Fähigkeit der Krystalle, eine verschiedene lichkeit nach verschiedenen Richtungen zu besitzen, wie sie sich in den elmässigen Aetzfiguren documentirt. Aetzt man z. B. eine Dodekaëder-he, so ist für die entstehenden Aetzfiguren eine Symmetrie nach der geren Diagonale des Rhombus nicht erforderlich, weil der Krystall als niëdrischer eine solche Symmetrie nicht besitzt. In der That hat Becke eigt, dass die dodekaëdrischen Spaltungsflächen der Zinkblende solche h rechts und links verschieden gestalteten Aetzfiguren liefern und man rdurch die beiden angrenzenden Oktanten stets unzweifelhaft unter-eiden kann, während die in denselben auftretenden Flächen und deren bildung keinen sicheren Anhalt für die Unterscheidung liefern. Ein teres Mittel für dieselbe können die elektrischen Eigenschaften dar-ten. Die Normale zur Oktaëderfläche, nach der S. 229 angeführten Defi-on eine Symmetrieaxe, verbindet ungleichwerthige Oktanten miteinander, l dieser Gegensatz ihrer beiden Pole prägt sich z. B. bei der Zinkblende h Friedel und Curie dadurch aus, dass ihre entgegengesetzten Enden m Erwärmen polar elektrisch werden. Bei Leitern des galvanischen ms ist wahrscheinlich ein Unterschied in dem Widerstand des Krystalls handen, je nachdem der Strom vom positiven zum negativen Tetraëder r umgekehrt den Krystall durchläuft.

Diamant = C. Einfache tetraëdrische Krystalle $\varkappa\{111\}$ oder $\varkappa\{321\}$ ten. Die meisten Krystalle scheinen Ergänzungszwillinge zu sein nach n in Fig. 200 dargestellten Gesetze, d. h. zwei Tetraëder in gekreuzter llung, symmetrisch zu einander in Bezug auf die Hexaëderflächen und

Fig. 200.

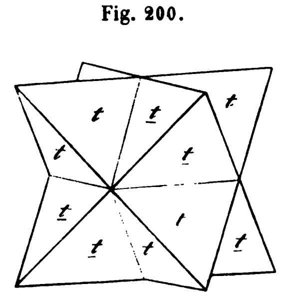
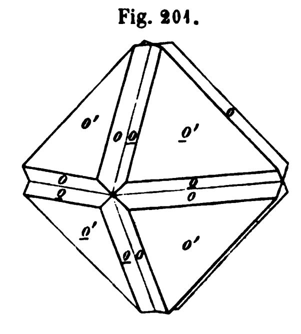


Fig. 201.



irch einander gewachsen. Während die genau der Figur entsprechende usbildung des Gesetzes bei dem weiterhin angeführten Fahlerz vorkommt, itt bei dem Diamanten zu dem Tetraëder o stets noch das Gegentetraëder $= \varkappa\{1\bar{1}1\}$ in nahezu gleicher Grösse der Flächen, so dass die Form der g. 201 entsteht, gleichsam ein Oktaëder, dessen Kanten durch Rinnen

ersetzt sind, und dessen acht Flächen gleiche Oberflächenbeschaffenheit zeigen müssen, da sie sämmtlich dem gleichen Tetraëder $\varkappa\{1\bar{1}1\}$, aber zweier Krystalle, angehören. Da die Einkerbungen der Kanten oft nahezu oder auch vollständig verschwinden (durch grössere Ausdehnung der nach aussen gekehrten Tetraëderflächen), so resultiren schliesslich Oktaëder von vollkommen holoëdrischer Ausbildung. Wahrscheinlich sind auch die übrigen holoëdrisch erscheinenden Krystallformen des Diamanten, z. B. das besonders häufig in Combination (s. Fig. 174) mit dem Oktaëder auftretende {321}, als derartige Durchkreuzungszwillinge zu deuten. Ausser diesem Gesetz kommt bei oktaëdrischen Diamantkrystallen auch oft das gewöhnliche Verwachsungsgesetz (Fig. 182) vor. Weniger häufige Formen des Diamanten sind {100}, {110}. — Spaltbar vollkommen nach {111}. Brechungsexponent $n = 2,413$ roth, 2,419 gelb, 2,428 grün (Des Cloizeaux). Sehr häufig zeigen die Krystalle unregelmässige Doppelbrechung, jedenfalls in Folge innerer Spannungen, da dieselbe z. B. regelmässig in der Nähe von Einschlüssen auftritt. Ausdehnung durch die Wärme sehr gering: 0,00000354 (kubisch).

Zinkblende $= ZnS$. Fig. 202 stellt die folgende Combination gewisser natürlicher Krystalle dar: $d = \{110\}$, $t = \varkappa\{111\}$ glänzend, $-t = \varkappa\{1\bar{1}1\}$ meist matter, $y = \varkappa\{311\}$, $-i = \varkappa\{2\bar{1}1\}$, $h = \{100\}$. Sehr häufig Zwillinge, meist von ähnlicher Ausbildung, wie die holoëdrischen (Fig. 203), aber dadurch verschieden, dass an der Zwillingsgrenze positive (o') und negative (o) Tetraëderflächen einander gegenüberliegen; in Folge dessen erhält man zwar die Stellung des einen Krystalls, indem man ihn aus der mit dem zweiten parallelen Orientirung um die Normale zur Oktaëderfläche um 180° dreht, aber die beiden Krystalle sind nicht symmetrisch zu der betreffenden Oktaëderfläche.

Fig. 202.

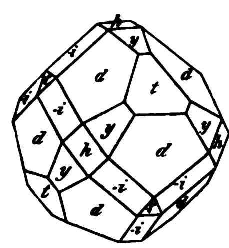


Fig. 203.

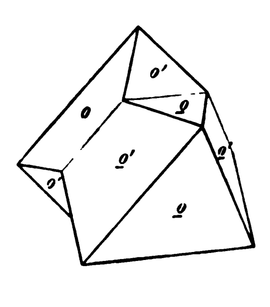
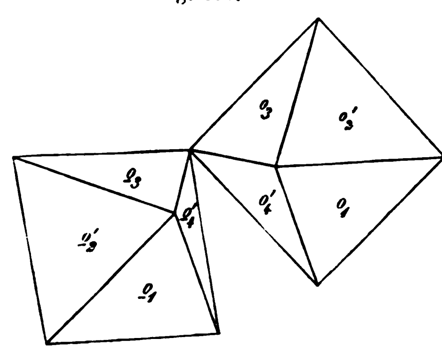


Fig. 204.



Will man unter »Zwillingsebene« nur eine solche Fläche der Krystalle verstehen, nach welcher dieselben zu einander symmetrisch sind auch

unter Berücksichtigung ihrer Oberflächenbeschaffenheit, so muss man die Verwachsung als eine solche nach {211} bezeichnen, denn nach einer Fläche dieses Ikositetraëders, welche der Zone der Zwillingsaxe angehört, sind die beiden Krystalle vollständig symmetrisch, wie man leicht aus Fig. 204 ersieht, in welcher beide Krystalle genau die gleiche Orientirung besitzen, wie in Fig. 203, und in welcher die Flächen des positiven Tetraëders durch Accente an *o* unterschieden sind. — Spaltbar vollkommen nach {110}. Diatherman. Polar pyroëlektrisch nach den trigonalen Axen (s. S. 281), nach denen die tetraëdrischen Formen hemimorph sind. Brechungsexponenten:

$$n = 2{,}341 \text{ roth,}$$
$$2{,}369 \text{ gelb.}$$

Fahlerz = $4(Cu^2, Fe, Zn)S + (As, Sb)^2 S^3$. Die häufigsten Combinationen sind: Fig. 205: $\varkappa$ {111}, {110}; Fig. 206: $\varkappa$ {111}, $\varkappa$ {211}; nicht sel-

Fig. 205.

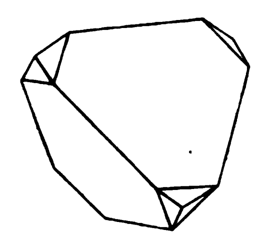


Fig. 206.

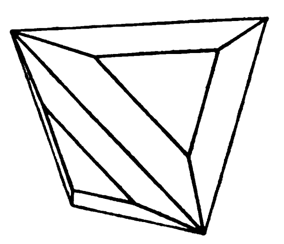
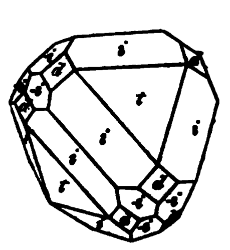


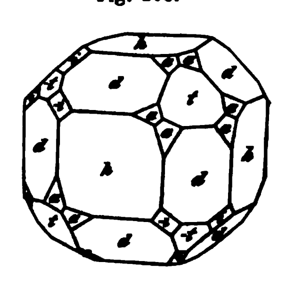
Fig. 207.



ten auch die in Fig. 207 dargestellte complicirtere Combination: $t = \varkappa\{111\}$, $i = \varkappa\{211\}$, $d = \{110\}$, $-i = \varkappa\{2\bar{1}1\}$.

Boracit = $Mg^7 Cl^2 B^{16} O^{30}$. Gewöhnliche Formen: $h = \{100\}$, $d = \{110\}$, $t = \varkappa\{111\}$ glänzend, $-t = \varkappa\{1\bar{1}1\}$ klein und matt, $-i = \varkappa\{2\bar{1}1\}$ als sehr schmale Abstumpfung. Fig. 208 zeigt alle diese Formen und ausserdem das nicht häufige Hexakistetraëder $\varkappa$ {531}. Die natürlichen Boracitkrystalle, obgleich in ihren Formen vollkommen regulär und lange als ausgezeichnetes Beispiel für die tetraëdrische Hemiëdrie betrachtet, sind nur pseudoregulär und in Wirklichkeit sehr complicirte Verwachsungen rhombischer Krystalle. Bei 265° C. verlieren dieselben jedoch plötzlich ihre Doppelbrechung und wandeln sich in einfach brechende Krystalle um, so dass von da ab bis zum Schmelzpunkt äussere Form und optisches Verhalten übereinstimmen. Hiernach ist die Boracitsubstanz dimorph, und ihre rhombische Form besitzt Dimensionen, welche es gestatten, dass die Krystalle in ihren regelmässigen Verwachsungen pseudoreguläre Gestalten hervorbringen, welche durch

Fig. 208.



Messung nicht von regulären zu unterscheiden sind; **Mallard**, s. Zeitschr. f. Kryst. 9, 398. Ueber die Aetzfiguren des Boracit siehe **Baumhauer**, ebenda 3, 337; über die polare Pyroëlektricität **Mack**, ebenda 8, 503.

§. 58. **Die pentagonale Hemiëdrie.** Zerlegt man die holoëdrischen Formen des regulären Systems statt durch die Haupt-Symmetrieebenen, wie es bei der Herleitung der tetraëdrischen Hemiëdrie geschah, durch die sechs Dodekaëderflächen, so erhält man 24 Theile, welche an dem Hexakisoktaëder Fig. 209 abwechselnd weiss gelassen und schraffirt sind. Diese Unterscheidung entspricht zugleich den beiden Hälften, welche so ausgewählt sind, dass jedesmal zwei in Bezug auf eine Dodekaëderfläche zu einander symmetrische Theile entgegengesetzten Hälften angehören. Betrachten wir nun eine der beiden Hälften für sich, so ist leicht zu ersehen, dass jede Seite der drei Hauptaxen von gleich vielen Flächen unter demselben Winkel in gleichem Abstande geschnitten wird, wie es bei der tetraëdrischen Hemiëdrie der Fall war, dass aber die aus der einen Hälfte der Flächen bestehende Form hier keine Symmetrie nach $\{110\}$ zeigen kann, sich in dieser Beziehung also gerade umgekehrt verhält, wie die entsprechende der tetraëdrischen Hemiëdrie.

1) Die Hälftflächner der Hexakisoktaëder nach diesem Gesetze bestehen somit je aus der halben Anzahl derjenigen Flächenpaare, welche an den mittleren Kanten *b* liegen, s. Fig. 209. Die in dieser Figur weiss gelassenen Flächen für sich geben die Form Fig. 210*a*, die schwarzen diejenige Fig. 210*b*, zwei Formen, von welchen die eine durch eine Drehung

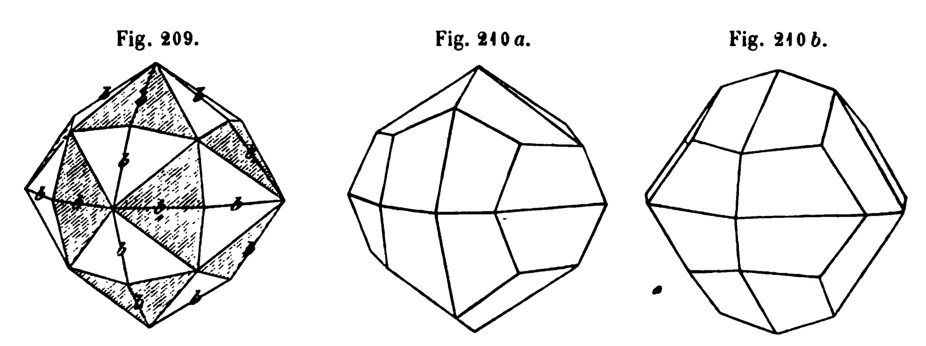


Fig. 209. Fig. 210*a*. Fig. 210*b*.

um 90° (Drehungsaxe eine Hauptaxe) mit der anderen zur Deckung gebracht werden kann und welche, wie ersichtlich, nicht mehr symmetrisch sind nach den Dodekaëderflächen, wohl aber noch nach den Würfelflächen. Diese beiden, aus einem Achtundvierzigflächner entstehenden Hälftgestalten heissen **Dyakisdodekaëder** (auch **Diploëder**) und werden bezeichnet:

$$\pi\{hlk\} = + \left[\frac{mOn}{2}\right] \text{ und } \pi\{hkl\} = - \left[\frac{mOn}{2}\right],$$

um anzudeuten, dass dieselben aus parallelen*) Flächenpaaren bestehen,

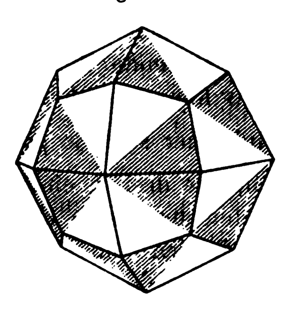
*) π als Abkürzung von παράλληλος.

shalb die in Rede stehende Hemiëdrie zum Unterschied von der vor-
gehenden (der geneigtflächigen) auch die parallelflächige genannt
rd. Welches von den beiden Dyakisdodekaëdern man als positives,
lches als negatives bezeichnet, ist der freien Wahl überlassen; ist die-
be aber für einen Krystall einmal getroffen, so ist damit das Vorzeichen
er übriger hemiëdrischer Formen desselben bestimmt.

Die Dyakisdodekaëder besitzen je 12 Kanten, welche mit den Kanten b
s ursprünglichen Achtundvierzigflächners identisch sind, 12 schärfere,
lche ebenfalls in den drei Haupt-Symmetrieebenen liegen, endlich 24,
welchen sich je zwei Flächen eines Oktanten schneiden. Die Ecken
d daher 2+2kantige, 2+1+1kantige und dreikantige. Was die Com-
ıationen verschiedener Dyakisdodekaëder mit einander betrifft, so sind
se sehr mannigfaltig je nach dem Parameterverhältniss und der Gleich-
t oder Verschiedenheit ihres Vorzeichens. S. u. Beisp.

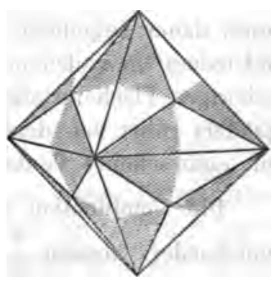
2) Bei den Ikositetraëdern fallen je zwei Flächen in eine Ebene (Fig. 211),
ı denen die eine dem +, die andere dem — Diploëder angehört; die
iden letzteren unterscheiden sich also weder
ı einander, noch von der holoëdrischen Form.
enn demnach an einem hierher gehörigen
ystall die Flächen eines Ikositetraëders vor-
nmen, so tritt diese Form anscheinend holoë-
sch auf. Die Grenzform der Dyakisdodekaëder,
lcher sich dieselben nähern, wenn die Zahlen
ınd l (m und n) nur wenig verschieden sind,
ein Ikositetraëder, welches sich geometrisch
ht unterscheiden lässt von dem holoëdrischen.
eses ist jedoch aufzufassen als derjenige Acht-
dvierzigflächner, dessen $k = l$ ($m = n$) ist;
s der hemiëdrischen Krystallreihe angehörige Ikositetraëder als dasjenige
akisdodekaëder, dessen $k = l$ ($m = n$) ist, in Folge dessen alle in den
upt-Symmetrieebenen liegenden Kanten gleiche Winkel haben.

Fig. 211.



3) Bei den Pyramidenoktaëdern findet genau
s Gleiche statt, sie müssen mit allen Flächen
einem hierher gehörigen hemiëdrischen Kry-
ıll auftreten, weil dasjenige positive Dyakisdo-
kaëder, dessen $h = k$ ($n = 1$), vollkommen zu-
mmenfällt mit dem zugehörigen negativen
Fig. 212), die gemeinschaftliche Grenzform
ider das scheinbar holoëdrische Triakisok-
ëder ist.

Fig. 212.



4) Betrachten wir dagegen die Tetrakis-
xaëder, d. h. diejenigen Achtundvierzigflächner,
eren $l = 0$ ($m = \infty$), so finden wir, dass hier durch die Hemiëdrie eine
estalt entsteht, welche nur die halbe Flächenzahl besitzt. Denn der

Pyramidenwürfel ist ein Hexakisoktaëder, bei welchem je zwei, an einer in der Haupt-Symmetrieebene liegenden Kante zusammenstossende Flächen in eine Ebene fallen, da sie derselben Hauptaxe parallel laufen. Von solchen Flächenpaaren ist in dieser Hemiëdrie nur die Hälfte vorhanden, also auch nur die Hälfte der Flächen des Pyramidenwürfels, Fig. 213. Die weiss gelassenen Flächen für sich liefern die in Fig. 214 *a*, die schwarzen die in Fig. 214 *b* dargestellte Form, welche nach der Gestalt

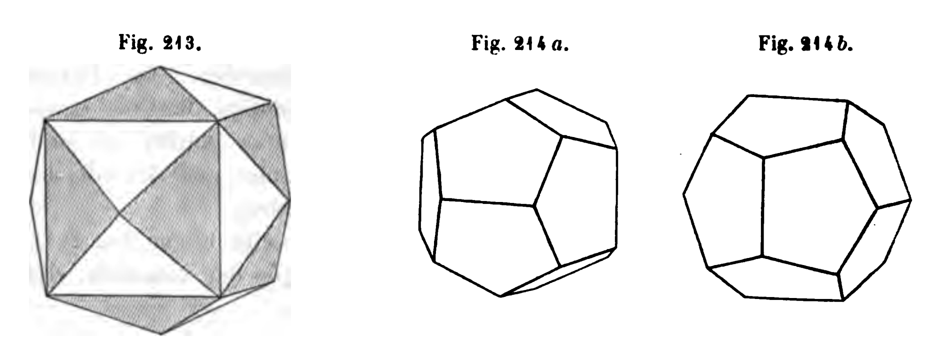


Fig. 213. Fig. 214 *a*. Fig. 214 *b*.

ihrer Flächen Pentagondodekaëder heissen, und nach denen die in Rede stehende Hemiëdrie benannt ist. Die Pentagondodekaëder besitzen sechs Kanten, welche je einer Hauptaxe parallel gehen und um so stumpfwinkeliger sind, je grösser das Verhältniss $\frac{h}{k} = n$ ist, und 24 Kanten, von denen je drei in einem Oktanten eine dreikantige Ecke bilden; die von Kanten der ersten und zweiten Art gebildeten Ecken sind 2+1kantige. Die beiden durch diese Hemiëdrie aus einem Tetrakishexaëder entstehenden Formen werden bezeichnet $\pi\{kh0\} = + \left[\frac{\infty O n}{2}\right]$ und $\pi\{hk0\} = - \left[\frac{\infty O n}{2}\right]$. Ebenso, wie ein Pyramidenwürfel das Grenzglied einer Reihe von Achtundvierzigflächnern bildet, so ist jedes Pentagondodekaëder die Grenzform derjenigen Ableitungsreihe von Dyakisdodekaëdern, deren $\frac{h}{k} = n$ gleich demjenigen des Pentagondodekaëders ist. Dasselbe muss daher aufgefasst werden als derjenige specielle Fall eines Dyakisdodekaëders, in welchem $l = 0$ $(m = \infty)$ und deshalb jedes der zusammengehörigen Flächenpaare nur eine Ebene darstellt. Der Name »Dyakisdodekaëder« rührt von derselben Auffassung her, da man sich diese Form als ein »gebrochenes Pentagondodekaëder« vorstellen kann.

Die Combination eines Dyakisdodekaëders mit demjenigen Pentagondodekaëder, dessen $\frac{h}{k} = n$ denselben Werth 2 hat, ist in Fig. 215 dargestellt; das letztere muss, wenn beide gleiche Vorzeichen haben, die Kanten zwischen den zusammengehörigen Flächen gerade abstumpfen. In der Combination mehrerer Pentagondodekaëder gleichen Vorzeichens schärft

s;enige mit grösserem $\frac{h}{k} = n$ die hexaëdrischen, d. s. die den Hauptaxen rallelen Kanten des anderen zu. Die; bei den Krystallen dieser Heëdrie sehr häufigen Combinationen der Pentagondodekaëder mit den ein;hsten Formen des Systems sollen bei den Beispielen angeführt werden.

Fig. 215.

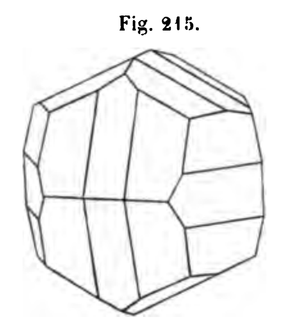
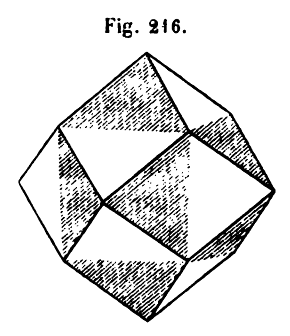


Fig. 216.



5) Das Rhombendodekaëder ist derjenige Achtundvierzigflächner, bei lchem je vier Flächen in eine Ebene fallen, von denen zwei, s. Fig. 216, n positiven, die anderen beiden dem negativen Dyakisdodekaëder ange·en; in diesem Falle können sich also die beiden Hälftformen weder von ander, noch von dem holoëdrischen Dodekaëder unterscheiden.

6) Das Hexaëder, als dasjenige Hexakisoktaëder, dessen $k = l = 0$ $= n = \infty$), hat acht in eine Ebene fallende Flächen,' deren vier dem ıen, vier dem anderen Dyakisdodekaëder angehören, Fig. 217. Die Grenzstalt beider für jenen speciellen Werth der Indices ist also identisch der ırfel, welcher somit scheinbar holoëdrisch auftreten muss.

Fig. 217.

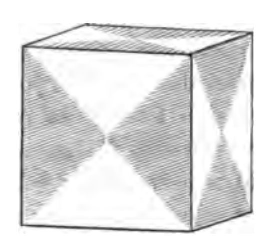
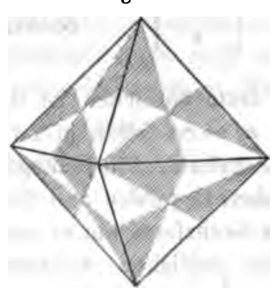


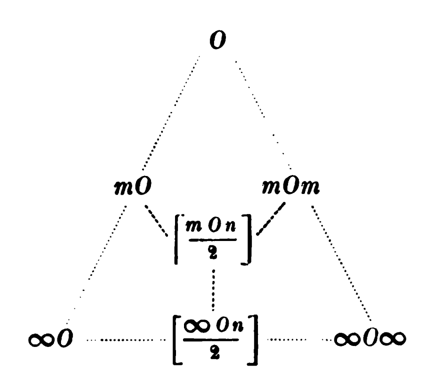
Fig. 218.



7) Das Gleiche ist beim Oktaëder der Fall, denn dieses repräsentirt jeder Fläche die Lage von sechs Hexakisoktaëderflächen für den Fall, ss $h = k = l$ ($m = n = 1$); von diesen sechs gehören drei der einen, ei der anderen hemiëdrischen Form an, Fig. 218; diese beiden fallen so vollkommen zusammen und gleichen geometrisch dem holoëdrischen ktaëder.

Das Gesetz der pentagonalen Hemiëdrie bringt somit nur bei den Achtundvierzigflächnern und den Pyramidenwürfeln geometrisch abweichende Gestalten hervor, die Dyakisdodekaëder und die Pentagondodekaëder, welche nur nach den Hexaëder-, nicht nach den Dodekaëderflächen symmetrisch sind; die übrigen Formen bleiben unverändert. Wenn demnach an einem regulär krystallisirenden Körper nur der Würfel, das Oktaëder, Dodekaëder, ferner Ikositetraëder und Pyramidenoktaëder gefunden werden, so bleibt es unentschieden, ob derselbe der holoëdrischen oder der pentagonal-hemiëdrischen Abtheilung des regulären Systems angehört. Treten aber die Flächen von Pyramidenwürfeln und Achtundvierzigflächnern auf, und zeigt sich ein constanter Unterschied der beiden Hälften dieser Formen, so dass die eine entweder gar nicht, oder mit anderer Oberflächenbeschaffenheit oder dergl. erscheint, so krystallisirt die betreffende Substanz hemiëdrisch.

Ganz in derselben Weise, wie S. 279 für die tetraëdrisch-hemiëdrischen Gestalten, kann man die Ableitungsreihen der pentagonal-hemiëdrischen Formen durch ein Schema übersichtlich darstellen. Die Dyakisdodekaëder $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ bilden den allgemeinsten Fall; jedes derselben liegt in drei verschiedenen Ableitungsreihen, deren Endglieder die Ikositetraëder, die Pyramidenoktaëder und die Pentagondodekaëder sind; denn ein Dyakisdodekaëder nähert sich in seiner Gestalt um so mehr einem Ikositetraëder, je weniger n und m verschieden, für $n = m$ fällt es damit zusammen; es gleicht dagegen immer mehr einem Pyramidenoktaëder, je weniger n von 1 verschieden ist, das Pyramidenoktaëder mit dem gleichen m ist das Grenzglied der Reihe, d. h. dasjenige Dyakisdodekaëder, dessen $n = 1$; je grösser m, desto ähnlicher ist das Dyakisdodekaëder einem Pentagondodekaëder, für $m = \infty$ fallen je zwei Flächen in eine Ebene, es resultirt die erwähnte Grenzform. Die Pentagondodekaëder ihrerseits bilden wieder eine Reihe zwischen Hexaëder und Dodekaëder und nähern sich der einen oder der anderen Grenzform um so mehr, je grösser oder je geringer der Unterschied ihrer endlichen Parameter ist. Die Reihen der Ikositetraëder und Triakisoktaëder unterscheiden sich selbstverständlich nicht von den holoëdrischen.



Da die pentagonal-hemiëdrischen Formen der Symmetrie nach den Dodekaëderflächen entbehren, so kann eine solche Fläche Zwillingsebene sein, und es resultirt in diesem Falle ein sogenannter »Ergänzungszwilling«, in welchem gleichsam die holoëdrische Symmetrie wieder hergestellt wird (s. im folg. §. unter »Eisenkies«).

§. 59. Beispiele pentagonal-hemiëdrischer Substanzen:

Zinnjodid = $Sn J^4$. Aus Schwefelkohlenstoff in grossen Krystallen zu erhalten: {111}, π{210}, {100}, {211}.

Eisenkies (Pyrit) = $Fe S^2$. Es finden sich sehr mannigfaltige Formen und Combinationen, von denen die häufigsten: {100} — {100}, π{210} Fig. 219 — {100}, {111} — π{210} — {111}, π{210} Fig. 220 — {100}, π{321} Fig. 221 — π{210}, {111}, π{321} Fig. 222, eine Combination,

Fig. 219.

Fig. 220.

Fig. 221.

Fig. 222.

Fig. 223.

in welcher die letzte Form die Combinationskanten der beiden ersteren abstumpft. Nicht selten ist auch die in Fig. 215 abgebildete Combination π{412}, π{201}. Zwillinge nach {110}, bestehend aus zwei in gekreuzter Stellung durch einander gewachsenen Pentagondodekaëdern, Fig. 223.

Speiskobalt = $Co As^2$. Gewöhnliche Combination: {100}, {111}, weniger häufig mit {110} und {211}; äusserst selten sind π{310}, π{510} u. a.

Glanzkobalt = $(Co, Fe) As S$. Combinationen gewöhnlich: {111}, π{210}, {100}.

Die drei letztgenannten Mineralien, von denen namentlich das erste, der Eisenkies, ausserordentlich häufig krystallisirt vorkommt, haben den Umstand gemeinsam, dass an einem Krystall sich stets nur die hemiëdrischen Formen eines Vorzeichens finden, also niemals oder doch fast niemals positive Pentagondodekaëder mit negativen, oder mit negativen Dyakisdodekaëdern. Zugleich haben dieselben drei Körper eine physikalische Eigenschaft gemein: während nämlich ein Theil der Krystalle jedes dieser Mineralien thermoëlektrisch sich gegen Kupfer positiv verhält, sind die

übrigen negativ gegen dieses Metall (vergl. S. 182). G. Rose hat (Ber. d. Berl. Akad. 1870) die Vermuthung aufgestellt, dass die positiven Krystalle die hemiëdrischen Formen der einen Stellung, die elektrisch negativen die entgegengesetzten zeigen, und hat auch mehrfache krystallographische Unterschiede zwischen beiden Klassen gefunden, welche für jene Hypothese sprechen.

• Kalialaun = $KAl[SO^4]^2 + 12H^2O$. Aus wässeriger Lösung {111}, untergeordnet {110}, {100}; aus alkalischer Lösung {100}; aus salzsaurer Lösung dieselben Formen mit π{210}. Elasticitätscoëfficienten nach Beckenkamp:

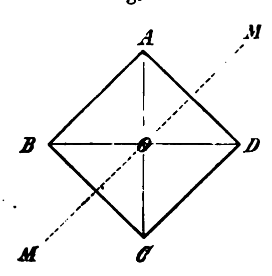
parallel einer Hauptaxe . . . 1886 Kilogr.
parallel einer Dodekaëdernormalen 2009 -

Brechungsexponenten, nach Ch. Soret (Arch. d. sc. phys. Genève 1883. 10, 300).

Linie	B:	n = 1,45284
-	C:	- 1,45383
-	D:	- 1,45634
-	E:	- 1,45919
-	F:	- 1,46167
-	G:	- 1,46615

Die Krystalle des Alauns zeigen sehr oft eine Einwirkung auf das polarisirte Licht, welche man früher dadurch zu erklären suchte, dass sie aus getrennten dünnen Schichten zusammengesetzt seien und somit, wie ein Satz dünner Glasplatten (s. S. 68), das durchgehende Licht theilweise polarisiren (Lamellarpolarisation). Reusch (Poggendorff's Ann. d. Phys. 132, 618) zeigte zuerst, dass die beobachteten Erscheinungen sich so nicht erklären lassen, da dieselben u. A. gerade um so besser auftreten, je klarer die Krystalle im Innern sind. Schleift man aus einem solchen oktaëdrischen Krystall eine Platte parallel einer Würfelfläche, $ABCD$ Fig. 224, wo AC, BD und die Normale zur Platte die Richtungen der drei Hauptaxen sind, und bringt diese im parallelen Licht zwischen gekreuzte Nicols, so dass AC der Schwingungsebene des einen, BD derjenigen des andern parallel ist, so erscheinen nur zwei Streifen, || AC und BD, ein durch die Mitte gehendes Kreuz bildend, dunkel, und bleiben es auch bei der Drehung des Präparates, während die vier dreieckigen Felder AOB, AOD, BOC COD aufgehellt erscheinen und meist das Hellblau der Interferenzfarben erster Ordnung zeigen. Presst man den Krystall || MM, nachdem man || AD und BC Dodekaëderflächen angeschliffen hat, so hellen sich die Felder AOD und BOC noch mehr auf, während AOB und COD sich verdunkeln und bei einer bestimmten Pressung völlig einfachbrechend erscheinen.

Fig. 224.



Dies erklärt Reusch dadurch, dass die Schichten des Krystalls in den vier Sectoren parallel deren Hypotenuse eine Spannung besitzen, welche veranlasst, dass in den Feldern *AOD* und *BOC* die optische Elasticität in der Richtung *AD* und *BC* kleiner ist, als senkrecht dazu; in den Sectoren *AOB* und *COD* in den Richtungen *AB* und *CD* kleiner, als in der normalen. Eine Pressung parallel *MM* muss alsdann die optische Elasticität in dieser Richtung vergrössern, also in den Feldern *AOD* und *BOC* die Differenz derselben vergrössern, daher die Aufhellung, in den Feldern *AOB* und *COD* dieselbe indess verringern, daher die Verdunkelung. Wie die Entstehung einer solchen Spannung zu denken ist, wurde bereits S. 138 auseinandergesetzt; bei den Alaunkrystallen müsste demnach zuerst ein Krystallgerippe, drei einander durchschneidende dünne Schichten parallel den drei Haupt-Symmetrieebenen und begrenzt von den Oktaëderkanten, in nahezu ungestörter Lagerung der Theilchen sich gebildet haben; die hohlen Oktaëderflächen wären dann durch allmählichen Absatz von Schichten, parallel den Oktaëderflächen, ausgefüllt worden, wobei diese Schichten durch eine beim Festwerden vor sich gehende Contraction eine Spannung parallel ihrer Flächenausdehnung erfuhren (s. übrigens auch S. 141).

Isomorph mit dem gewöhnlichen Alaun sind u. a. noch folgende analog zusammengesetzte Verbindungen:

Kaliumeisenalaun: $KFe[SO^4]^2 + 12H^2O$. Beobachtete Formen: {111}, {100}.

Chromalaun: $KCr[SO^4]^2 + 12H^2O$. Leicht in sehr grossen Oktaëdern zu erhalten.

Cäsiumalaun: $Cs\,Al[SO^4]^2 + 12H^2O$. Combination: {111}, {100}, *x*{210}.

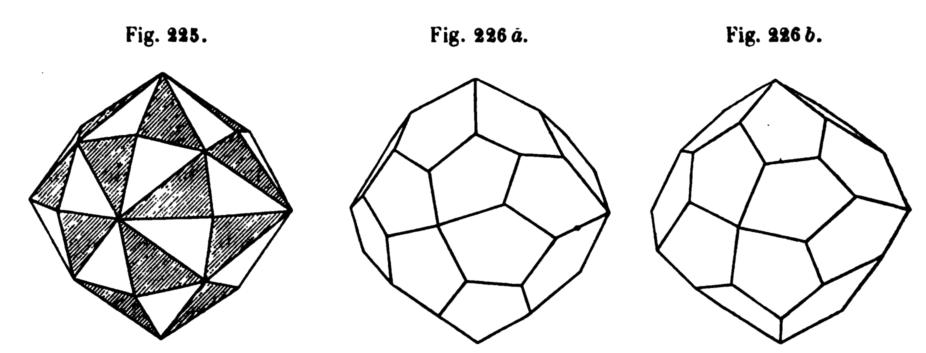
Thalliumalaun: $TlAl[SO^4]^2 + 12H^2O$. Oktaëder. Brechungsexponent für *Na*-Gelb: $n = 1,4888$ Fock (Zeitschr. f. Kryst. 4, 594; s. auch Soret, a. a. O.).

Ammoniumalaun = $H^4N.Al[SO^4]^2 + 12H^2O$. Damit isomorph auch die substituirten Alaune, d. h. solche, in denen der Wasserstoff des Ammoniums durch organische Radicale ersetzt ist. Ueber die Erscheinungen der anomalen Doppelbrechung des Ammoniumalauns s. Klocke, Jahrb. f. Min. 1880 u. 81. Zeitschr. f. Kryst. 5, 523 u. 6, 415).

§. 60. **Die plagiëdrische Hemiëdrie.** Ausser den beiden Arten der Zerlegung der holoëdrischen Formen, welche zu der tetraëdrischen und der pentagonalen Hemiëdrie führen, ist offenbar nur noch eine einzige möglich, nämlich die Zerlegung durch sämmtliche neun Symmetrieebenen des regulären Systems zugleich. Theilen wir durch die sechs Dodekaëderflächen und durch die drei Haupt-Symmetrieebenen ein Hexakisoktaëder in congruente Theile, so resultiren deren 48, welche in Fig. 225 abwechselnd weiss gelassen und schraffirt sind. Betrachtet man die eine der beiden Hälften für sich, z. B. die der weissgelassenen Flächen, so entspricht diese

vollständig dem Gesetze der Hemiëdrie, denn, wie man ohne Weiteres sieht, werden die Hauptaxen an allen sechs Seiten im Abstande 1 geschnitten durch je eine vierkantige Ecke mit gleichen Winkeln, in den Abständen $\frac{3}{2}$ (das Hexakisoktaëder hat die Parameter 1 : $\frac{3}{2}$: 3) in spitzeren vierkantigen Ecken, welche nicht minder unter einander gleiche Winkel besitzen, endlich im Abstande 3 ebenfalls in sechs gleichen vierkantigen Ecken, welche noch spitzer sind. Die aus der Hälfte der Flächen bestehende Form ist also nach oben und unten, rechts und links, vorn und hinten gleich beschaffen.

1) Die plagiëdrisch-hemiëdrischen Formen des Hexakisoktaëders entstehen sonach durch Auswahl aller abwechselnden einzelnen Flächen, Fig. 225. Die weiss gelassenen Flächen für sich liefern die in Fig. 226 *a*, die schwarzen die in Fig. 226 *b* dargestellte Form, deren Flächen bei gleicher

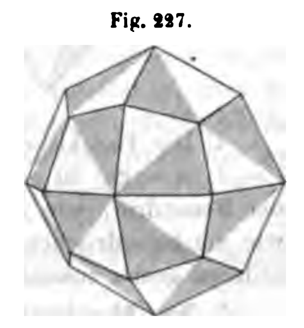

Fig. 225. Fig. 226 *a*. Fig. 226 *b*.

Ausdehnung die Gestalt ungleichseitiger Fünfecke haben. Keine Kante eines solchen Vierundzwanzigflächners, welcher Pentagon-Ikositetraëder genannt wird, geht einer Symmetrieebene parallel, und da zu jeder Fläche des Achtundvierzigflächners die, sei es nach einer Würfel-, sei es nach einer Dodekaëderebene, symmetrisch gelegene Fläche dem entgegengesetzten Hemiëder angehört, so ist ein solches Pentagon-Ikositetraëder eine geometrische Form, welche keine einzige Symmetrieebene besitzt. Alle hemiëdrische Formen, welche sich von solchen holoëdrischen ableiten, die Symmetrieebenen haben, selbst aber keine solchen besitzen, zeigen eine gemeinsame geometrische Eigenschaft: die beiden Hälftgestalten können durch keine Aenderung der Stellung des einen zur Congruenz gebracht werden, sie verhalten sich zu einander, wie ein rechter zu einem linken Handschuh. Man nennt solche entgegengesetzte hemiëdrische Formen enantiomorph und eine Hemiëdrie, welche dergleichen liefert, ebenfalls eine enantiomorphe. Da die Flächen des einen Pentagon-Ikositetraëders die symmetrisch zugehörigen zu allen Flächen des anderen sind, so sind die beiden Formen zu einander natürlich symmetrisch, sowohl in Bezug auf die Ebenen des Hexaëders, als auch in Bezug auf die des Dodekaëders, d. h. das eine ist das Spiegelbild des andern, möge als Spiegelebene eine Würfel- oder eine Dodekaëderfläche dienen.

Stellt man irgend eine der drei Hauptaxen des Hexakisoktaëders vertical aufrecht und betrachtet die sechs, einem Oktanten angehörigen Flächen, so gehört jedesmal von den beiden obersten Flächen die rechts gelegene dem einen Pentagon-Ikositetraëder, die links gelegene dem entgegengesetzten an: man nennt daher das erstere das rechte Fig. 226 $a = \gamma\{hlk\} = \frac{mOn}{2} r$, das letztere das linke Fig. 226 $b = \gamma\{hkl\} = \frac{mOn}{2} l$ *), und gebraucht diese Bezeichnung überhaupt nur für enantiomorphe Gestalten.

2) Diejenigen Achtundvierzigflächner, deren k und l gleich gross sind ($m = n$), die Ikositetraëder, müssen an den Krystallen, an denen die übrigen Hexakisoktaëder als Pentagon-Ikositetraëder erscheinen, derselben Hemiëdrie unterliegen. Die beiden Flächen, von denen die eine dem rechten, die andere dem linken Hemiëder angehört, fallen hierbei, wie Fig. 227 zeigt, in eine Ebene, die beiden Hälftgestalten unterscheiden sich daher weder von einander, noch von der holoëdrischen Gestalt. Dieselben sind nunmehr aufzufassen als diejenigen Pentagon-Ikositetraëder, deren $k = l$ ($m = n$), daher die in den vierkantigen Ecken zusammenstossenden Kanten in die Haupt-Symmetrieebenen fallen. Dieser Gestalt nähert sich die eines Pentagon-Ikositetraëders um so mehr, je weniger sich k von l unterscheidet. Das Ikositetraëder ist die Grenzform der Reihe der ersteren und sonach jetzt ebenfalls als eine hemiëdrische Form zu betrachten. Dass sie in der That, trotz ihrer geometrischen Uebereinstimmung mit dem holoëdrischen Ikositetraëder, nur scheinbar holoëdrisch ist, geht daraus hervor, dass sie in Combinationen keine Gleichwerthigkeit entsprechender Theile rechts und links von einer Hexaëder- oder Dodekaëderfläche zeigt. Eine schiefe Abstumpfung, z. B. der an den dreikantigen Ecken zusammenstossenden Kanten eines wirklich holoëdrischen Ikositetraëders, würde eine gleiche, aber entgegengesetzt geneigte Fläche, d. h. eine Zuschärfung der Kante erfordern. Dies ist, wie aus der weiterhin beschriebenen Form des Salmiak (Fig. 233) hervorgeht, nicht der Fall mit dem in Rede stehenden hemiëdrischen Ikositetraëder, s. Fig. 227, in welcher die Ungleichwerthigkeit der rechten und linken Seite der Kanten durch die Schraffirung angedeutet ist.

Fig. 227.



3) Diejenigen Hexakisoktaëder, deren $h = k$ ($n = 1$) ist, die Pyramidenoktaëder, entstehen dadurch, dass stets zwei an den kürzesten Kanten des Achtundvierzigflächners benachbarte Flächen in eine Ebene fallen; von

*) Diese Hemiëdrie wird auch die gyroëdrische genannt, daher zu ihrer Unterscheidung von den beiden andern dem Symbol der Hexakisoktaëder ein γ vorgesetzt ist.

diesen gehört aber, Fig. 228, die eine jedesmal der einen Hälftform, die andere der zweiten an; die Pyramidenoktaëder, dieser Hemiëdrie unterworfen, liefern demnach ebenfalls zwei Formen, welche geometrisch mit einander und mit den holoëdrischen ganz identisch sind.

Fig. 228.

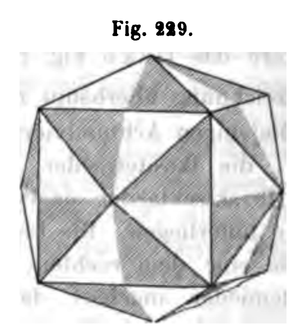


Fig. 229.

4) Die Tetrakishexaëder, als diejenigen Achtundvierzigflächner, deren $l = 0$ ($m = \infty$) ist, müssen als hemiëdrische Formen nach diesem Gesetz der Hemiëdrie, wie aus Fig. 229 ersichtlich, ebenfalls mit allen Flächen, wie die holoëdrischen, erscheinen, da die eine Hälfte der Flächen mit der anderen genau zusammenfällt.

5) Das Rhombendodekaëder ist derjenige Achtundvierzigflächner, von welchem je vier Flächen in eine Ebene fallen; von diesem gehören nun zwei dem einen, die beiden anderen dem zweiten Hemiëder an; diese beiden Formen müssen daher gänzlich zusammenfallen und sich nicht von dem holoëdrischen Dodekaëder unterscheiden (s. Fig. 230).

Fig. 230.

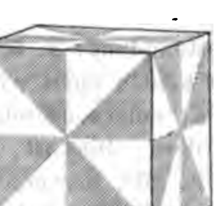


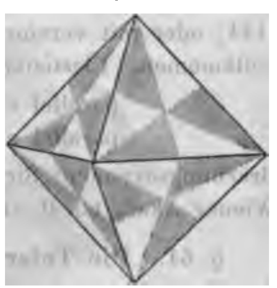
Fig. 231.

6) Das Hexaëder ist derjenige Achtundvierzigflächner, bei welchem je acht, eine $4 + 4$kantige Ecke bildende Flächen dieselbe Lage haben; davon gehören vier dem einen, vier dem anderen Pentagon-Ikositetraëder an; diese beiden haben in diesem speciellen Falle zur Grenzform das Hexaëder (s. Fig. 231).

7) Dasjenige Pentagon-Ikositetraëder endlich, dessen $h = k = l$ ($m = n = 1$), hat in jedem Oktanten drei Flächen, welche in eine Ebene

fallen, und diese ist die Oktaëderfläche; das entgegengesetzte hat ebenfalls drei Flächen in jedem Oktanten, die in die gleiche Ebene zusammenfallen. Das Oktaëder, vollkommen dem holoëdrischen gleichend, ist die Grenzgestalt, sowohl der rechten, als der linken Pentagon-Ikositetraëder, wenn deren Indices gleich gross werden.

Fig. 232.



In dieser Hemiëdrie gleichen somit alle Formen den holoëdrischen, mit einziger Ausnahme der Achtundvierzigflächner, welche nur mit der halben Flächenzahl auftreten. So lange also an einer Substanz noch kein Hexakisoktaëder beobachtet worden ist, kann es zweifelhaft sein, ob dieselbe der holoëdrischen oder der plagiëdrisch-hemiëdrischen Abtheilung des regulären Systems angehört. Daher ist es gekommen, dass der hierher gehörige Salmiak bis zur Entdeckung der Pentagon-Ikositetraëder an demselben durch Tschermak für holoëdrisch gehalten wurde, ebenso der Cuprit, an welchem diese Hemiëdrie erst ganz neuerdings von Miers beobachtet worden ist.

Kupferoxydul (Cuprit) = Cu^2O. Die natürlichen Krystalle zeigen {111}, {100}, {110}, {211}, selten γ{896}.

Chlorammonium (Salmiak) = H^4NCl. Die häufig beobachteten Formen sind: {211}, {110}, {100}, {111}, von denen namentlich die erste oft in auffallender Verzerrung ausgebildet erscheint. Aus Lösung erhaltene grosse Krystalle, welche Tschermak untersuchte (s. Zeitschr. f. Kryst. 7, 599), zeigten {211} mit schmalen Abstumpfungen der Kanten (Fig. 233);

Fig. 233.

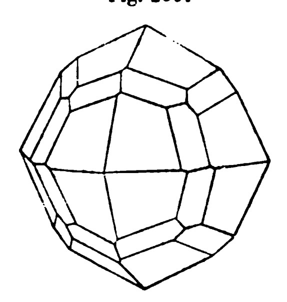
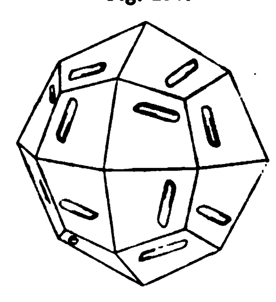


Fig. 234.



diese erwiesen sich als schief und entsprachen ungefähr einem Pentagon-Ikositetraëder γ{875}. Ausserdem zeigten die Flächen des Ikositetraëders Aetzfiguren (in Fig. 234 vergrössert dargestellt), deren Gestalt auch ohne das Auftreten der vorerwähnten Form beweisen würde, dass die Flächen nicht symmetrisch sein, also einem hemiëdrischen Ikositetraëder angehören müssen. Da ausnahmslos die Kaliumsalze den analog zusammengesetzten Ammoniumsalzen isomorph sind, und isomorphe Körper in Bezug auf das

Vorhandensein einer Hemiëdrie übereinzustimmen pflegen, so gehört höchst wahrscheinlich hierher:

Chlorkalium (Sylvin) = KCl. Aus wässeriger Lösung {100}, aus roher Potaschelösung {111}; natürliche Krystalle Combinationen von {100} mit {111} oder mit vereinzelten Flächen von Hexakisoktaëdern. Spaltbar {100} vollkommen. Elasticitätscoëfficienten nach Koch:

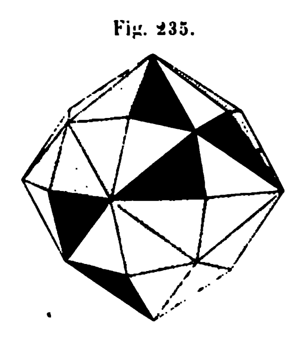
parallel einer Hauptaxe	4009	Kilogr.
parallel einer Dodekaëdernormalen	2088	„

Brechungsexponent für Na-Licht $n = 1{,}49031$ (s. Stefan, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 63, II, 241).

§. 61. **Die Tetartoëdrie des regulären Systems.** Es wurde bereits S. 227 erwähnt, dass durch Anwendung zweier verschiedener Hemiëdrien bei einer Form, welche der Hemiëdrie nach mehreren Gesetzen fähig ist, tetartoëdrische Formen entstehen können, welche ebenso wie die hemiëdrischen die Bedingung erfüllen, dass jede Seite einer Symmetrieaxe, sowie die mehrerer gleichwerthiger, von gleich vielen Flächen in gleichem Abstande geschnitten werden. Die Zahl dieser Flächen ist aber natürlich nur ein Viertel von derjenigen, welche beim holoëdrischen Körper dieselbe Axe in demselben Abstande schneidet. Um die möglichen Arten der Tetartoëdrie im regulären System kennen zu lernen, haben wir dieselben nur an dem allgemeinen Repräsentanten aller Formen, dem Hexakisoktaëder, festzustellen, da sie alsdann für die übrigen Formen sich von selbst ergeben.

Denken wir uns z. B. einen Achtundvierzigflächner hemiëdrisch werdend nach dem zuletzt betrachteten, dem Gesetz der plagiëdrischen Hemiëdrie, so fallen die in Fig. 235 (genau entsprechend der Fig. 225) von links unten nach rechts oben schraffirten Flächen aus; unterwerfen wir die Form gleichzeitig auch noch der pentagonalen Hemiëdrie, so müssen, analog der Fig. 209, auch noch die von links oben nach rechts unten schraffirten Flächen fortfallen, d. h. die Hälfte von den vorher übriggebliebenen. Es resultirt also eine tetartoëdrische Form, aus den 12 weissbleibenden Flächen bestehend, welche der allgemeinen Bedingung der Hemiëdrie genügt: denn jede der sechs gleichwerthigen Hälften der Hauptaxen wird von zwei Flächen im Abstand 1, von zwei im Abstand n und von ebenso viel in m geschnitten, und ein jedes dieser Flächenpaare schliesst in allen sechs Fällen denselben Winkel ein. Wenn wir dagegen auf den der trapezoëdrischen Hemiëdrie, wie vorher, unterworfenen Achtundvierzigflächner, Fig. 236, statt der pentagonalen, noch die tetraëdrische Hemiëdrie anwenden, bei welcher die Flächen in den abwechselnden Oktanten, von links oben nach rechts

Fig. 235.



unten schraffirt, ausfallen, wie in Fig. 186, so bleiben wiederum nur 12 Flächen übrig. Endlich ist nur noch ein Fall übrig, die gleichzeitige Anwendung der pentagonalen und der tetraëdrischen Hemiëdrie; in Fig. 237

Fig. 236.

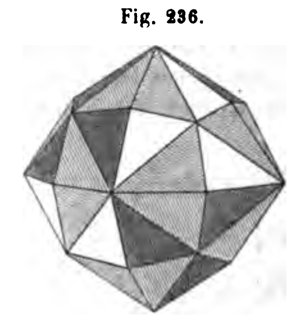
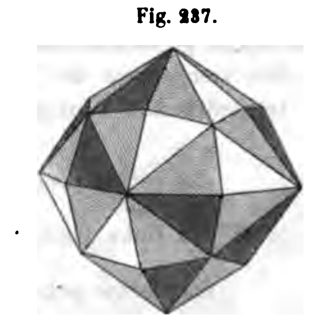


Fig. 237.



sind die durch die erstere fortfallenden Flächen von links unten nach rechts oben, die durch die zweite verschwindenden von rechts unten nach links oben schraffirt. Vergleicht man diese drei Figuren mit einander, so sieht man, dass die 12 übrig bleibenden Flächen in allen drei Fällen dieselben sind; die Form, welche aus einem Hexakisoktaëder durch zweimalige Hemiëdrie entsteht, ist also dieselbe, welche Arten von Hemiëdrie man auch zu ihrer Herleitung anwende. Es giebt somit im regulären Systeme nur eine Art von Tetartoëdrie.

Ein Tetartoëder eines Achtundvierzigflächners erhalten wir nach Obigem z. B., wenn wir von einem Hexakistetraëder, welches von jenem abgeleitet ist, die abwechselnden Flächen ausfallend und die übrigen allein vorhanden denken, Fig. 238. Die weiss gelassenen Flächen dieser Figur für sich liefern uns das sogenannte tetraëdrische Pentagondodekaëder, Fig. 239 *a*, die schraffirten Flächen für sich das entgegengesetzte Fig. 239 *b*. Diese beiden Formen können durch keine Drehung zur Deckung

Fig. 238.

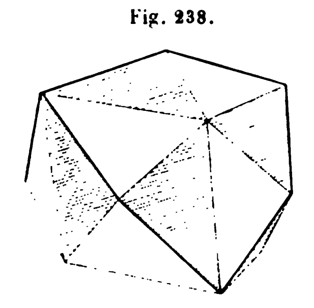


Fig. 239 *a*.

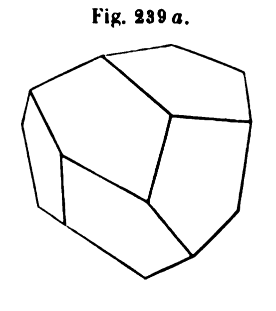
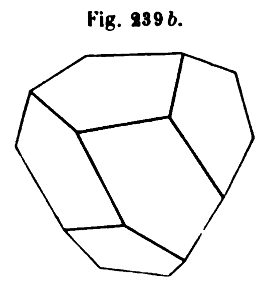


Fig. 239 *b*.



gebracht werden, sie sind enantiomorph. Wir bezeichnen das erstere als das »rechte«, das zweite als das »linke« tetraëdrische Pentagondodekaëder. Ihre Combination würde das Hexakistetraëder liefern, welches selbst aber wieder nur die Hälfte der Flächen des Achtundvierzigflächners darstellt; die andere Hälfte, das entgegengesetzte (negative) Hexakistetraëder,

hat genau dieselbe Gestalt, liefert also durch abermalige Hemiëdrie ebenfalls ein rechtes und ein linkes, enantiomorphes, tetraëdrisches Pentagondodekaëder, deren ersteres mit dem obigen rechten durch Drehung von 90° um eine Hauptaxe zur Congruenz gebracht werden kann, während das linke vom linken positiven sich ebenfalls nur durch seine Stellung unterscheidet. Die vier, durch die Tetartoëdrie aus einem Hexakisoktaëder abgeleiteten tetraëdrischen Pentagondodekaëder werden folgendermassen bezeichnet:

das rechte positive: $\varkappa\pi\{lkh\} = +\frac{mOn}{4}r$

das linke positive: $\varkappa\pi\{klh\} = +\frac{mOn}{4}l$

das rechte negative: $\varkappa\pi\{k\bar{l}h\} = -\frac{mOn}{4}r$

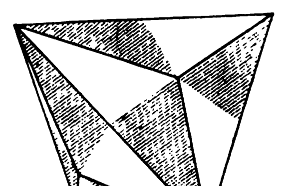
das linke negative: $\varkappa\pi\{l\bar{k}h\} = -\frac{mOn}{4}l.$

Die Flächen dieser Formen sind bei gleicher Centraldistanz unsymmetrische Fünfecke; je drei in einen Oktanten gehörige bilden eine dreikantige Ecke, welche identisch ist mit derjenigen der Dyakisdodekaëder, und zwar die eines rechten Tetartoëders mit der dreikantigen Ecke des positiven Dyakisdodekaëders Fig. 210 *a*, die jedes linken mit der entsprechenden des negativen Fig. 210 *b*. Solcher dreikantiger Ecken hat jedes tetraëdrische Pentagondodekaëder vier, alle übrigen Ecken sind 1 + 1 + 1 kantige. Im Ganzen haben diese Gestalten 30 Kanten von viererlei Art. Es ist selbstverständlich, dass dieselben, wie alle enantiomorphen Formen, keine Symmetrieebenen besitzen.

2) Dieselbe Tetartoëdrie, auf diejenigen Hexakisoktaëder (Fig. 240) angewandt, deren $k = l$ $(m = n)$ ist, d. h. auf die Ikositetraëder, liefert von jedem der beiden Pyramidentetraëder (Fig. 241), welche durch einmalige Hemiëdrie entstehen, eine rechte und eine linke Hälftgestalt, welche sich

Fig. 240.

Fig. 241.



nicht von einander unterscheiden. Je näher die Zahlenwerthe von k und l einander sind, desto ähnlicher erscheinen die beiden entgegengesetzten tetraëdrischen Pentagondodekaëder einander und dem Pyramidentetraëder; für den speciellen Fall $k = l$ fallen sie zusammen, und es resultirt als

gemeinschaftliche Grenzform beider das Triakistetraëder, welches sich nicht von dem hemiëdrischen unterscheidet.

3) Ganz analog liefert diese Tetartoëdrie bei den Triakisoktaëdern, Fig. 242, Formen, welche geometrisch identisch sind mit den hemiëdrischen Deltoiddodekaëdern, Fig. 243, welche aber aufzufassen sind als die gemein-

Fig. 242.

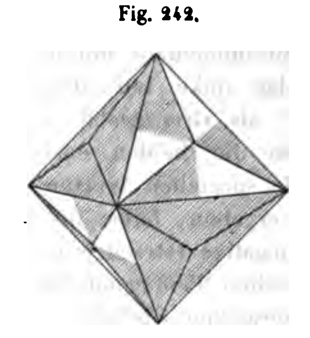
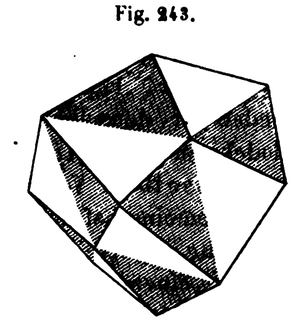


Fig. 243.



schaftlichen Grenzformen je eines rechten und linken tetraëdrischen Pentagondodekaëders, für den Fall $h = k$ ($n = 1$), da in diesem jene beiden Formen vollkommen in eine, nämlich das Deltoiddodekaëder, zusammenfallen.

4) Wenden wir das Gesetz der Tetartoëdrie auf die Tetrakishexaëder an, wie es in Fig. 244 geschehen ist, so resultiren 12 Flächen, welche eine Gestalt bilden, die sich geometrisch nicht von dem Pentagondodekaëder der Hemiëdrie unterscheidet. In der That liefert, wie aus Fig. 245 ersichtlich, die tetraëdrische Hemiëdrie keine neue Form aus dem Pentagondodekaëder, da dessen Flächen ja in zwei benachbarten Oktanten liegen. In

Fig. 244.

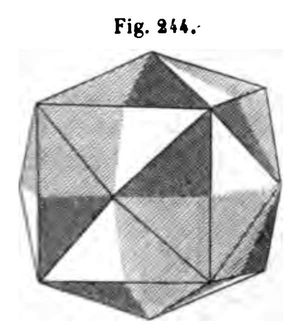


Fig. 245.

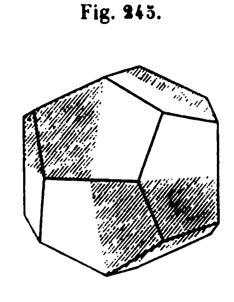


Fig. 246.

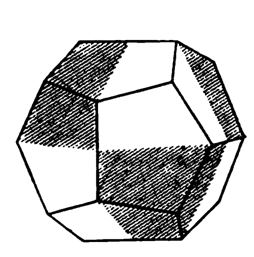


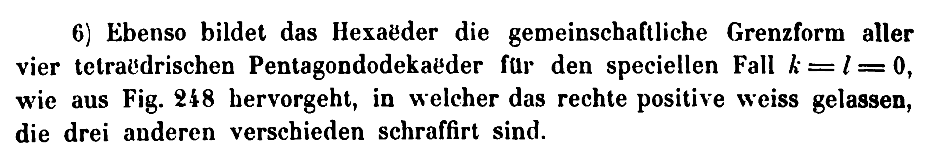
Fig. 244 stellen die weissen Flächen das rechte positive tetraëdrische Pentagondodekaëder für den Grenzfall $l = 0$ ($m = \infty$) dar; dieselben liefern für sich das Pentagondodekaëder Fig. 245, welches wir in der Hemiëdrie als positives bezeichnet haben und jetzt das »rechte« nennen wollen. Die in Fig. 244 doppelt schraffirten 12 Flächen bilden das linke positive tetraëdrische Pentagondodekaëder für denselben Grenzfall; diese Flächen für sich allein umschliessen das in Fig. 246 dargestellte Pentagondodekaëder,

welches zusammenfällt mit dem in der Hemiëdrie das »negative« genannten, in der Tetartoëdrie als »linkes« zu bezeichnenden. Unterscheiden wir die beiden enantiomorphen Tetartoëder der negativen vier Oktanten ebenso, indem wir dasjenige das »rechte« nennen, zu dem die oben rechts an der verticalen Hauptaxe gelegene Fläche gehört, wenn man auf den Oktanten hin sieht, und welches congruent ist mit dem rechten positiven, und indem wir das andere das »linke« nennen, so ist leicht einzusehen, dass das erstere in dem Grenzfall $l = 0$ ($m = \infty$) zusammenfällt mit dem »linken« Pentagondodekaëder, Fig. 246, dagegen das linke tetraëdrische Pentagondodekaëder für denselben Werth von l als Grenzgestalt das »rechte« Pentagondodekaëder liefert. Während also die beiden enantiomorphen Tetartoëder desselben Vorzeichens für die speciellen Werthe $k = l$ und $h = k$ eine gemeinschaftliche Grenzform ergeben, fallen für den Werth $l = 0$ das rechte positive und das linke negative tetraëdrische Pentagondodekaëder zu einem einzigen symmetrischen Pentagondodekaëder zusammen, während dasjenige der entgegengesetzten Stellung die gemeinschaftliche Grenzform des linken positiven und des rechten negativen tetraëdrischen Pentagondodekaëders ist.

5) Die Tetartoëdrie, angewendet auf das Rhombendodekaëder, kann eine davon verschiedene Form nicht liefern, da dies bei keiner der drei Hemiëdrien stattfindet, also auch durch das Zusammenwirken zweier nicht möglich ist. So ist aus Fig. 247 ersichtlich, dass für den speciellen Fall $h = k$ und $l = 0$ das rechte positive Tetartoëder (weiss gelassen) mit dem linken positiven, dem rechten negativen und dem linken negativen, welche alle drei, aber in verschiedener Richtung, schraffirt sind, zusammenfällt, so dass das scheinbar holoëdrische Dodekaëder die gemeinschaftliche Grenzform für alle vier Tetartoëder bildet.

Fig. 247. Fig. 248.





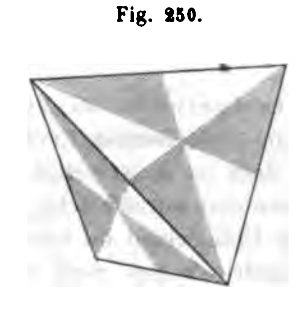
6) Ebenso bildet das Hexaëder die gemeinschaftliche Grenzform aller vier tetraëdrischen Pentagondodekaëder für den speciellen Fall $k = l = 0$, wie aus Fig. 248 hervorgeht, in welcher das rechte positive weiss gelassen, die drei anderen verschieden schraffirt sind.

7) Für den Fall des Oktaëders, $h = k = l$, endlich werden je drei einem Oktanten angehörige Flächen der tetraëdrischen Pentagondodekaëder parallel; die resultirende Grenzform hat statt 12 nur vier Flächen und

fällt mit dem Tetraëder zusammen, wie Fig. 249 beweist. Wie aus derselben, sowie aus Fig. 250 ersichtlich, geben für jenen Fall das rechte positive (die weissen Flächen) und das linke positive (die schraffirten Flächen)

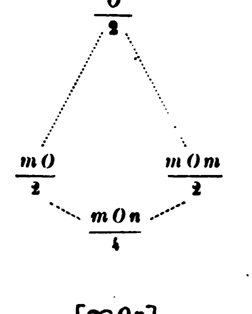
Fig. 249.

Fig. 250.



ein und dasselbe Tetraëder, während das entgegengesetzte Tetraëder die gemeinschaftliche Grenzform der beiden enantiomorphen negativen Tetartoëder ist.

Treten also die Flächen des Oktaëders mit denen eines Pyramidenwürfels in einer Combination zusammen, so erscheint ersteres als Tetraëder, letzteres als Pentagondodekaëder, und das Zusammentreten dieser beiden anscheinend hemiëdrischen Formen verschiedener Art ist es, welches für die bisher nachgewiesenen Beispiele dieser Tetartoëdrie besonders charakteristisch ist. Die tetartoëdrische Natur des Tetraëders, wie des Pentagondodekaëders, tritt dadurch hervor, dass die Combination eines Tetraëders mit dem Pentagondodekaëder der einen Stellung (Fig. 245) und diejenige desselben Tetraëders mit dem entgegengesetzten Pentagondodekaëder (Fig. 246) enantiomorph sind; bringt man die beiden Pentagondodekaëder dieser Combinationen in parallele Stellung, so werden die Tetraëder entgegengesetzt, und umgekehrt. Dies gilt natürlich auch dann noch, wenn in einer Combination beide Tetraëder vorhanden sind, sobald dieselben nur durch ihre Ausbildung oder durch die sie begleitenden Formen deutlich unterschieden sind.

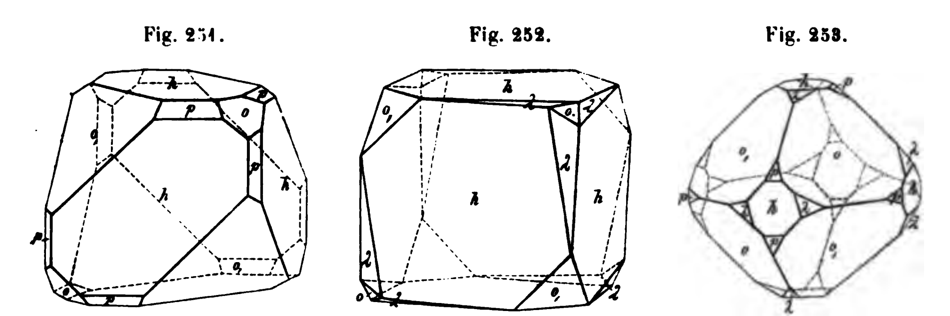


Das Schema der Ableitungsreihen erhält in dieser Abtheilung des regulären Systems die nebenstehende Gestalt. Das tetraëdrische Pentagondodekaëder stellt den allgemeinsten Fall dar und nähert sich in seiner Form mehr einem Deltoiddodekaëder oder Pyramidentetraëder oder endlich einem Pentagondodekaëder, je nach den Werthen der Indices.

Da die tetartoëdrischen Gestalten nach keiner Ebene symmetrisch sind, so kann in dieser Abtheilung jede Krystallfläche, also auch eine Hexaëder- oder Dodekaëderfläche, als Zwillingsebene einer regelmässigen Verwachsung fungiren.

§. 62. Beispiele tetartoëdrisch regulär krystallisirender Substanzen.

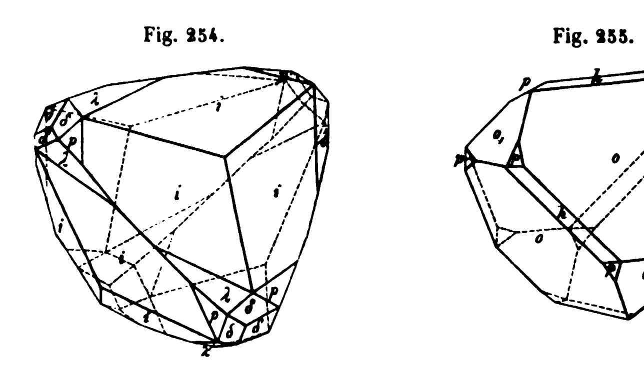
Barytsalpeter = $Ba[NO^3]^2$. Die gewöhnliche Form der aus wässriger Lösung entstehenden Krystalle ist eine Combination von Würfel und Oktaëder, doch ist meist schon durch ungleiche Ausdehnung der Flächen des letzteren eine tetraëdrische Ausbildung zu erkennen. Scacchi, welcher auch einen Unterschied im Glanz der Flächen beider Tetraëder fand, wies die Tetartoëdrie zuerst nach durch Beobachtung einer Combination derselben Formen mit einem Pentagondodekaëder und einem $\varkappa\pi\{hkl\}$. Baumhauer beobachtete auf den Hexaëderflächen von Krystallen, welche beide Tetraëder mit einem Pentagondodekaëder combinirt zeigten, unsymmetrische Streifen und Aetzfiguren, welche den Würfel als einen tetartoëdrischen charakterisiren und einem linken positiven tetraëdrischen Pentagondodekaëder entsprechen. Ausführliche Untersuchungen über die Krystallisation dieses Salzes stellte Wulff an (Zeitschr. f. Kryst. 4, 133 f.). Derselbe erhielt aus reiner wässriger Lösung die in Fig. 251 dargestellte Combination: $h = \{100\}$, $o_{,} = \varkappa\pi\{1\bar{1}1\}$, $o = \varkappa\pi\{111\}$, $p = \varkappa\pi\{201\}$, in welcher die Stellung des herrschenden Tetraëders zum Pentagondodekaëder die gleiche ist, wie sie Scacchi und Baumhauer fanden. In derselben Lösung bildeten sich


Fig. 251. Fig. 252. Fig. 253.

aber auch würfelförmige Krystalle, Fig. 252, mit Flächen eines linken positiven tetraëdrischen Pentagondodekaëders. Gestalten, welche den von Scacchi beobachteten im Habitus ähnlich waren, wurden aus einer mit Natronsalpeter versetzten Lösung erhalten, nämlich Combinationen (Fig. 253) der nur wenig verschiedenen Tetraëder mit untergeordnetem Hexaëder, Pentagondodekaëder $\varkappa\pi\{201\}$ und einem linken positiven tetraëdrischen Pentagondodekaëder, welches ungefähr die Lage von $\varkappa\pi\{421\}$ hatte. Die complicirtesten Formen lieferten Lösungen, welche gleichzeitig mit Kalisalpeter, Natronsalpeter und Zucker versetzt waren; dieselben zeigten vorherrschend $i = \varkappa\pi\{211\}$, das Tetartoëder λ und das Pentagondodekaëder $p = \varkappa\pi\{210\}$,

ein Krystall auch das negative Deltoiddodekaëder $\delta = \varkappa\pi\{221\}$, s. Fig. 254. In allen diesen Fällen sind die beobachteten Tetartoëder der Achtundvierzigflächner solche, dass sie im Grenzfall des Parallelismus mit einer Hauptaxe (d. h. wenn ein Index = 0 wird) in dasjenige Pentagondodekaëder übergehen, welches dem gleichzeitig beobachteten entgegengesetzt ist. Eine

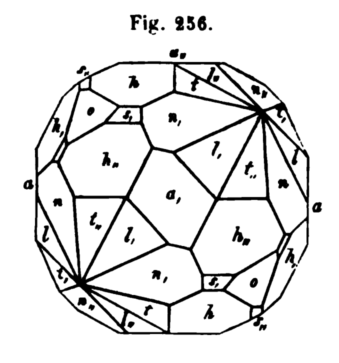
Fig. 254. Fig. 255.



der Lösungen lieferte Krystalle von abweichender Form, insofern das herrschende Tetraëder gegen das Pentagondodekaëder die umgekehrte Stellung hatte, Fig. 255. Die flächenreichste bisher beobachtete Combination des salpetersauren Baryum fand Lewis (Zeitschr. f. Kryst. 2, 64) an einem zufällig gebildeten Krystalle. Derselbe ist in Fig. 256 in senkrechter Projection auf die vordere Hexaëderfläche (100) dargestellt und zeigt folgende Formen:

$$a = \{100\} = \infty O \infty$$
$$o = \varkappa\pi\{1\bar{1}1\} = -\frac{O}{2}$$
$$l = \varkappa\pi\{311\} = +\frac{3O3}{2}$$
$$s = \varkappa\pi\{2\bar{1}1\} = -\frac{2O2}{2}$$
$$t = \varkappa\pi\{214\} = +\frac{4O2}{4}\,l$$
$$n = \varkappa\pi\{351\} = +\frac{5O\frac{5}{3}}{4}\,r$$
$$h = \varkappa\pi\{2\bar{1}4\} = -\frac{4O2}{4}\,r.$$

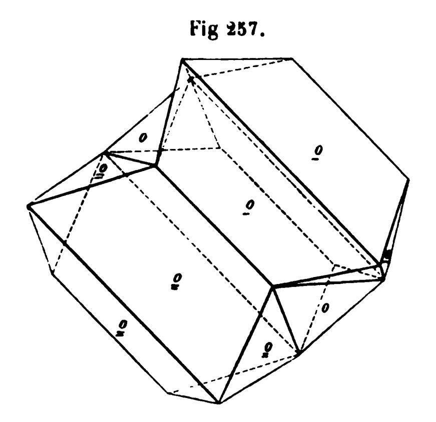
Fig. 256.



Es erscheinen also in den positiven Oktanten ein rechtes und ein linkes Tetartoëder, aber von verschiedenem Zeichen, und in den negativen eines, h, welches einem der beiden positiven, t, enantiomorph ist und mit ihm zusammen ein Dyakisdodekaëder bildet. — Häufig Zwillinge vom Habitus derjenigen des Spinell (Fig. 182), zuweilen mit Wiederholung der Zwillingsbildung zu Drillingen, Fig. 257, wobei die Krystalle nach denjenigen Oktaëderkanten verlängert sind, welche der Zwillingsebene parallel gehen. — Ueber die Aetzfiguren s. Wulff a. a. O. — Brechungsexponent für

Na-Licht: $n = 1{,}5711$ Topsøe und Christiansen, 1,5716 Fock Die Krystalle zeigen eine schwache anomale Doppelbrechung, indem sie, durch zwei gegenüberliegende Oktaëderflächen gesehen, zwischen gekreuzten Nicols in keiner Stellung vollständig dunkel erscheinen.

Fig. 257.



Strontiumsalpeter $= Sr[NO^3]^2$. Combinationen der beiden Tetraëder, an Grösse wenig verschieden, mit dem Hexaëder, seltener mit kleinen Flächen des Pentagondodekaëders von derjenigen Stellung, wie sie Fig. 255 zeigt. Brechungsexponent für *Na*-Licht: $n = 1{,}5667$ Fock. Optisches Verhalten wie beim vorigen Salz.

Bleisalpeter $= Pb[NO^3]^2$. Bei schneller Verdunstung wässriger Lösungen entstehen trübe milchweisse Oktaëder, bei ziemlich langsamer Verdunstung dagegen durchsichtige Krystalle der Combination Fig. 255 (s. vor. S.): $o = \varkappa\pi\{111\}$, $o_{,} = \varkappa\pi\{1\bar{1}1\}$, $h = \{100\}$, $p = \varkappa\pi\{201\}$, an denen gewöhnlich die Flächen $o_{,}$ = kleiner sind als o und ausserdem sich dadurch von letzteren unterscheiden, dass sie matter sind und eine Trübung von ihnen ausgehend sich in das Innere des Krystalls erstreckt. Durch oberflächliches Lösen runden sich die Combinationskanten des Hexaëders mit dem positiven Tetraëder stärker ab, als diejenigen mit dem negativen, und lässt man alsdann die Krystalle wieder wachsen, so bilden sich an ersteren Kanten schmale Flächen eines Pyramidentetraëders und einzelne Flächen eines rechten positiven tetraëdrischen Pentagondodekaëders $\varrho = \varkappa\pi\{10.5.6\} = + \frac{2O\frac{5}{3}}{4}r$, Fig. 258. Bei niedriger Temperatur erhaltene Krystallisationen zeigen die letztere Form auch vollständig entwickelt, wie es Fig. 259 zeigt. In Bezug auf die relative Entwickelung der beiden

Fig. 258.

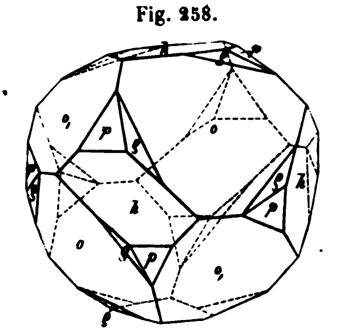
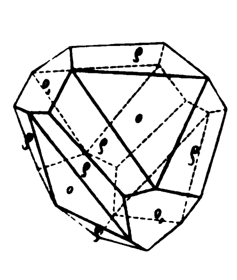


Fig. 259.



Tetraëder verhalten sich also alle diese Combinationen umgekehrt, wie die gewöhnlichen Formen des Barytsalpeters. Doch bilden sich auch zuweilen

bei gewöhnlicher Temperatur Krystalle, welche den letzteren entsprechen, wie der Umstand beweist, dass an solchen beim Weiterwachsen, nachdem die Kanten durch Auflösen abgerundet waren, die Ausbildung der Pyramidentetraëder am kleinen Tetraëder erfolgte; Formen einer derartigen Krystallisation sind in Fig. 260 und 261 dargestellt. Beide Ausbildungs-

Fig. 260.

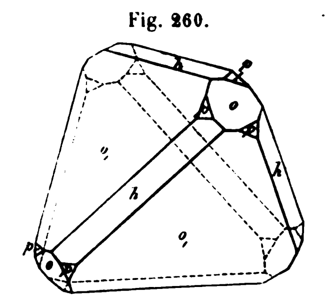
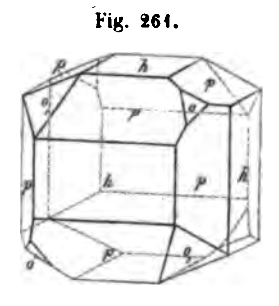


Fig. 261.



arten des Salzes zeigen also das gleiche Pentagondodekaëder, nämlich dasjenige, welches wir S. 299 als rechtes bezeichnet haben. Die beiden Tetraëder unterscheiden sich auch durch ihre Aetzfiguren, welche einem Tetartoëder entsprechen und auf dem positiven Tetraëder gegen die symmetrische Lage zu den Kanten nach links, auf dem negativen Tetraëder nach rechts gedreht erscheinen (Wulff, Zeitschr. f. Kryst, 4, 126). Brechungsexponenten nach Topsøe und Christiansen:

Linie	C :	$n =$	1,7730
-	D :	-	1,7820
-	F :	-	1,8065

Anomale Doppelbrechung meist sehr deutlich; eine oktaëdrische Platte zerfällt in sechs Sectoren, deren Schwingungsrichtungen parallel und senkrecht zu den Seiten und deren Doppelbrechung von der Mitte nach dem Rande hin zunimmt; im convergenten Lichte zeigt die Mitte ein einaxiges Interferenzbild, welches nach dem Rande zu in ein zweiaxiges mit zunehmendem Axenwinkel übergeht (Klocke s. unter Ammoniumalaun S. 291).

Chlorsaures Natrium = $NaClO^3$. Aus wässrigen Lösungen bei gewöhnlicher Temperatur grosse Krystalle, Combinationen des Hexaëders mit dem Rhombendodekaëder, einem Pentagondodekaëder $\varkappa\pi\{201\}$ und einem Tetraëder. Die Krystalle zeigen stets Circularpolarisation, und zwar bilden sich aus derselben Lösung neben einander rechtsdrehende und linksdrehende*), welche sich stets durch die gegenseitige Stellung des Pentagondodekaëders zum Tetraëder unterscheiden: betrachtet man das letztere als negatives, so erscheint an den rechtsdrehenden Krystallen das früher

*) Die Auflösung der Krystalle einer Art, welche die Polarisationsebene des Lichtes nicht dreht, liefert bei der Krystallisation wieder beiderlei Krystalle.

als »rechtes« bezeichnete Pentagondodekaëder, dessen hexaëdrische Kante vorn horizontal verläuft, an den linksdrehenden jedoch das entgegengesetzte, mit vertikaler vorderer Kante. Fig. 262*a* stellt somit die Form eines rechtsdrehenden, Fig. 262*b* die eines linksdrehenden Krystalls dar.

Fig. 262*a*.

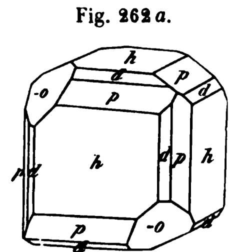
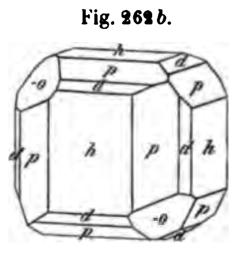


Fig. 262*b*.



Noch niemals sind bisher an einer der beiden Formen zugleich Flächen des entgegengesetzten Pentagondodekaëders beobachtet worden, und da das Auftreten des einen regelmässig mit Rechtsdrehung, das des andern mit Linksdrehung verbunden ist, Krystalle ohne Circularpolarisation aber nicht beobachtet werden, so ist hieraus zu schliessen, dass die beiden Formen einander in Bezug auf ihr Vorkommen an demselben Krystall ausschliessen. Da das rechte Pentagondodekaëder die gemeinsame Grenzform des rechten positiven und des linken negativen tetraëdrischen Pentagondodekaëders, $\varkappa\pi\{hlk\}$ und $\varkappa\pi\{h\bar{l}k\}$, darstellt, so ist anzunehmen, dass auch nur diese beiden Formen an rechtsdrehenden Krystallen auftreten können, dagegen linke positive und rechte negative, deren gemeinsame Grenzform für $l = 0$ das linke Pentagondodekaëder, nur an linksdrehenden. Obgleich diese Annahme, da noch keine Tetartoëder am chlorsauren Natrium beobachtet wurden, noch nicht bewiesen ist, gewinnt dieselbe doch an Wahrscheinlichkeit, wenn die daraus zu ziehenden Folgerungen berücksichtigt werden. Jedes der beiden Tetraëder ist die gemeinschaftliche Grenzform der rechten und der linken tetraëdrischen Pentagondodekaëder desselben Oktanten (s. Fig. 250), welche entgegengesetzten Drehungen entsprechen, also kann jedes der beiden Tetraëder an Krystallen beider Arten auftreten. In der That beobachtet man zuweilen, wenn auch selten, Combinationen beider Tetraëder sowohl an rechts- wie an linksdrehenden Krystallen. Genau der gleiche Schluss gilt auch, wie aus Fig. 241 und 243 ersichtlich, für die Pyramidentetraëder und die Deltoiddodekaëder. Damit übereinstimmend sind Krystalle, welche sich bei sehr niedriger Temperatur bilden und das Deltoiddodekaëder $\varkappa\pi\{322\}$ allein oder mit $\varkappa\pi\{111\}$ zeigen, theils rechts- theils linksdrehend. Dasselbe gilt für die Combinationen des Hexaëders mit dem Deltoiddodekaëder, welche sich aus ziemlich stark abgekühlter Lösung absetzen. — Die unter 0° erhaltenen Krystalle des chlorsauren Natrium, Deltoiddodekaëder oder Combinationen mit dem Tetraëder derselben Stellung oder reine Tetraëder, bilden Zwillinge nach dem Hexaëder, genau von der Form der Fig. 200, und zwar sind die beiden Kry-

stalle nicht nur geometrisch, sondern auch in physikalischer Beziehung symmetrisch zu einander in Bezug auf die Zwillingsebene, d. h. entgegengesetzt; es ist nämlich stets ein rechtsdrehender Krystall mit einem linksdrehenden verwachsen. — Die Aetzfiguren auf {100} gehören Pentagondodekaëdern an und haben daher bei rechts- und linksdrehenden Krystallen entgegengesetzte Lage; noch schärfer sind diejenigen auf $\varkappa\pi\{1\bar{1}1\}$, welche von den drei angrenzenden Flächen des Pentagondodekaëders gebildet werden und deren Orientirung gegen die Kanten rechtsdrehende Krystalle von linksdrehenden zu unterscheiden gestattet, auch wenn das Pentagondodekaëder in der Combination fehlt. — Elasticitätscoëfficienten nach Koch:

parallel einer Hauptaxe . . . 4047 Kilogr.
parallel einer Dodekaëdernormale 3190 -

Cohäsion nach verschiedenen Richtungen so wenig verschieden, dass keine Spaltbarkeit zu beobachten ist und die Härtecurve auf allen Flächen als ein Kreis erscheint. — Die Drehung der Polarisationsebene durch eine 1 mm dicke Platte beträgt bei 21° C. für die Fraunhofer'schen Linien:

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
2°,38	2°,52	3°,16	3°,96	4°,61	5°,89	6°,86

und nimmt mit steigender Temperatur zu (Sohnke, Wiedemann's Annalen 3,516).

Bromsaures Natrium = $NaBrO^3$. Beobachtete Formen: $\varkappa\pi\{111\}$, $\varkappa\pi\{1\bar{1}1\}$, {100}, {110}. Drehung für 1 m = $6\frac{1}{3}$° Gelb.

Essigsaures Uranylnatrium = $NaUO^2[C^2H^3O^2]^3$. Combination eines Tetraëders mit dem Dodekaëder (Fig. 205). Drehung für 1 mm und gelbes Licht 4° (auch hier dreht die Auflösung nicht).

Literatur für die drei zuletzt beschriebenen Salze: Marbach, Poggend. Ann. d. Phys. 91, 482, 94, 412. Baumhauer, Jahrb. f. Min. 1876, 606. Groth, Poggend. Ann. 158, 216.

§. 63. Die physikalischen Eigenschaften der regulären Krystalle.

Fassen wir die physikalischen Eigenschaften der regulären Krystalle in einen Gesammtüberblick zusammen und vergleichen sie mit den geometrischen, so zeigt sich die vollkommenste Abhängigkeit jener von der Symmetrie der geometrischen Formen. Diese sind symmetrisch: 1) nach den drei Würfelflächen — und deren Normalen, die drei Hauptaxen, sind einander vollkommen gleichwerthig; 2) nach den sechs Dodekaëderflächen — und deren sechs Normalen, welche wir Nebenaxen nennen wollen, sind ebenfalls sämmtlich unter einander gleichwerthig; sie halbiren die rechten Winkel, welche je zwei Hauptaxen mit einander bilden.

Dieselbe Symmetrie zeigen nun die regulären Krystalle nach allen ihren physikalischen Eigenschaften. Der Elasticitätscoëfficient zeigt Maxima oder Minima von gleicher Grösse parallel den drei Hauptaxen, er ist ferner gleich gross in allen sechs Nebenaxen, ebenso gleich gross in je zwei Richtungen,

welche symmetrisch zu einer geometrischen Symmetrieebene liegen. Dies haben namentlich die Untersuchungen Voigt's am Steinsalz bewiesen.

Die Cohäsion ist ebenfalls im Minimum oder Maximum von genau gleicher Grösse parallel den drei Hauptaxen. Ist das erstere der Fall, so sind die Krystalle hexaëdrisch*) spaltbar (wie Steinsalz, Bleiglanz u. a.), und zwar um so vollkommener, je schneller die Grösse der Cohäsion wächst, wenn die Richtung, von einer Hauptaxe ausgehend, sich ändert. Sind aber die Hauptaxen die Richtungen der Maximalwerthe der Cohäsion, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Geht man von der Hauptaxe aus und betrachtet Richtungen, welche immer grössere Winkel mit jener einschliessen, aber sämmtlich in einer Haupt-Symmetrieebene liegen, so nimmt die Cohäsion fortwährend ab bis zu der Richtung, welche 45° mit der Hauptaxe bildet, von da ab ebenso wieder zu, bis sie in der zweiten Hauptaxe, nach einer Drehung von 90°, ihren Maximalwerth wieder erreicht. Die Richtung des bei 45° stattfindenden Minimum ist aber die Normale zur Dodekaëderfläche; wir wollen dieses daher das »Dodekaëderminimum« nennen. Aendern wir jedoch, von einer Hauptaxe ausgehend, die Richtung innerhalb einer Dodekaëderfläche, so muss mit steigendem Drehungswinkel ebenfalls die Cohäsion abnehmen, aber nach einem anderen Gesetz, als vorher; nach einer Drehung von 54° 44' erreichen wir eine Richtung, in welcher sich drei Dodekaëderflächen schneiden, und gehen wir von dieser Richtung aus innerhalb dieser drei Symmetrieebenen, so nimmt in allen dreien die Cohäsion in derselben Weise zu, und wir gelangen auf jedem der drei Wege nach einer Drehung von 54° 44' in die Direction einer Hauptaxe, in welcher das Maximum der Cohäsion vorhanden ist. Jene Richtung, welche mit den drei Hauptaxen gleiche Winkel einschliesst, ist die sogenannte trigonale Axe, die Normale zur Oktaëderfläche; wir wollen daher den Werth der Cohäsion in dieser Richtung das »Oktaëderminimum« nennen. Nun können zwei Fälle eintreten: entweder ist das Oktaëderminimum kleiner als das Dodekaëderminimum, oder umgekehrt. Im ersteren Falle ist in der Normalen zur Oktaëderfläche die Cohäsion am kleinsten von allen Richtungen im Krystall; derselbe ist spaltbar nach dem Oktaëder, und zwar um so vollkommener, je kleiner das Oktaëderminimum ist und je näher das Dodekaëderminimum dem Maximum liegt (z. B. Flussspath). Im zweiten Falle hat die Normale zur Dodekaëderfläche von allen Richtungen die geringste Cohäsion, der Krystall ist dodekaëdrisch spaltbar (Zinkblende).

Diesen Betrachtungen zufolge, welche gestützt sind auf die Bestimmungen der Härte, die ja ein Maass der Cohäsion ist in verschiedenen Richtungen (s. S. 9), können demnach keine anderen Spaltungsflächen an regulären Krystallen existiren, als diejenigen von {100}, {111} oder {110}, und in der That sind andere noch niemals beobachtet worden.

*) Wegen der absoluten physikalischen Gleichwerthigkeit der drei Hauptaxen kann also niemals ein Hexaëderflächenpaar mehr oder weniger vollkommen spaltbar sein, als die beiden anderen.

Bestimmt man die Härte in verschiedenen Richtungen auf einer Krystallfläche und trägt deren Grössenwerth auf diesen Richtungen auf, so erhält man eine Härtecurve, von welcher die Untersuchungen Exner's (s. §. 3) gezeigt haben, dass sie stets symmetrisch ist, entsprechend der Lage der Symmetrieebenen des Krystalls. Auf den Hexaëderflächen z. B. hat die Härtecurve vier Minima und vier Maxima, die einen in der Richtung zweier Hauptaxen, die anderen parallel den Diagonalen der Flächen, d. h. zwei Symmetrieaxen (Normalen zu Dodekaëderflächen). Die Minima, ebenso wie die Maxima, sind unter einander gleich, und die Curve ist symmetrisch zu den beiden Haupt-Symmetrieebenen und zu den beiden Dodekaëderflächen, welche normal zu der untersuchten Hexaëderfläche stehen.

Die Symmetrie der Aetzfiguren hängt ab von der Symmetrie der Flächen, auf denen sie erhalten werden. Sie sind deshalb bei holoëdrischen Krystallen auf den Hexaëderflächen symmetrisch nach den Seiten und den Diagonalen (Haupt- und Nebenaxen); auf den Oktaëderflächen nach drei, einander unter 60⁰ schneidenden Geraden (entsprechend den drei zu {111} senkrechten Dodekaëderebenen); auf den Dodekaëderflächen nach den beiden Diagonalen des Rhombus; auf einem Ikositetraëder nach der symmetrischen Diagonale der Flächen u. s. f. Bei den tetraëdrisch-hemiëdrischen Krystallen müssen die Aetzfiguren auf den Hexaëderflächen symmetrisch sein nach deren Diagonalen (in Bezug auf die Seiten, d. i. die Hauptaxen, können dieselben unsymmetrisch sein, wenn sie nämlich von Hexakistetraëdern, Pyramidentetraëdern und Deltoiddodekaëdern gebildet werden; symmetrisch würden sie nur dann sein, wenn sie von Pyramidenwürfeln oder Dodekaëder hervorgebracht wären); auf dem Oktaëder müssen sie dieselbe Symmetrie zeigen, wie bei den holoëdrischen Krystallen, aber sie können verschiedene Gestalt besitzen auf den beiderlei Tetraëderflächen und dadurch deren Unterscheidung ermöglichen; auf {101} müssen die Aetzfiguren nach oben und unten (nach den kürzeren Diagonalen) symmetrisch sein, können aber unsymmetrisch sein nach rechts und links, wie es z. B. bei der Zinkblende der Fall ist. Auf den Würfelflächen pentagonal-hemiëdrischer Krystalle ist Symmetrie erforderlich nach den Seiten, möglich, aber nicht nothwendig, nach den Diagonalen (sie ist z. B. vorhanden, wenn die Aetzfiguren von Ikositetraëderflächen, dagegen nicht, wenn sie von Dyakisdodekaëderflächen gebildet werden); auf den Oktaëderflächen können die Figuren unsymmetrisch sein, müssen aber gleiche Gestalt haben auf allen Oktaëderflächen; auf den Dodekaëderflächen ist Symmetrie erforderlich nach den langen Diagonalen, möglich, aber nicht nothwendig nach den kurzen, u. s. f. Bei den plagiëdrisch-hemiëdrischen und tetartoëdrischen Krystallen ist symmetrische Orientirung der Aetzfiguren gegen die Umrisse der Flächen auf keiner derselben nothwendig, kann aber natürlich eintreten, sobald die Figuren von gewissen Grenzformen hervorgebracht werden. Da jedoch die Aetzfiguren meist von den weniger einfachen Formen des Systems gebildet werden, so treten da, wo unsymmetrische Orientirungen möglich sind, die-

selben häufiger ein, als symmetrische, und hieraus ist ersichtlich, dass die Aetzfiguren in vielen Fällen ein werthvolles Hülfsmittel zur Erkennung der Hemiëdrie und Unterscheidung der entgegengesetzten hemiëdrischen Formen darbieten.

Da der Schall eine Wellenbewegung der Theilchen ist, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei derselben Substanz nur von deren Elasticitätscoëfficient abhängt, so muss, da letzterer nach verschiedenen Richtungen in einem regulären Krystall differirt, auch der Schall sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen (s. S. 16), aber mit gleicher in den drei Hauptaxen u. s. f.

Was die optischen Eigenschaften betrifft, so muss, der Symmetrie der regulären Krystalle entsprechend, die optische Elasticität in den Richtungen der drei Hauptaxen genau gleich sein. Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit in drei auf einander senkrechten Richtungen bedingt aber als Elasticitätsfläche eine Kugel, die regulären Krystalle sind einfach brechend, optisch isotrop, sie haben nach allen Richtungen dieselbe Lichtgeschwindigkeit, dieselbe Absorption u. s. f. Die regulären Krystalle verhalten sich somit in optischer Beziehung, wie amorphe Körper, d. h. sie bleiben zwischen gekreuzten Nicols in jeder Stellung dunkel, eine Eigenschaft, durch welche am einfachsten die Zugehörigkeit eines Krystalls zum regulären System erkannt werden kann*).

*) Von dieser Eigenschaft bilden eine Ausnahme die sogenannten anomal doppeltbrechenden Krystalle, d. h. diejenigen, welche bei unzweifelhaft regulärer Krystallform Erscheinungen der Doppelbrechung zeigen, welche wahrscheinlich auf Störungen ihrer Structur, verursacht durch innere Spannungen, zurückzuführen sind. Wie bereits S. 141 angeführt, hat Mallard für diese Erscheinung eine andere Erklärung gegeben. Nach ihm handelt es sich hier um Körper, deren Krystallform einem anderen, weniger symmetrischen Systeme angehört, deren Axenlängen aber innerhalb der Fehlergrenzen der Messung genau gleich denen regulärer Formen sind (»Grenzformen«), so dass sie, zu regelmässigen Verwachsungen verbunden, pseudoreguläre Aussenformen liefern, welche durch Messung von regulären einfachen Krystallen nicht unterschieden werden können. Da zwei in Zwillingsstellung befindliche Partikel fast gleiche Molekularanordnung besitzen, indem zwei Richtungen mit einander vertauscht wurden, welche durch nahe gleiche Dimensionen charakterisirt sind, so wird angenommen, dass diese verschiedenen Orientirungen sich auch mit einander mischen können, wie die Moleküle isomorpher Körper, deren Krystallform und Molekularstructur meist auch nur eine ähnliche, keine ganz genau gleiche ist. Eine Mischung doppeltbrechender Theilchen von verschiedener Orientirung kann aber unter Umständen einfache Lichtbrechung erzeugen, ebenso wie die Uebereinanderlagerung zweiaxiger Partien Einaxigkeit. Dass nun in der That gewisse, früher als »anomal« betrachtete Substanzen nicht regulär sind, sondern aus Verwachsungen von Krystallen eines anderen Systems bestehen, hat Mallard am Boracit gezeigt, der aus rhombischen Krystallen in Zwillingsstellung zusammengesetzt ist, der also so, wie er uns in der Natur vorliegt, streng genommen hätte aus dem regulären System verwiesen und in das rhombische gestellt werden müssen. Der Nachweis dieses Verhaltens wurde bei dem genannten Minerale geliefert durch Umwandlung in eine zweite, wirklich reguläre Form, und da dimorphe Körper meist einander sehr nahe stehende, wenn auch verschiedenen Systemen angehörige

Die thermischen Verhältnisse der regulären Krystalle stellen in jeder Beziehung das vollständigste Analogon der optischen dar; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmestrahlen, die Leitung der Wärme, die Ausdehnung durch Annahme einer höheren Temperatur sind nach allen Richtungen dieselben.

So zeigen uns die Krystalle des ersten Systems sowohl in geometrischer, als in physikalischer Beziehung den höchsten Grad von Regelmässigkeit, den krystallisirte Körper überhaupt besitzen können, und sind dadurch, dass ihre drei Hauptaxen in jeder Beziehung absolut gleichwerthig sind, von den Krystallen aller übriger Systeme unterschieden.

Krystallformen besitzen, so ist hiermit zugleich die Erklärung der »Grenzform« gegeben. Wir haben es in diesem Falle also nicht eigentlich mit einer anomalen Doppelbrechung zu thun. Bei solchen Substanzen jedoch, bei denen wirklich einfachbrechende Krystalle und solche mit allen möglichen Uebergängen von einfacher Brechung bis zu starker Doppelbrechung vorkommen, wie Diamant, Steinsalz, Alaun, Granat u. a., scheint die in §. 30 erläuterte Erklärung durch innere Spannungen der Substanz einfacher, als die Mallard'sche Mischungstheorie. Dass solche Spannungen bei der Krystallisation eintreten können, namentlich durch Einflüsse, welche auf die Krystallbildung hindernd einwirken, ist von O. Lehmann durch zahlreiche Versuche bewiesen worden. Die Versuche am Steinsalz (s. S. 272) haben nun gezeigt, dass schon geringe mechanische Kräfte dauernde Doppelbrechung der Substanz hervorbringen. Nach Braun's Beobachtungen sind bei den Alaunen und den tetartoëdrischen Nitraten (S. 304, 305, nur diejenigen Krystalle normal einfachbrechend, welche vollkommen chemisch rein sind, während die geringsten isomorphen Beimischungen sofort Störungen der normalen Structur, d. h. Doppelbrechung, hervorbringen. Bei dem in Ikositetraëdern krystallisirenden Analcim verschwindet nach Klein die Doppelbrechung beim Erwärmen allmählich, also verhält sich derselbe in dieser Beziehung ganz verschieden vom Boracit. Hiernach scheint es nicht möglich, die bei letzterem Mineral als richtig erkannte Erklärung seines Verhaltens auf die anomalen Krystalle auszudehnen.

B. Krystalle mit einer Hauptaxe.

(Optisch einaxige Krystalle.)

§. 64. **Einleitung.** Die Gesammtheit aller Krystalle, welche nur eine Haupt-Symmetrieebene, also nur eine Hauptaxe, besitzen, zerfällt nach §. 45 in zwei Krystallsysteme, das hexagonale und das tetragonale. Die dem ersteren angehörigen Krystalle haben ausser der Haupt-Symmetrieebene noch sechs, die des tetragonalen noch vier gewöhnliche Symmetrieebenen, welche einander sämmtlich in der Hauptaxe durchschneiden.

Nach dem Grundgesetz der Krystallphysik und den in §. 44 daraus gezogenen Folgerungen giebt es in den Krystallen mit einer Hauptaxe nur eine Ebene, in welcher alle Richtungen optisch gleichwerthig sind, welche demnach einen Kreisschnitt der Elasticitätsfläche liefert; dies ist die Haupt-Symmetrieebene. Die sechs übrigen Symmetrieebenen des hexagonalen Systems, ebenso die vier entsprechenden des tetragonalen, müssen sämmtlich die Elasticitätsfläche in symmetrische Hälften zerlegen. Dieser Bedingung genügen von den Elasticitätsflächen der doppeltbrechenden Krystalle nur diejenigen der optisch einaxigen, welche die Form eines Rotationsellipsoids haben, und nur für den Fall, dass dessen Rotationsaxe genau zusammenfällt mit der Hauptaxe der Krystalle. Da das, was für die optischen Eigenschaften gilt, auch statt hat für die thermischen u. s. w., so sind folglich die Krystalle mit einer Hauptaxe optisch, thermisch u. s. w. einaxig, und ihre physikalische Hauptaxe fällt mit ihrer geometrischen zusammen.

Die tetragonalen, ebenso wie die hexagonalen Krystalle haben also folgende allgemeine Eigenschaften: in der Richtung der krystallographischen Hauptaxe die grösste oder kleinste optische Elasticität, senkrecht dazu, nach allen Richtungen gleich, die kleinste oder grösste, so dass die Richtung jener Hauptaxe zugleich die der optischen Axe ist; ganz gleiches Verhalten in Bezug auf Strahlung und Leitung der Wärme; in der Hauptaxe das Maximum oder das Minimum der thermischen Ausdehnung, senkrecht dazu nach allen Seiten gleiche, kleinste oder grösste lineare Ausdehnung durch die Wärme, so dass eine Kugel, aus einem solchen Krystall geschliffen, sich durch Temperaturänderung verwandelt in ein Rotationsellipsoid, welches in der Richtung der krystallographischen Hauptaxe entweder verlängert oder verkürzt ist.

Die vollkommene Uebereinstimmung des allgemeinen physikalischen Charakters zwischen den Krystallen des hexagonalen und des tetragonalen Systems bedingt nun auch eine solche in ihren geometrischen Eigenschaften. Die Analogie beider Systeme in Bezug auf die Beschaffenheit der möglichen Formen, der Art der Combinationen, der verschiedenen Hemiëdrien u. s w. ist eine so vollkommene, dass die Darstellung des hexagonalen Systems fast wörtlich auch für das tetragonale gilt, wenn nur die Namen geändert und für die Zahl 6 stets die Zahl 4 eingesetzt wird.

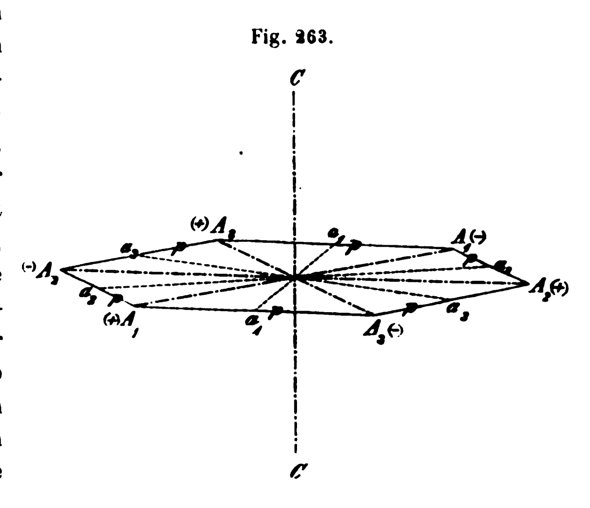
Die folgende Darstellung der beiden in Rede stehenden Systeme wird dies bis ins Einzelne zeigen.

II. Das hexagonale Krystallsystem.

§. 65. **Grundform, Ableitung und Bezeichnung der hexagonalen Formen durch ihre Indices.** Das hexagonale Krystallsystem umfasst alle Formen, welche ausser einer Haupt-Symmetrieebene noch sechs andere, senkrecht dazu und einander unter 30° durchschneidend, besitzen.

Für die krystallographische Betrachtung werden die Formen stets so gestellt, dass die Haupt-Symmetrieebene horizontal, die Hauptaxe folglich vertical steht. Die hexagonalen Krystallgestalten sind derart beschaffen, dass sie nach einer Drehung von 60° um die Hauptaxe sich selbst wieder genau congruent sind. Seien in Fig. 263 die Geraden A_1, a_1, A_2, a_2, A_3, a_3 die Durchschnitte der sechs Symmetrieebenen mit der Haupt-Symmetrieebene, so heisst jener Satz: die Richtungen A_1, A_2, A_3 können beliebig mit einander vertauscht werden, ebenso a_1, a_2, a_3, ohne die Formen zu ändern. Es sind demnach A_1, A_2, A_3 gleichwerthige Richtungen, ebenso a_1, a_2, a_3.

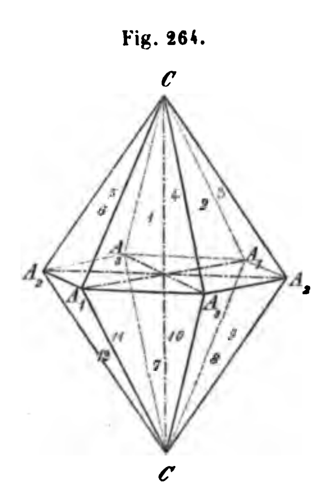
Fig. 263.



Es wird daher eine Form zu den krystallonomisch möglichen gehören, deren Flächen je zwei der gleichwerthigen Richtungen in gleichem Abstande vom Mittelpunkt durchschneiden, deren Durchschnitte mit der Haupt-Symmetrieebene also die Geraden p Fig. 263 sind. Es wird sich der Einfachheit wegen empfehlen, eine solche Form zur Grundform, und zu

Axenebenen die Haupt-Symmetrieebene und zwei einander unter 60° schneidende Symmetrieebenen, also zu Axen die Hauptaxe C und zwei der Linien A oder a zu wählen. Nehmen wir zu diesem Zwecke A_1, A_3 *) und die Hauptaxe, und nennen wir die ersteren die beiden **Nebenaxen**, so durchschneidet die Fläche 1 Fig. 264 der Grundform, welche in dem Zwölftel (Dodekanten) des Raumes zwischen A_1 und A_3 vorn oben liegt, die beiden Nebenaxen in gleichem Abstande, die Hauptaxe in einer vorläufig noch unbekannten Entfernung. Da die Ebene, welche die Haupt-Symmetrieebene in A_1, A_1 vertical schneidet (kurz: die Ebene A_1), eine Symmetrieebene ist, so muss jene Grundform ausser dieser ersten Fläche noch eine zweite, 6, besitzen, welche zu jener in Bezug auf A_1 symmetrisch liegt; da auch A_3 Symmetrieebene, muss eine zugehörige Fläche 2, zu 1 symmetrisch in Bezug auf A_3, existiren; da ferner A_2 eine Symmetrieebene der vollständigen Form ist, so müssen zu derselben noch drei Flächen 3, 4, 5, in Bezug auf A_2 symmetrisch zu 2, 1, 6, und endlich, symmetrisch in Bezug auf die Haupt-Symmetrieebene zu allen sechs Flächen, noch sechs untere gehören. Die vollständige einfache Krystallform besitzt also 12 Flächen, es ist eine **hexagonale Pyramide** Fig. 264, deren sämmtliche Flächen gleiche Neigung gegen die Hauptaxe besitzen. Da aber diese Form einem **einaxigen** Krystall angehört, so muss jene Neigung der Flächen gegen die Hauptaxe nach dem §. 33 Gesagten mit der Temperatur veränderlich sein; im Falle die Hauptaxe die Richtung der grössten thermischen Ausdehnung ist, muss die Pyramide bei steigender Temperatur spitzer werden, der Winkel der Flächen zur Hauptaxe kleiner, im umgekehrten Falle grösser.

Fig. 264.



Von dem Winkel, den die Flächen der hexagonalen Pyramide mit der Hauptaxe einschliessen, hängt nun offenbar das Verhältniss ab, in welchem die Flächen derselben die Hauptaxe und die beiden Nebenaxen schneiden, und kann aus jenem Winkel berechnet werden. Setzen wir die beiden gleichen, auf den Nebenaxen abgeschnittenen Parameter $= 1$, so erhalten wir einen bestimmten Werth c für den Parameter der Hauptaxe. Da aber die Neigung der Pyramidenflächen zur Hauptaxe sich mit der Temperatur **stetig** ändert, so muss das Gleiche auch in Bezug auf c stattfinden; der Werth von c für eine bestimmte Temperatur muss vollkommen stetig in einen anderen, welcher einer anderen Temperatur entspricht, übergehen,

*) Wobei die Aufstellung der Formen stets so geschehen soll, dass A_2 horizontal quer läuft, A_1 und A_3 demnach schräg nach vorn, aber ebenfalls horizontal, die Hauptaxe, wie bereits erwähnt, vertical. Die Wahl der positiven Seiten der drei Nebenaxen ist hier so getroffen, dass dieselben gleiche Winkel (120°) mit einander bilden (s. Fig. 263).

wenn der Krystall die letztere annimmt. Dies ist nur möglich, wenn c bei einer bestimmten Temperatur im Allgemeinen eine irrationale Zahl ist, da der Uebergang einer rationalen Zahl in eine ebensolche zweite nur sprungweise geschehen kann. Es giebt also wohl gewisse Temperaturen, bei denen c genau einer rationalen Zahl gleich ist, bei allen dazwischen liegenden indess durchläuft c alle irrationalen Zahlen, welche zwischen jenen liegen. Ist c für eine bestimmte Temperatur*) durch die Messung des Winkels der Pyramidenflächen zur Hauptaxe bestimmt, so sind uns alle Formen, welche an dem Krystall überhaupt möglich sind, gegeben, denn es sind nunmehr sämmtliche Elemente (Axenwinkel: $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 60^0$; Parameter der Grundform: $1 : 1 : c$) bekannt, und demnach nur noch solche Formen an den Krystallen derselben Substanz krystallonomisch möglich, deren Indices rationale Zahlen sind.

Gehen wir jetzt über zur Bezeichnung der hexagonalen Formen, für welche wir nach dem Vorhergehenden zu Axenebenen die Haupt-Symmetrieebene und zwei gleichwerthige Symmetrieebenen und zur Grundform die hexagonale Pyramide wählen, so würde eine Fläche derselben, z. B. 1 Fig. 264, mit Berücksichtigung der Vorzeichen der Parameter, wie sie in Fig. 263 angegeben und im Folgenden stets beibehalten werden sollen, das Symbol $(1\bar{1}1)$ erhalten müssen. Bezeichnen wir jetzt die nächstfolgende Fläche 2 in gleicher Weise, auf dieselben Axen bezogen, so erhalten wir, da sie parallel der Axe A_1 ist, das Symbol $(0\bar{1}1)$. Während also im regulären System, bei drei zu einander rechtwinkeligen Axen, alle Flächen einer einfachen Form gleiche Indices haben (und, wie wir später sehen werden, ist dasselbe im tetragonalen System der Fall), würden hier die verschiedenen Flächen derselben Form verschiedene Indices erhalten. Die Fläche 2 Fig. 264 hat aber das gleiche Symbol $(1\bar{1}1)$, wie 1, wenn wir sie beziehen auf die Axen A_2 (welche ja mit A_1 vollkommen gleichwerthig ist), A_3 und C. Auf diese letzteren Axen bezogen, hat 1 das Symbol $(0\bar{1}1)$. Wir werden daher für beide Flächen 1 und 2 Symbole, welche aus denselben Zahlen bestehen, erhalten, wenn wir in dieselben ausser der Hauptaxe die drei, auf die Nebenaxen bezüglichen Indices einführen, uns also vierzähliger Symbole bedienen**). Dasjenige der Fläche 1 würde alsdann $= (10\bar{1}1)$ sein, wenn sich der erste Index auf A_1, der zweite auf A_2, der dritte auf A_3 und der vierte auf C bezieht; dasjenige von $2 = (01\bar{1}1)$. Schreiben wir stets die Indices in dieser Reihenfolge, so sind überhaupt nur folgende Flächen, welche zwei benachbarte Nebenaxen in gleichen Abständen durchschneiden, möglich, deren Indices durch alle möglichen

*) Die Winkeländerungen, welche die Krystalle zwischen den Grenzen der gewöhnlich bei Messungen vorkommenden Temperaturen (15°—25° C.) erleiden, sind so gering, dass fast immer eine genauere Temperaturangabe überflüssig ist.

**) Diese Symbole in der hier benutzten Form wurden für das hexagonale Krystallsystem zuerst von Bravais vorgeschlagen.

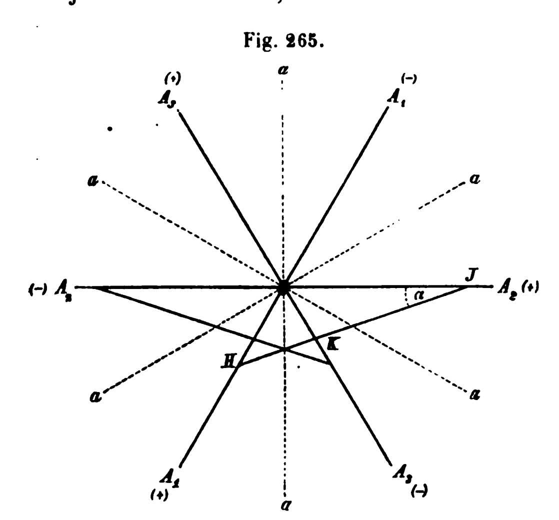
Vertauschungen der gleichwerthigen Parameter der Nebenaxen erhalten werden:

$$(10\bar{1}1)\ (01\bar{1}1)\ (\bar{1}101)\ (\bar{1}011)\ (0\bar{1}11)\ (1\bar{1}01)$$
$$(10\bar{1}\bar{1})\ (01\bar{1}\bar{1})\ (\bar{1}10\bar{1})\ (\bar{1}01\bar{1})\ (0\bar{1}1\bar{1})\ (1\bar{1}0\bar{1})$$

Diese zwölf Flächen sind nun gerade diejenigen der vollständigen hexagonalen Pyramide; bei Anwendung derartiger vierzähliger Symbole stellt also im hexagonalen System (ebenso wie im regulären und tetragonalen mit dreizähligen) die Gesammtheit aller möglicher Flächen mit gleichen Indices eine einfache Krystallform von hexagonaler Symmetrie dar.

Es ist klar, dass jede Krystallfläche schon durch drei Indices, zwei auf je eine Nebenaxe, der dritte auf die Hauptaxe bezüglich, vollkommen bestimmt ist, der vierte, auf die dritte Nebenaxe sich beziehende, also durch die beiden anderen mit gegeben ist. Dieser, demnach an und für sich überflüssige und nur aus dem soeben entwickelten Grunde eingeführte Index steht nun zu jenen in einem sehr einfachen Verhältniss.

Fig. 265.



Um diese Beziehung ganz allgemein zu bestimmen, sei in Fig. 265 HKJ der Durchschnitt einer beliebigen Krystallfläche mit der Haupt-Symmetrieebene, deren auf die drei Nebenaxen bezüglichen Indices h, $-k$, i seien, folglich $\frac{1}{h} = OH$, $\frac{1}{-k} = -OK$, $\frac{1}{i} = OJ$ ihre entsprechenden Parameter; alsdann ist, wenn der Winkel OJH mit α bezeichnet wird

$$\frac{OJ}{OH} = \frac{h}{i} = \frac{\sin(60^0 - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \text{cotg}\,\alpha - \frac{1}{2}$$

$$\frac{OJ}{-OK} = \frac{-k}{i} = \frac{\sin(60^0 + \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \text{cotg}\,\alpha + \frac{1}{2}$$

folglich

$$\frac{h+k}{i} = -1$$

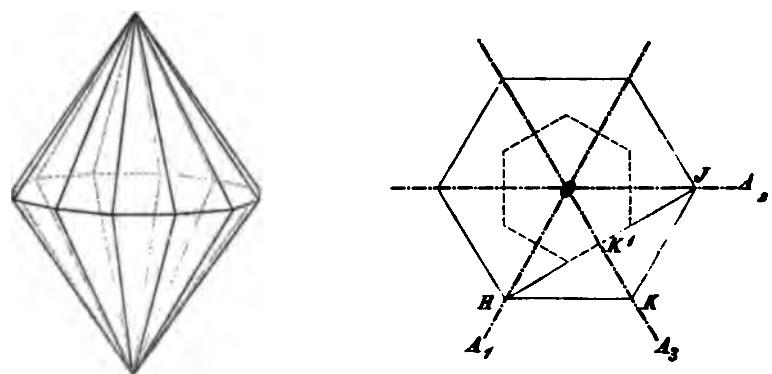
$$h + k + i = 0.$$

Es ist demnach stets die Summe der auf die drei Nebenaxen bezüglichen Indices gleich Null. Sind also zwei dieser Zahlen gegeben, so ist die dritte diejenige Zahl, welche mit den beiden ersten die Summe 0 giebt. Es muss sonach von den drei Indices hik mindestens einer negativ sein.

Ist l der auf die Hauptaxe bezügliche Index, so ist der allgemeinste Ausdruck für eine beliebige Krystallfläche $(hikl)$; wir haben bereits einen

speciellen und einfacheren Fall betrachtet, den nämlich, dass $h = -k = 1$, den Fall der zur Grundform gewählten hexagonalen Pyramide. Es ist jetzt zu untersuchen, welche Flächen noch zu der in Fig. 265 angegebenen Fläche $(h i \bar{k} l)$ gehören und mit ihr zusammen die vollständige einfache Form, welche wir dann mit $\{h i k l\}$ zu bezeichnen haben, bilden. Da die hexagonalen Formen nicht nur nach den drei durch die Nebenaxen A_1, A_2, A_3 und die Hauptaxe gehenden Ebenen symmetrisch sind, sondern auch nach denjenigen, welche bestimmt sind durch die drei punktirten Geraden a, welche Zwischenaxen genannt werden, so erfordert die Symmetrie nach der zu A_2 senkrechten Ebene, dass ausser der durch HKJ (Fig. 265) gehenden Fläche noch eine zweite, gegen jene Ebene umgekehrt liegende, in demselben Dodekanten vorhanden ist. Die Symmetrie nach den Ebenen durch A_1, A_2, A_3 erfordert ein gleiches Flächenpaar in jedem Dodekanten, und so resultiren die 24 Flächen der in Fig. 266 dargestellten dihexagonalen Pyramide, welche als allgemeinster Fall die flächenreichste aller einfachen hexagonalen Formen darstellt. Ganz ebenso, wie im regulären Krystallsystem aus dem Achtundvierzigflächner, werden wir auch aus dem allgemeinen Repräsentanten aller hexagonalen Formen, der dihexagonalen Pyramide, alle

Fig. 266. Fig. 267.

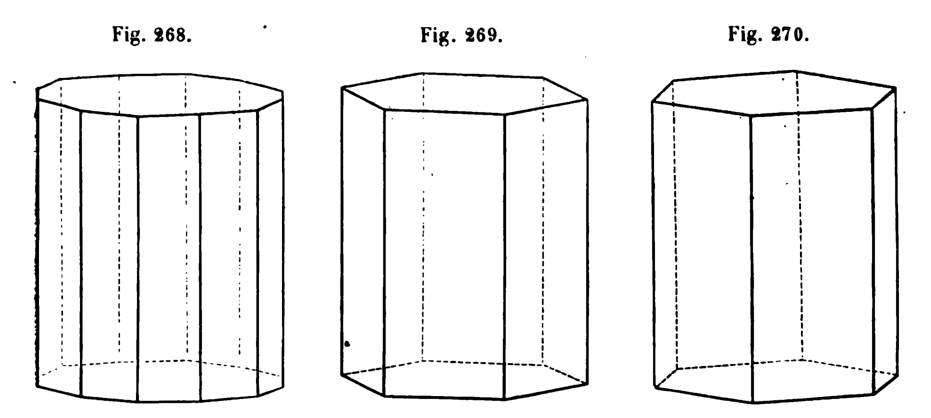


übrigen ableiten. Wir erhalten dieselben, indem wir h, k und l (i ist abhängig von h und k, also nach deren Bestimmung nicht mehr beliebig) alle möglichen speciellen Werthe beilegen. Wenn wir $h = -k$ setzen, so erhalten wir, wie wir oben sahen, eine hexagonale Pyramide, deren Flächen zwei benachbarte Abschnitte der Nebenaxen in gleichem Abstande vom Mittelpunkte durchschneiden. Setzen wir aber $2h = -k$, so hat der Durchschnitt einer Fläche zwischen A_1 und A_3 (Fig. 267) mit der Haupt-Symmetrieebene (parallel derselben die Zeichnungsebene) eine Richtung HK', welche normal zur Axe A_3 ist (als Höhenlinie des gleichseitigen Dreiecks OKH); die im Dodekanten A_3, A_2 liegende Fläche, für welche $OJ = 2OK'$ ist, hat dieselbe Richtung, fällt also mit ihr zusammen. Es entsteht demnach in diesem Falle keine dihexagonale, sondern nur eine hexagonale Pyramide,

deren Querschnitt sechs Seiten (in der Figur punktirt bezeichnet) besitzt, welche mit den Nebenaxen Winkel von 90° bilden, während der Querschnitt der zuerst betrachteten hexagonalen Pyramide (in Fig. 267 mit dünnem Strich ausgezogen) die Nebenaxen unter 60° durchschneidet. Beide Arten von hexagonalen Pyramiden werden als solche **erster** und **zweiter Ordnung** unterschieden. So haben wir also bereits drei verschiedene Fälle, wobei l noch einen beliebigen Werth hat. Setzen wir nun in jedem derselben noch $l = 0$, so erhalten wir dreierlei Formen, welche die Hauptaxe nicht schneiden, also ihr parallel sind.

Die erste derselben (Fig. 268) entspricht der dihexagonalen Pyramide und hat das Symbol $\{h i k 0\}$; sie heisst dihexagonales Prisma. Die zweite stellt den speciellen Fall dar, in welchem $h = -k$, daher die beiden zwischen zwei benachbarten Nebenaxen liegenden Flächen in eine zusammenfallen; es ist

Fig. 268. Fig. 269. Fig. 270.



das hexagonale Prisma erster Ordnung (Fig. 269). Die dritte entspricht der Pyramide zweiter Ordnung, d. h. dem Verhältniss $2h = k$; sie ist in Fig. 270 dargestellt und heisst hexagonales Prisma zweiter Ordnung.

Setzen wir endlich die Indices aller dreier Nebenaxen gleich Null, so resultirt ein ihnen paralleles Flächenpaar, welches somit der Haupt-Symmetrieebene entpricht und die Basis genannt wird.

So giebt uns die Herleitung der möglichen Arten von Formen mit hexagonaler Symmetrie **sieben** mögliche Fälle, von welchem die drei letzten denjenigen Flächen entsprechen, nach denen sämmtliche Formen symmetrisch sind, denn die drei Flächenpaare des hexagonalen Prisma 1. Ordnung sind parallel den drei senkrechten Symmetrieebenen, welche durch die Nebenaxen gehen, diejenigen des Prisma 2. Ordnung den durch die Zwischenaxen gehenden. Alle holoëdrischen hexagonalen Formen sind also symmetrisch nach der Basis und nach den Flächen der beiden hexagonalen Prismen.

Da die drei gleichwerthigen Nebenaxen sich zu einander ganz ebenso verhalten, wie die drei Zwischenaxen, wir also S. 314 ebenso gut die Richtungen a_1 und a_3 (statt A_1 und A_3) hätten zu Nebenaxen nehmen können, so folgt, dass man die beiden Klassen von hexagonalen Pyramiden, die

erste und zweite Ordnung, beliebig mit einander vertauschen, also auch eine Pyramide zweiter Ordnung zur Grundform wählen kann; alsdann werden selbstverständlich alle Pyramiden, sowie das Prisma derselben Ordnung zu solchen erster, die bisherigen Pyramiden und das Prisma erster Ordnung nunmehr zweiter.

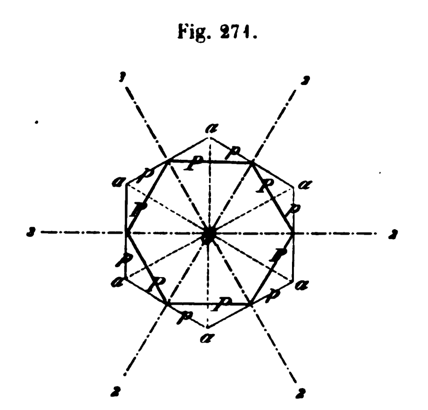
§. 66. **Auswahl der Grundform und Unterscheidung der Krystallreihen.** Bei der bisherigen Ableitung der hexagonalen Formen haben wir zur Grundform eine solche gewählt, deren Flächen die benachbarten Hälften zweier Nebenaxen in gleichem Abstande durchschneiden, also das Parameterverhältniss 1 : 1 : *c* haben, und sie hexagonale Pyramide erster Ordnung genannt. Solcher hexagonaler Pyramiden erster Ordnung müssen aber offenbar an demselben Krystall noch andere, wenn nicht auftreten, so doch möglich sein, da alle Flächen mit dem Parameterverhältniss 1 : 1 : *mc* krystallonomisch möglich sind, sobald *m* einen rationalen Werth, z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 2, 3 u. s. f., besitzt, d. h. die Indices der Flächen rationale Zahlen darstellen. Ein und derselbe Krystall, oder verschiedene Krystalle einer und derselben Substanz, können also verschiedene hexagonale Pyramiden erster Ordnung zeigen; wenn wir deren Flächen parallel sich selbst uns so weit verschoben denken, bis alle einen gleich grossen Hauptquerschnitt, also genau gleich lange Nebenaxen besitzen, so sind die Hauptaxen dieser sämmtlichen Pyramiden verschieden, aber deren Länge steht in rationalem, meist sehr einfachem Verhältniss. Nennen wir die Länge der Hauptaxe irgend einer mittleren Pyramide dieser Reihe *c* und bestimmen wir den Zahlenwerth derselben ($a = 1$ gesetzt) aus der Neigung ihrer Flächen zur Hauptaxe, berechnen wir ebenso das Verhältniss der Hauptaxe zu den Nebenaxen aus den Kantenwinkeln auch bei den anderen Pyramiden jener Reihe, so finden wir dieses Verhältniss beispielsweise bei den flacheren Formen genau gleich der Hälfte, dem Drittel u. s. f. von dem Zahlenwerth *c*, bei den spitzeren Pyramiden dagegen gleich dem doppelten, dreifachen *c* u. s. f. (und zwar um so genauer, je genauer die Kantenwinkel der Pyramiden bestimmt waren). Bei gleichen Nebenaxen verhalten sich also die Hauptaxen dieser Pyramiden, wie $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1 : 2 : 3$ u. s. f. Wären wir bei der Ableitung des Verhältnisses, in welchem diese Formen zu einander stehen, nicht von der dritten, sondern z. B. von der zweiten ausgegangen, hätten demnach deren Hauptaxe $= c$ gesetzt, so würden wir finden, dass die Hauptaxen obiger Pyramidenreihe sich verhalten, wie $\frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 6$; dies ist aber dasselbe Verhältniss, wie oben; also erhält man hierdurch zwar andere Ableitungszahlen, das Verhältniss, in welchem sie zu einander stehen, bleibt aber ungeändert. Die Form, von der wir hierbei ausgehen, nennen wir die Grundform oder die primäre Pyramide erster Ordnung, die anderen die abgeleiteten Pyramiden. Da das Verhältniss der Ableitungszahlen stets ungeändert bleibt, wir mögen ausgehen, von welcher Pyramide der Reihe wir wollen, so ist es theoretisch vollkommen gleichgültig, welche Pyramide wir zur

primären wählen, sobald an den Krystallen der betreffenden Substanz überhaupt mehrere Pyramiden beobachtet wurden. Findet sich an denselben gewöhnlich nur eine, andere nur selten und mit kleinen Flächen ausgebildet, so wird es nicht zweifelhaft sein, dass es geeignet ist, jene zur Grundform zu wählen. Zeigt die Substanz in ihren Krystallen eine Spaltbarkeit nach einer hexagonalen Pyramide, so wird die Wahl dieser zur primären angezeigt sein, da ihre Lage alsdann stets leicht erkannt werden kann und sie durch die Cohäsionsverhältnisse gleichsam vor den übrigen ausgezeichnet ist. Wo keiner dieser Anhaltspunkte für die Auswahl der Grundform vorliegt, wird es sich empfehlen, dieselbe so zu treffen, dass die Ableitungszahlen der übrigen Pyramiden möglichst klein werden. Es wird also z. B. nicht günstig sein, in der oben als Beispiel aufgeführten Reihe die flachste der Pyramiden die primäre zu nennen, da dann die letzte, spitzeste, die grosse Ableitungszahl 12 erhält.

Darnach ist also die Wahl der Grundform in jedem einzelnen Falle, d. h. bei der Bestimmung der Formen einer einzelnen krystallisirten Substanz, lediglich conventionell, folglich auch oft für denselben Körper bei verschiedenen Autoren verschieden. In diesem Falle ist also der (irrationale) Zahlenwerth c, welcher ja die Substanz charakterisirt, da mit ihm alle möglichen Krystallformen derselben gegeben sind (vergl. S. 315), und welcher das Axenverhältniss der Substanz genannt wird, bei dem einen Autor ein anderer, als bei dem anderen, aber beide Zahlenwerthe müssen in einfachem rationalen*) Verhältniss stehen, z. B. der eine genau das Doppelte des anderen sein. Es ist demnach leicht, die Angaben eines Beobachters auf die des zweiten zu reduciren, es sind im gegebenen Beispiel nur alle Ableitungszahlen des ersten halb so gross zu setzen.

Haben wir uns einmal für eine bestimmte Wahl der Grundform entschieden und deren Axenverhältniss bestimmt, so sind nunmehr durch die Kantenwinkel aller übriger hexagonaler Pyramiden desselben Körpers deren Parameterverhältniss, also auch ihre Indices gegeben. Dasselbe ist alsdann

Fig. 271.



*) Eine Ausnahme davon bildet natürlich der Fall, dass Einer der Autoren diejenigen Pyramiden erster Ordnung nennt, welche der Andere zu solchen zweiter Ordnung gewählt hat. Habe nach dem Ersteren die Pyramide, deren Hauptquerschnitt P Fig. 271 darstellt, das Axenverhältniss $1 : 1 : c$, also p das Verhältniss: $1 : 2 : c$; nehme nun der Zweite die Zwischenaxe Jenes zu Nebenaxen, setze also die Länge $Oa = 1$, so verhalten sich die Einheiten beider Autoren, wie leicht einzusehen, wie $1 : \sqrt{\frac{4}{3}}$, also das c des Einen zum c des Anderen, wie $1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$, oder, bei der Wahl einer anderen Pyramide zur primären, wie ein rationaler Theil oder ein rationales Vielfaches dieser Zahl.

auch der Fall mit den Indices aller übriger Formen, z. B. der dihexagonalen Pyramiden, deren ja auch an den Krystallen desselben Körpers verschiedene mit anderen Zahlenwerthen von h und k vorkommen können. Da es aber hier der Bestimmung der Zahlen h, k und l, also zweier von einander unabhängiger Grössen, bedarf, so genügt auch nicht mehr die Messung eines Kantenwinkels, wie bei den hexagonalen Pyramiden, sondern es müssen deren zwei bestimmt worden sein.

In §. 68 wird gezeigt werden, auf welche Weise man aus zwei gemessenen Winkeln einer dihexagonalen Pyramide das Verhältniss berechnen kann, in welchem eine Fläche derselben die Haupt- und zwei benachbarte Nebenaxen durchschneidet. Gesetzt den Fall, an den Krystallen der untersuchten Substanz würden keine hexagonalen Pyramiden beobachtet, sondern nur dihexagonale, so müssten wir eine solche zur Bestimmung der Grundform, also des Axenverhältnisses der Substanz, benutzen. Wir würden dann diejenige (nicht vorhandene, aber krystallonomisch mögliche) hexagonale Pyramide die primäre nennen, deren Flächen die Haupt- und beide Nebenaxen in demselben Verhältniss schneiden, wie dasjenige der Haupt- und einer der Nebenaxen an jener dihexagonalen Pyramide ist. Finden wir durch Rechnung aus zweien ihrer Kantenwinkel deren Parameterverhältniss (die kleinste Nebenaxe = 1 gesetzt) = $1 : n : c$, wo n natürlich eine rationale*), c eine irrationale Zahl ist, so nennen wir die Pyramide, welche das Parameterverhältniss $1 : 1 : c$ haben würde, die Grundform, und $1 : c$ das Axenverhältniss der Substanz.

Dies letztere lässt sich ebenso, wie aus den Pyramiden erster Ordnung, auch aus denen zweiter Ordnung berechnen, nur dass alsdann die Nebenaxen und Zwischenaxen ihre Rollen vertauscht haben.

Was endlich die übrigen Formen, die dreierlei Prismen und die Basis, betrifft, so kann man aus keiner derselben das Axenverhältniss einer Substanz berechnen, da ihre Flächen die Haupt- und Nebenaxen nicht in einem endlichen Verhältniss durchschneiden. Dieselben sind für alle hexagonal krystallisirenden Körper identisch in ihren Winkeln.

Nach dem Gesetz der Rationalität der Indices (oder der Ableitungszahlen der Parameter) sind somit sämmtliche an einem Krystall, oder an verschiedenen von einer und derselben (chemisch vollkommen identischen) Substanz gebildeten Krystallen, mögliche Formen gegeben, sobald mittelst irgend einer hexagonalen oder dihexagonalen Pyramide das Axenverhältniss $1 : c$ bestimmt worden, wobei nur noch daran erinnert werden muss, dass dasselbe, wenn auch nur sehr wenig, mit der Temperatur sich ändert, und

*) n ist $= \frac{h}{k}$, wenn wir mit h den grösseren, mit k den kleineren der auf die Seiten der Nebenaxen, zwischen denen die Fläche liegt, bezüglichen Indices bezeichnen. Dies soll im Folgenden stets geschehen, so dass also n immer einen Werth > 1 bedeutet.

dass es durch eine andere Zahl, jedoch durch einen rationalen Theil oder ein rationales Vielfaches, dargestellt wird, wenn eine andere der vorhandenen Formen zur primären gewählt wird. Alle an den Krystallen desselben Körpers vorkommenden Formen müssen Parameterverhältnisse besitzen, welche sich aus dem Verhältniss $1 : c$ nur durch rationale (meist sehr einfache) Zahlen ableiten lassen. Die Gesammtheit aller dieser möglicher Formen (an und für sich unendlich viele, von denen jedoch nur die mit den einfachsten Ableitungszahlen gewöhnlich vorkommen) nennen wir die Krystallreihe des betreffenden Körpers und sagen demnach von einer Form, dass sie in die Krystallreihe eines Stoffes gehöre, wenn ihr Axenverhältniss sich von demjenigen irgend einer beobachteten Krystallform desselben (also dann auch von allen übrigen) durch Rationalzahlen ableiten lässt.

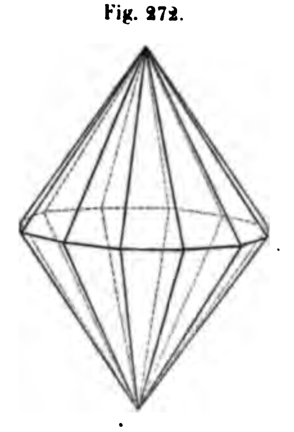
Bestimmen wir nunmehr von einer anderen, von der vorigen chemisch verschiedenen Substanz die relativen Dimensionen der (selbstverständlich ebenfalls willkürlich ausgewählten) Grundform, und finden deren Axenverhältniss $= 1 : c'$, so ergiebt uns ganz allgemein die Vergleichung der Zahlen c und c' für zwei chemisch verschiedene Körper, dass dieselben in keiner Beziehung zu einander, keinenfalls in rationalem Verhältniss zu einander stehen. Allerdings kann der Zufall und eine geeignete Wahl der Grundform es herbeiführen, dass c und c' ausserordentlich nahe ein einfaches rationales Verhältniss haben, dass dies aber nicht absolut der Fall ist, lehrt eine einfache Betrachtung: die Zahl c ist wegen der Einaxigkeit des ersten Körpers mit der Temperatur stetig variabel, die Zahl c' des zweiten Körpers ebenfalls, aber in ganz anderem Verhältnisse, da seine thermische Ausdehnung natürlich eine andere ist, folglich ändert sich das Verhältniss $c : c'$ mit der Temperatur stetig, es kann also keine einfache rationale Zahl sein. Hieraus ersieht man, dass die beiden Krystallreihen zweier verschiedener Substanzen völlig getrennt sind, wenn auch zufällig eine Form der einen in ihren Winkeln grosse Aehnlichkeit mit einer der anderen Reihe aufweisen sollte.

Es giebt also ebenso viele, scharf von einander durch Irrationalität ihres Axenverhältnisses getrennte, Krystallreihen im hexagonalen Systeme, als es hexagonal krystallisirende Substanzen giebt, während die regulären Formen sämmtlich nur eine Krystallreihe bildeten, weil sie alle rational von einander ableitbar sind, also auch alle an jedem regulär krystallisirenden Stoffe auftreten können.

Im Folgenden werden nun die Formen einer beliebigen hexagonal-holoëdrischen Krystallreihe und die Art ihrer Combinationen beschrieben, und alles hier Gesagte gilt natürlich für jede andere Krystallreihe desselben Systems, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann die Winkel der pyramidalen Gestalten andere, das Axenverhältniss der Grundform ein anderes ist.

§. 67. **Beschreibung der holoëdrischen hexagonalen Formen und ihrer Combinationen.** 1) Die dihexagonalen Pyramiden Fig. 272 $\{hikl\}$ durchschneiden die beiden benachbarten Seiten zweier Nebenaxen in dem Verhältniss $h:k$, wofür im vorigen §. (s. auch Anmerk.) abgekürzt n gesetzt wurde, eine rationale Zahl, welche zwischen den Grenzen 1 und 2 liegen muss, da für $h = 2k$ ($n = 2$) eine hexagonale Pyramide zweiter Ordnung resultirt (s. S. 317). Naumann bezeichnete nun die primäre Pyramide einer Krystallreihe mit P und die abgeleiteten Formen dadurch, dass vor dieselbe die rationale Zahl m gesetzt wird, welche angiebt, wie viel mal so gross die Hauptaxe ist, als diejenige der Grundform, hinter dieselbe jene Zahl n, das Verhältniss der Nebenaxen (falls dasselbe von 1 verschieden ist); folglich wird das Zeichen der dihexagonalen Pyramiden: mPn, worin $n = \frac{h}{k}$, $m = \frac{h}{l}$.

Fig. 272.

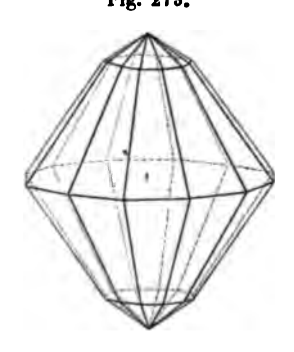


Die dihexagonale Pyramide besitzt dreierlei Kanten, nämlich die 12 Basiskanten*), je 12 stumpfere und ebenso viele schärfere Polkanten, welche mit einander abwechseln. Eine solche Form mit 24 genau gleichen Polkanten ist krystallonomisch unmöglich, weil bei derselben die Ableitungszahl $n = \sqrt{2} \cdot \sin 75^0 = 1{,}366\ldots$, also eine irrationale Zahl sein würde. Ist die Zahl n kleiner, als $1{,}366\ldots$, z. B. $\frac{5}{4}$, so sind diejenigen Polkanten die stumpferen, welche vom Pol der Hauptaxe nach denen der Zwischenaxen herablaufen; in diesem Falle ähnelt die Pyramide um so mehr einer hexagonalen Pyramide erster Ordnung, je weniger n von 1 verschieden ist; in dem Grenzfall, dass n seinen kleinsten Werth 1 annimmt, ist der Winkel der bezeichneten Polkanten $= 0^0$, d. h. je zwei in einer solchen Polkante an einander stossende Flächen, also die Flächen eines Dodekanten, fallen in eine Ebene, es resultirt eine hexagonale Pyramide erster Ordnung als untere Grenzgestalt jener Reihe von dihexagonalen. Ist dagegen n grösser, als $1{,}366\ldots$, z. B. $\frac{3}{2}$, so sind die nach den Nebenaxen herablaufenden Polkanten die stumpferen, und zwar um so stumpfer, je mehr n sich der 2 nähert. Sobald $n = 2$ wird, bilden die Basiskanten der Pyramide mit den Nebenaxen rechte Winkel (vergl. S. 317), also werden die zuletzt bezeichneten Polkantenwinkel Null, d. h. zwei an solchen zusammenstossende, benachbarten Dodekanten angehörige Flächen fallen in eine Ebene, es entsteht eine hexagonale Pyramide zweiter Ordnung als zweite Grenzgestalt derselben Reihe von dihexagonalen Pyramiden. Die sämmtlichen möglichen dihexagonalen Pyramiden, welche gleiche Ableitungszahl m, aber verschiedene n besitzen, bilden also eine Reihe, deren End-

*) So genannt, weil sie sämmtlich parallel der Basis, d. h. horizontal, laufen.

glieder einerseits die hexagonale Pyramide erster Ordnung, andererseits diejenige zweiter Ordnung mit demselben m, sind. Da die Flächen aller Glieder dieser Reihe, ebenso wie die Grenzformen, die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss, $mc : 1$, schneiden, so müssen die einander entsprechenden sämmtlich derselben Geraden, welche jene beiden Axen in dem bezeichneten Verhältniss schneidet, parallel sein, also in einer Zone liegen, d. h. die Flächen der dihexagonalen Pyramiden liegen, mit parallelen Combinationskanten, zwischen denen derjenigen Pyramide erster und derjenigen zweiter Ordnung, mit welchen beiden sie gleiche Ableitungszahl m haben (s. u. bei Pyramiden zweiter Ordnung und deren Combinationen). Die dihexagonalen Pyramiden einer solchen Reihe haben demnach gleiche Richtung derjenigen Polkanten, welche nach den Nebenaxen herablaufen; wenn also zwei derselben in Combination treten, so werden diese Polkanten der einen durch die Flächen der anderen zugeschärft.

Fig. 273.



Mehrere dihexagonale Pyramiden mit gleichem n, aber verschiedenem m, haben genau gleiche Hauptquerschnittsfigur; die eine erscheint also mit der anderen combinirt, indem sie deren 6 + 6kantige Polecke je mit 12 Flächen derart zuspitzt, dass die entstehenden Combinationskanten horizontal laufen, Fig. 273.

Die dihexagonale Pyramide stellt, ebenso wie im regulären Systeme das Hexakisoktaëder, den allgemeinsten Fall einer hexagonalen Krystallgestalt dar, ist also der allgemeine Repräsentant aller anderen, welche gleichsam nur specielle Fälle desselben bilden.

2) Die hexagonale Pyramide erster Ordnung $\{h0\bar{h}l\}$ ist derjenige specielle Fall der dihexagonalen, in welchem n den Werth 1 hat. Hieraus ergiebt sich unmittelbar das Naumann'sche Zeichen (da die Ableitungszahl 1 weggelassen wird) als mP, in welchem m dieselbe Bedeutung hat, wie oben.

Unter den verschiedenen Pyramiden einer Krystallreihe wird nach den S. 320 besprochenen Grundsätzen eine zur primären gewählt; diese erhält, da ihre Ableitungszahl m nunmehr auch $= 1$ ist, das Zeichen $P = \{10\bar{1}1\}$. Bei den stumpferen abgeleiteten Pyramiden erster Ordnung ist alsdann m ein echter Bruch, sie besitzen also die Zeichen $\frac{2}{3}P = \{20\bar{2}3\}$, $\frac{1}{2}P = \{10\bar{1}2\}$, $\frac{1}{4}P = \{10\bar{1}4\}$ u. dergl., während die spitzeren eine grössere Ableitungszahl der Hauptaxe, als die Einheit, besitzen, also beispielsweise mit $\frac{3}{2}P = \{30\bar{3}2\}$, $2P = \{20\bar{2}1\}$, $3P = \{30\bar{3}1\}$ u. s. f. bezeichnet werden. Fig. 274 a, b und c stellen drei Pyramiden einer Reihe dar, deren Hauptaxen (bei gleich grossen Nebenaxen) sich wie $1 : 2 : 4$ verhalten, also $\{10\bar{1}2\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{20\bar{2}1\}$, oder wenn die erste resp. die letzte zur primären gewählt wird, $\{10\bar{1}1\}$, $\{20\bar{2}1\}$, $\{40\bar{4}1\}$, resp. $\{10\bar{1}4\}$, $\{10\bar{1}2\}$, $\{10\bar{1}1\}$ zu bezeichnen sind.

Jede hexagonale Pyramide besitzt 12 (6 obere und 6 untere) gleiche Polkanten, sowie sechs davon verschiedene Basiskanten mit unter einander gleichen Winkeln.

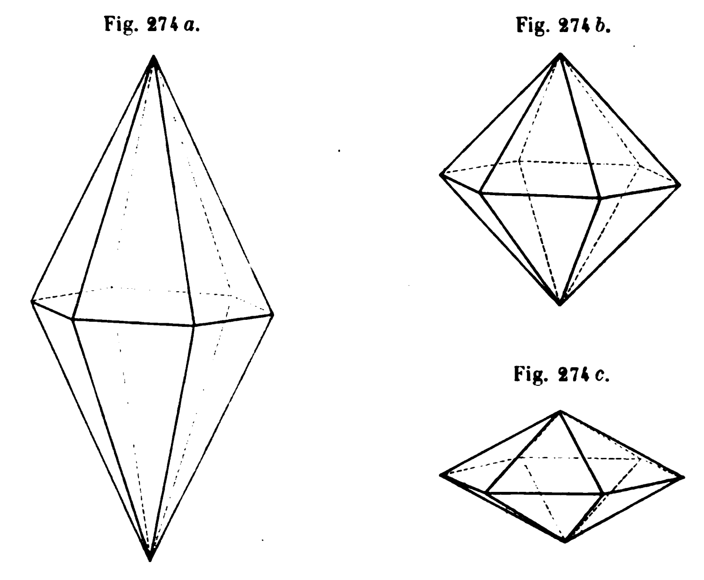


Fig. 274 *a*. Fig. 274 *b*. Fig. 274 *c*.

Da der Hauptquerschnitt aller Pyramiden erster Ordnung dasselbe Hexagon mit Winkeln von 120° ist, so erscheinen je zwei derselben combinirt so, dass die stumpfere die Polecken der spitzeren sechsflächig mit horizontalen Combinationskanten zuspitzt, oder diese die Basiskanten jener zuschärft, s. Fig. 275.

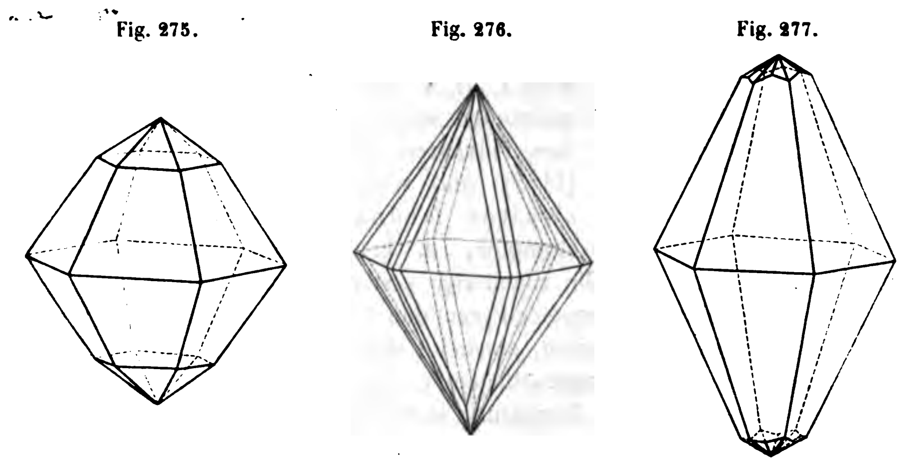


Fig. 275. Fig. 276. Fig. 277.

Eine dihexagonale Pyramide, mit einer hexagonalen combinirt, erscheint als Zuschärfung von deren Polkanten, Fig. 276, wenn beide gleiche Ableitungszahl *m* haben, als zwölfflächige Zuspitzung der Polecken, Fig. 277, wenn erstere ein kleineres *m* besitzt.

3) Die **hexagonale Pyramide zweiter Ordnung** $\{kk\bar{h}l\}$, worin $2k = h$, ist derjenige specielle Fall der dihexagonalen, in welchem $n = 2$ ist. Ihr horizontaler Querschnitt hat dieselbe Form eines gleichwinkeligen Hexagons, wie der der Pyramiden erster Ordnung, erscheint aber gegen diesen um 30° in seiner Ebene gedreht, s. Fig. 278. Diese Figur stellt eine Pyramide erster Ordnung (strichpunktirt), umhüllt von derjenigen zweiter Ordnung, welche dieselbe Ableitungszahl m besitzt, Fig. 278 a den Hauptquerschnitt derselben beiden Pyramiden (p erster Ordnung, p' zugehörige zweiter Ordnung) dar. Da eine Fläche der Pyramide zweiter Ordnung die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss schneidet, wie eine Polkante, also wie zwei in einer solchen zusammenstossende Flächen der zugehörigen Pyramide erster Ordnung, so liegt sie mit zwei solchen Flächen in einer Zone, d. h. sie stumpft die Polkante der Pyramide erster Ordnung gerade ab. Es stellt demnach Fig. 279 die Combination einer Pyramide erster Ordnung mit der ihr zugehörigen zweiter Ordnung dar. Dieselben sind zu bezeichnen mit $mP = \{h0\bar{h}l\}$ und $mP2 = \{kk\bar{h}l\}$ (das allgemeine Zeichen der Pyramiden zweiter Ordnung); wenn $m = 1$, d. h. die erstere zur primären $\{10\bar{1}1\}$ genommen worden ist, erhält diejenige, welche ihre Polkanten abstumpft, das Zeichen $P2 = \{11\bar{2}2\}$ und wird die **primäre Pyramide zweiter Ordnung** genannt. Dieselbe ist stumpfer, d. h. hat schärfere Basis- und stumpfere Polkanten, als die zugehörige erster Ordnung.

Fig. 278.

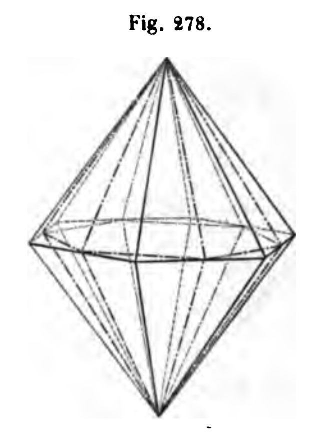


Fig. 278 a.

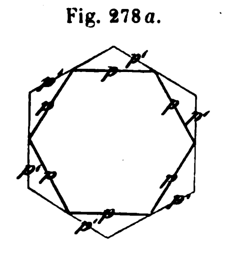
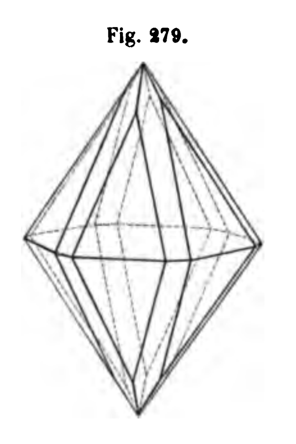


Fig. 279.



In den Combinationen zweier Pyramiden verschiedener Ordnung, welche nicht einander zugehörige sind, erscheint diejenige zweiter Ordnung, wenn sie einen kleineren Ableitungscoëfficienten m hat, als die der ersten Ordnung, an dieser als sechsflächige Zuspitzung der Polecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gerade aufgesetzt, Fig. 280. Ist dagegen m grösser, als das der Pyramide erster Ordnung, so erscheint jene als Zuschärfung der Basisecken von dieser, die Zuschärfungsflächen auf die Polkanten aufgesetzt. In dem in Fig. 281 dargestellten speciellen Falle, dass die Combinationskanten einer Fläche der Pyramide zweiter Ordnung mit einer der Pyramide erster

Ordnung der nächsten Polkante der letzteren parallel sind, ist das m der Pyramide zweiter Ordnung doppelt so gross, als das der ersten, also ihre

Fig. 280.

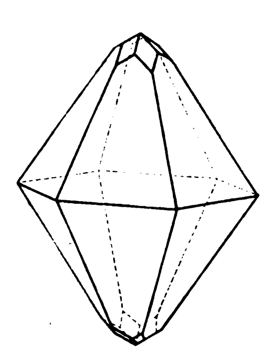
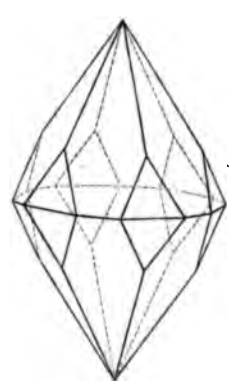
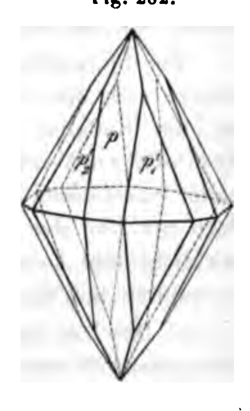


Fig. 281.



Zeichen z. B. P, $2P2 = \{10\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}1\}$. Dass dem so ist, ersieht man sofort, wenn man die Indices einer solchen Fläche aus den beiden Polkantenzonen, denen sie angehört, berechnet. Hierbei muss man aber natürlich die Indices aller benutzten Flächen auf dieselben drei Axen beziehen. Betrachtet man z. B. der Einfachheit wegen die beiden nach vorn gehenden Nebenaxen als die positiven Seiten der X- und Y-Axe, die Hauptaxe als Z-Axe, so kann man das gewöhnliche Rechnungsverfahren (S. 206) anwenden. Auf diese Axen bezogen, ist das Symbol der mittleren vorderen Fläche der vorherrschenden Pyramide $P = (111)$, das ihrer links anliegenden Fläche (101), woraus das Symbol einer Polkantenzone folgt; aus den Zeichen der beiden auf die mittlere nach rechts folgenden Flächen (011) und ($\bar{1}01$) ergiebt sich das Symbol der zweiten Polkantenzone, und aus beiden dasjenige der beiden Zonen angehörigen mittleren Fläche der Pyramide 2. Ordnung zu (121), welches dem Bravais'schen Zeichen ($11\bar{2}1$) entspricht.

Fig. 282.



Einen weiteren speciellen Fall stellt Fig. 282 dar, in welchem die Combinationskanten der Pyramide zweiter Ordnung p^1 mit derjenigen erster Ordnung p den Höhenlinien der Dreiecksflächen der letzteren parallel sind, so dass p die Polkanten der Pyramide zweiter Ordnung gerade abstumpft. Dadurch ist deren Zeichen $mP2$ bestimmt, und auf folgende Art der Zahlenwerth von m zu finden: Das Parameterverhältniss der mit p^1_1 bezeichneten Fläche, bezogen auf die bei der vorigen Berechnung benutzten Axen, ist $2 : 1 : mc$, die Fläche $p^1_2 = 1 : 2 : mc$, daraus folgen deren Indices zu $(m.2m.2)$ und $(2m.m.2)$ und das Symbol der Zone beider

$= [2m.2m.-3m^2] = [2.2.-3m]$; der Tautozonalitätsgleichung mit diesen Werthen müssen nun die Indices der primären Pyramide $p = (111)$ genügen, also muss

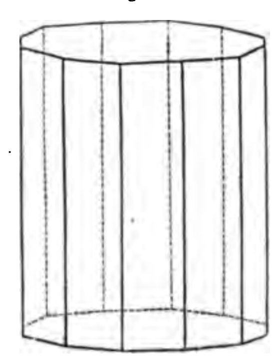
$$4 = 3m, \; m = \tfrac{4}{3}$$

und das Zeichen von $p^1 = \frac{4}{3}P2 = \{22\bar{4}3\}$ sein.

Die Combinationen der Pyramiden zweiter Ordnung mit dihexagonalen sind analog denen der Pyramiden erster Ordnung, nur mit den Unterschieden, welche in der Verschiedenheit der Stellung von beiderlei Formen begründet sind.

4) Das dihexagonale Prisma $\{hik0\}$ ist diejenige dihexagonale Pyramide, deren Ableitungszahl $m = \infty$ ist, erhält daher das Naumann'sche Zeichen ∞Pn; es besitzt denselben horizontalen Querschnitt, wie diejenigen dihexagonalen Pyramiden, welche mit jenem gleiches n, d. h. gleiche Indices der Nebenaxen haben; seine Flächen sind aber sämmtlich der Hauptaxe parallel, also vermag diese Form für sich allein den Raum nicht abzuschliessen. Fig. 283 stellt dieselbe in Combination mit der Basis dar. Das dihexagonale Prisma hat 12 Kanten, deren sechs stumpfer, die sechs alternirenden schärfer sind. Ein dihexagonales Prisma mit 12 gleichen Kanten ist aus demselben Grunde krystallonomisch unmöglich, wie eine gleichkantige dihexagonale Pyramide.

Fig. 283.



Je nachdem der Zahlenwerth von n näher an 1 oder an 2 liegt, ähnelt das dihexagonale Prisma mehr dem einen oder dem anderen der beiden folgenden Formen, dem Prisma erster Ordnung oder demjenigen zweiter Ordnung. Seine Flächen liegen zwischen den Flächen dieser beiden letzterwähnten Formen, und sie bilden Zuschärfungen der Kanten sowohl des einen, wie des anderen.

Die dihexagonalen Pyramiden mit gleichem n sind um so spitzer, sie nähern sich um so mehr der verticalen Stellung der Flächen, je grösser m ist; das Endglied einer solchen Reihe ist das dihexagonale Prisma mit demselben Werth von n; dieses ist zugleich identisch für alle hexagonalen Substanzen, weil seine Winkel nicht von dem Verhältniss $1 : c$, sondern nur von der rationalen Zahl n, welche bei allen jenen Körpern verwirklicht sein kann, abhängt. Die Combinationskanten der dihexagonalen Pyramiden mit dem Prisma, dessen n dasselbe ist, liegen horizontal.

5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung $\{10\bar{1}0\}$ ist die dihexagonale Pyramide mit den besonderen Werthen $m = \infty$ und $n = 1$, oder die hexagonale Pyramide erster Ordnung, deren m den Grenzwerth ∞ angenommen, ihr Zeichen ist also ∞P. Es ist gleichsam eine Pyramide erster Ordnung, mit verticalen, der Hauptaxe parallelen Flächen, welche

Form für sich den Raum nicht umschliesst. Diese Gestalt ist in Fig. 284 in Combination mit der Basis dargestellt. Da ihr Parameterverhältniss $1 : 1 : \infty$ gar keine Variation mehr zulässt, so giebt es nur ein hexagonales Prisma erster Ordnung, dessen Kantenwinkel 60°, identisch für alle

Fig. 284.

Fig. 285.

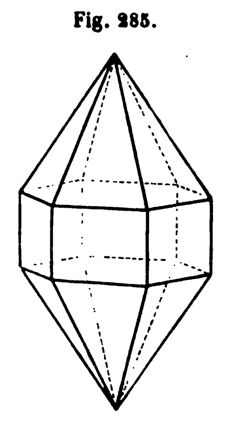
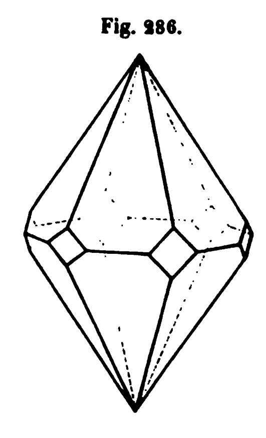


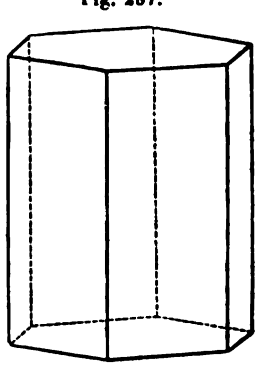
Fig. 286.



hexagonal krystallisirenden Körper. Dasselbe erscheint in Combinationen an allen hexagonalen Pyramiden derselben Ordnung als gerade Abstumpfung der Basiskanten (Fig. 285), an denen der anderen Ordnung als gerade Abstumpfung der Basisecken (Fig. 286).

6) Das hexagonale Prisma zweiter Ordnung $\{11\bar{2}0\} = \infty P2$, Fig. 287, ist die Grenzform der hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung für den Fall, dass $m = \infty$, es kann also auch nur eine einzige solche Gestalt geben, welche sich von der vorigen nur durch ihre Stellung (sie erscheint um 30° gegen jene gedreht) unterscheidet. Die Figg. 285 und 286 können auch als Combinationen dieses Prismas mit einer Pyramide zweiter Ordnung, resp. erster Ordnung dienen, wenn man die Neben- und Zwischenaxen vertauscht, d. h. jene Gestalten sich um die Hauptaxe und zwar um 30° gedreht denkt.

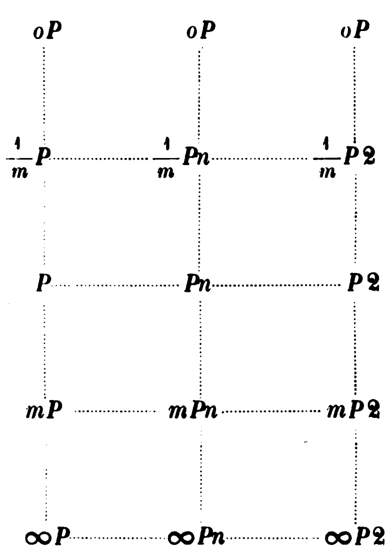
Fig. 287.



7) Die hexagonale Basis $\{0001\}$, die Haupt-Symmetrieebene selbst, ist die untere Grenzform aller hexagonaler Pyramiden, welche um so stumpfer werden, sich in der Lage ihrer Flächen um so mehr derselben nähern, als die Ableitungszahl m sich der Null nähert. Ist $m = 0$, so sind die Polkantenwinkel Null, die Flächen der Pyramide fallen in eine einzige Horizontalebene zusammen. Daher bezeichnet Naumann die Basis mit $0P$. Diese Form, deren es natürlich auch nur eine einzige giebt, kann noch weniger für sich allein auftreten, als die Prismen, da sie den Raum nur in einer Richtung (von oben nach unten) abschliesst. Die Gestalt ihres Um-

risses in den Combinationen ist entweder diejenige eines Hexagons oder eines gleichwinkeligen Zwölfecks (zwei um 30° gegen einander gedrehte Sechsecke), oder eines Dihexagons mit sechs schärferen und sechs stumpferen Winkeln.

Den Zusammenhang aller dieser soeben beschriebenen holoëdrischen Gestalten einer hexagonalen Krystallreihe kann man am besten in nachfolgendem Schema übersehen:



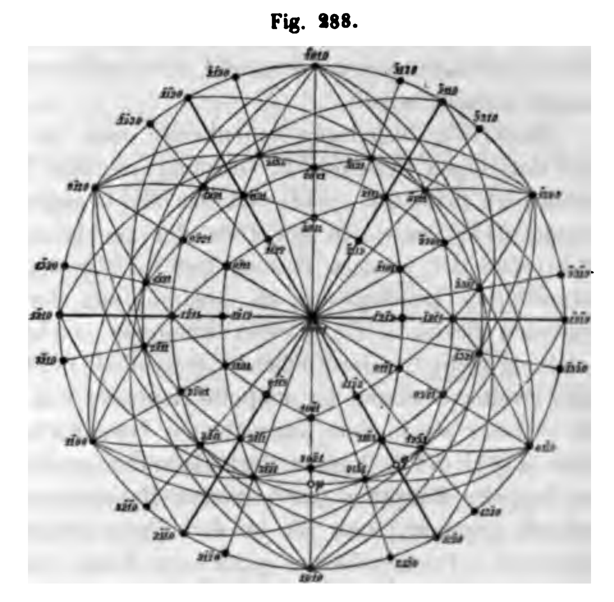
Die vorderste Verticalreihe ist diejenige der Pyramiden erster Ordnung, beginnend mit der flachsten, der Basis; zwischen dieser und der Grundform P liegen alle diejenigen, deren Ableitungszahl ein echter Bruch (allgemein durch $\frac{1}{m}$ bezeichnet) ist, zwischen P und dem Prisma erster Ordnung, ∞P, liegen sämmtliche spitzeren Pyramiden, dem Endglied der Reihe um so näher stehend, je grösser m. Die letzte Verticalreihe wird in ganz gleicher Weise von den Pyramiden zweiter Ordnung gebildet. Zwischen beiden befindet sich die Reihe der durch ihr m verschiedenen dihexagonalen Pyramiden mit gleichem n, welche sämmtlich zwischen der Basis und demjenigen dihexagonalen Prisma liegen, welches dasselbe n besitzt. Solcher Reihen giebt es natürlich so viele, als verschiedene Zahlenwerthe von n vorkommen; in dem Schema ist nur die allgemeine Reihe mit der unbestimmten Zahl n als Repräsentant derselben aufgeführt. Jede dihexagonale Pyramide ist nun zugleich ein Glied einer Horizontalreihe, welche sämmtliche dihexagonale Pyramiden mit g l e i c h e m m, und als Endglieder die erste und zweite Pyramide mit d e m s e l b e n m umfasst. So liegen z. B. alle dihexagonalen Pyramiden mit dem Zeichen Pn zwischen der primären Pyramide erster und der zweiter Ordnung, in der Lage ihrer Flächen um so näher an der ersteren, je weniger sich n von 1 unterscheidet, da-

liegen um so näher an der letzteren, je mehr sich n der 2 nähert. Endlich liegen auch alle unendlich spitzen dihexagonalen Pyramiden, d. h. die dihexagonalen Prismen, zwischen dem ersten und dem zweiten Prisma und bilden eine fortlaufende Reihe von $n = 1$ bis $n = 2$.

Sowohl die Flächen der in einer Verticalreihe stehenden, als der in Horizontalreihen vereinigten Krystallformen bilden mit den entsprechenden Flächen aller Formen derselben Reihe je eine Zone, schneiden einander also in parallelen Kanten.

§. 68. **Projection und Berechnung der hexagonalen Formen.** Es kann nicht zweifelhaft sein, dass eine Projection auf die Haupt-Symmetrieebene diejenige sein wird, welche am vollkommensten die Symmetrieverhältnisse der projicirten Flächen und Zonen zur Darstellung bringt; eine solche soll daher der Erläuterung der Zonenverhältnisse und der Berechnung zu Grunde gelegt werden. Der Grundkreis enthält alsdann offenbar die Pole der Flächen aller Prismen, von welchen diejenigen des 1. und 2. Prisma direct durch ihre Abstände von 60°, resp. 30° einzutragen sind (s. Fig. 288). Den Mittelpunkt der Projection bildet der Pol der Basis (0001), und mittelst der sechs den Neben- und Zwischenaxen parallelen Durchmesser sind die Zonen zwischen (0001) und dem Prisma 1. Ordnung, in welchen sämmtliche Pyramiden 1. Ordnung liegen, sowie die Zonen zwischen Basis und Prisma 2. Ordnung, d. h. die Zonen der Pyramiden 2. Ordnung, gegeben. Um die Pole einer Pyramide zu construiren, bedarf es also nur der Kenntniss ihrer Neigung zur Hauptaxe, resp. des Abstandes zwischen dem Pol einer ihrer Flächen und dem der Basis, welchen man auf einem Kreise vom Durchmesser des Grundkreises abträgt und so in bekannter Weise die Länge des Bogens auf der Projection findet. Seien $10\bar{1}1$, $01\bar{1}1$ u. s. f. die in dieser Weise bestimmten sechs Pole der primären Pyramide, so ergeben sich aus den Zonen je zweier, in welche jedesmal noch die beiden gegenüberliegenden Pole derjenigen Prismenfläche 1. Ordnung liegen, welche die von den beiden Pyramidenflächen gebildete Polkante symmetrisch halbirt, direct die Pole der Flächen der primären Pyramide

Fig. 288.



2. Ordnung $\{11\bar{2}2\}$, welche die Polkanten von $\{10\bar{1}1\}$ abstumpft. Ist der Winkel der Basiskante letzterer Pyramide bekannt, folglich auch der Winkel derselben zu (0001) (d. i. die Hälfte von dessen Supplement), so dient das rechtwinkelige sphärische Dreieck: 0001, $10\bar{1}1$, $11\bar{2}2$, in welchem der Winkel an 0001 $= 30^0$, dazu, den Polkantenwinkel derselben Pyramide zu berechnen — denn die Seite $10\bar{1}1 : 11\bar{2}2$ ist offenbar die Hälfte desselben — ebenso umgekehrt, um aus dem bekannten Winkel der Polkante denjenigen der Basiskante herzuleiten. Handelt es sich um die Berechnung des Axenverhältnisses c aus einem dieser beiden Winkel, so hat man nur den Bogen 0001 : $11\bar{2}2$, d. h. allgemein: die Neigung derjenigen Pyramide 2. Ordnung zu berechnen, welche die Polkante der Pyramide 1. Ordnung, deren Axenverhältniss man sucht, abstumpft. Wie eine einfache Betrachtung lehrt, ist die tang jenes Bogens das gesuchte Axenverhältniss c *). Hat man endlich den Basiskantenwinkel einer Pyramide 2. Ordnung selbst gemessen, so ergiebt dieser ohne Berechnung direct das Parameterverhältniss der Pyramide, derjenige der primären also das Axenverhältniss der Substanz. Ist umgekehrt dieses Axenverhältniss gegeben, und sollen aus demselben die Winkel der Pyramiden berechnet werden, so verfährt man genau ebenso, nur dass in dem benutzten rechtwinkeligen Dreiecke die früher unbekannte Seite nunmehr die gegebene ist, und die vorher bekannte gesucht wird.

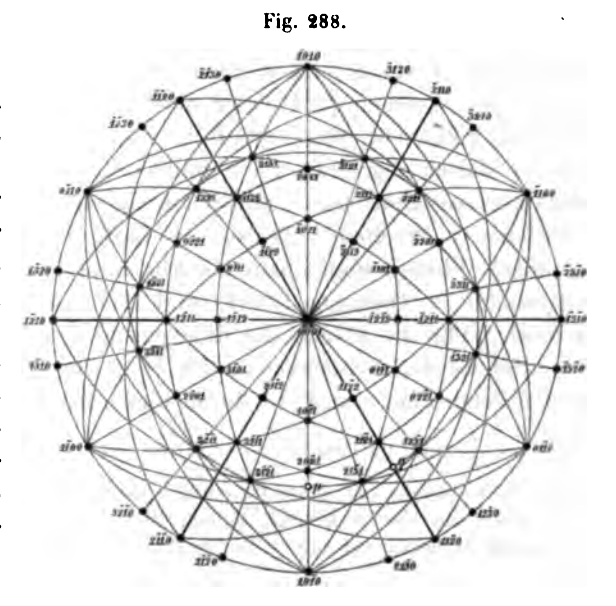
Durch die bisherigen Zonenkreise sind weiterhin noch bestimmt die Pole derjenigen Pyramide 2. Ordnung, welche in der Zone der vorderen Fläche der primären $(10\bar{1}1)$ und der rechts angrenzenden Fläche des ersten Prisma $(01\bar{1}0)$, sowie in der Zone der rechts anliegenden Pyramidenfläche $(01\bar{1}1)$ und der vordern Prismenfläche $(10\bar{1}0)$ liegt, also an der in Fig. 285 dargestellten Combination als Abstumpfung der über den Prismenkanten liegenden Ecken in Form eines Rhombus erscheinen würde. Die Zonengleichung giebt für diese Fläche das Symbol $\{11\bar{2}1\}$, allgemein hat eine Pyramide zweiter Ordnung die doppelte Hauptaxe von derjenigen erster Ordnung, mit welcher sie in dem angegebenen Zonenverbande steht. Da die Pyramide $\{11\bar{2}1\}$ die Polkanten derjenigen erster Ordnung abstumpft, welche die doppelte Hauptaxe der primären besitzt, so sind die Pole der letzteren dadurch gegeben, dass sie in den durch $\{11\bar{2}1\}$ und die jene Polkanten halbirenden Prismenflächen gegebenen Zonen liegen; so ergiebt sich z. B. der Pol $(20\bar{2}1)$ durch die Zone $[11\bar{2}1, 1\bar{1}00]$. In derselben Weise kann man weiter aus der Zone $[20\bar{2}1, 01\bar{1}0]$ den Pol $(22\bar{4}1)$ und mittelst dieses $(40\bar{4}1)$ finden u. s. f.

Gehen wir nunmehr zur Projection dihexagonaler Pyramiden über, so sei als Beispiel gewählt die häufigste $\{3\bar{1}\bar{2}1\}$, welche in den Zonen $[2\bar{1}\bar{1}1,$

*) Die cotang jenes Bogens ist $= \cos\gamma \cdot \text{tang}\ 30^0$, wenn $\gamma = 0001 : h0\bar{h}l$, d. h. wenn der Basiskantenwinkel gemessen worden ist; aus dem halben Polkantenwinkel $\alpha = h0\bar{h}l : kk\bar{h}l$ findet man seinen $\sin = \frac{\cos 30^0}{\cos\alpha}$.

$10\bar{1}0$] und [$20\bar{2}1$, $1\bar{1}00$] liegt. Da die erstere dieser beiden Zonen zugleich die Polkantenzone der primären Pyramide ist, also eine der wichtigsten Zonen, welche an flächenreichen Krystallen häufig durch eine Reihe von Formen repräsentirt wird, so soll an dieser Stelle die Bedingung allgemein entwickelt werden, welche erfüllt sein muss, damit eine dihexagonale Pyramide zwischen den Flächen ($2\bar{1}\bar{1}1$) und ($10\bar{1}0$) mit parallelen Kanten liege. Die Indices der Zone der beiden angeführten Flächen, bezogen auf die vorderen beiden Hälften der Nebenaxen A_1 und A_3, diese positiv genommen (vergl. S. 327), sind [$\bar{1}11$], die auf die gleichen Axenlängen bezogenen Indices hkl der dihexagonalen Pyramide $\{h\bar{i}\bar{k}l\}$ müssen also die Bedingung erfüllen, dass $h = k + l$, wie es in der That bei der Pyramide $\{3\bar{1}\bar{2}1\}$, ebenso bei $\{4\bar{1}\bar{3}1\}$, $\{6\bar{1}\bar{5}1\}$ u. s. w. der Fall ist*). — Trägt man die Pole dreier benachbarter Flächen der dihexagonalen Pyramide, z. B. $3\bar{1}\bar{2}1$, $21\bar{3}1$ und $12\bar{3}1$ in die Projection ein, so ist durch je zwei derselben eine Polkantenzone der Form bestimmt, und der betreffende Zonenkreis leicht zu construiren, da er zugleich durch den Pol derjenigen Prismenfläche 1. oder 2. Ordnung geht, welche die bezügliche Polkante der dihexagonalen Pyramide halbirt. Da wo einer dieser Zonenkreise einen Durchmesser $0001 : 10\bar{1}0$ etc. senkrecht durchschneidet, z. B. in p, liegt ein Pol derjenigen Pyramide 1. Ord., welche die nach den Zwischenaxen herablaufenden Polkanten (bei dem gewählten Beispiel sind es die schärferen) der dihexa-

Fig. 288.



*) Das allgemeine Zeichen der entsprechenden Pyramiden nach Naumann ergiebt sich leicht aus den Relationen $n = \frac{h}{k}$, $m = \frac{h}{l}$. In Folge der oben gefundenen Bedingung ist

$$m = \frac{k+l}{k} = 1 + \frac{l}{k} \qquad n = \frac{k+l}{l} = 1 + \frac{k}{l}.$$

Da folglich $\frac{l}{k} = m - 1$, so ist $n = 1 + \frac{1}{m-1} = \frac{m}{m-1}$.

Es liegen also alle dihexagonalen Pyramiden, welche das Zeichen $mP\frac{m}{m-1}$ besitzen, mit parallelen Kanten zwischen $2P2$ und ∞P.

gonalen Pyramide abstumpft, in den Schnittpunkten von der Lage q liegen die Pole der Pyramide 2. Ordnung, welche die nach den Nebenaxen herablaufenden Kanten abstumpft. Die Zeichen dieser beiden Pyramiden sind durch die Indices der dihexagonalen gegeben, ebenso das Zeichen des dihexagonalen Prisma, welches das gleiche Verhältniss der Nebenaxen besitzt und dessen Pole daher in den Zonen $[0001, hikl]$ liegen. Aus Fig. 288, in welcher die Pole des zu $\{3\bar{1}\bar{2}1\}$ gehörigen dihexagonalen Prisma vollständig eingetragen sind, ersieht man sofort, dass man die Pole jeder beliebigen dihexagonalen Pyramide aus ihrem Zeichen finden kann, indem man die Pole einer der beiden Abstumpfungen ihrer Polkanten und diejenigen des zugehörigen dihexagonalen Prisma einträgt und die betreffenden Zonenkreise construirt. Damit sind zugleich die sphärischen Dreiecke gegeben, durch welche für jede beliebige dihexagonale Pyramide die Berechnung ihrer Winkel zu erfolgen hat, wie an dem Beispiel der in Fig. 288 eingetragenen Form gezeigt werden soll.

Aus dem Zeichen $\{3\bar{2}\bar{1}1\}$ der dihexagonalen Pyramide folgt, dass ihre schärferen Polkanten abgestumpft werden durch $\{50\bar{5}2\}$. Die Länge der Hauptaxe dieser abgeleiteten Pyramide erhalten wir, indem wir das Axenverhältniss der Substanz c mit $\frac{5}{2}$ multipliciren, und können also in der weiter oben angegebenen Weise die Entfernung ihres Poles p von 0001 berechnen. Ebenso findet man als Abstumpfung der stumpferen Polkanten die Pyramide 2. Ordnung $\{33\bar{6}2\}$ und dadurch den Abstand des Poles q von 0001. Für die Fläche des dihexagonalen Prisma endlich, welche dieselben Indices der Nebenaxen hat, z. B. $(21\bar{3}0)$, allgemein: $(hik0)$, ergiebt sich der Polabstand von $10\bar{1}0$ durch eine einfache Berechnung:

$\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{h}$ sind die Parameter der Fläche auf den beiden benachbarten Seiten der Nebenaxen, welche 60° mit einander einschliessen und mit der Trace der Fläche selbst auf der Basis ein ebenes Dreieck bilden. Die vom Schnittpunkt der beiden ersteren Seiten dieses Dreiecks auf die dritte gefällte Senkrechte ist die Normale zur Fläche $(kih0)$, deren Richtung durch jenes Dreieck, d. h. durch die Längen $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{h}$ bestimmt ist. Für $k : h = 2 : 3$ z. B. ist der Abstand des Poles $21\bar{3}0$ von $10\bar{1}0 = 19° 6\frac{1}{2}'$, von $11\bar{2}0$ daher $= 10° 53\frac{1}{2}'$ *).

Der Bogen $10\bar{1}0 : 21\bar{3}0$ ist nun offenbar gleich dem Winkel an 0001 in dem Dreieck 0001, $21\bar{3}1$, p, und seine Differenz von 30°, d. i. der Bogen $21\bar{3}0 : 11\bar{2}0$, gleich dem entsprechenden Winkel im Dreieck 0001, $21\bar{3}1$, q. Aus diesen Winkeln und den bekannten Bögen 0001 : p und 0001 : q können in jenen Dreiecken, da dieselben rechtwinkelige sind, die Seiten $21\bar{3}1 : p$, $21\bar{3}1 : q$ und $21\bar{3}1$: 0001 berechnet werden. Die beiden ersten sind die halben Polkantenwinkel von $\{21\bar{3}1\}$, die letzte giebt von 90° subtrahirt den Bogen $21\bar{3}1 : 21\bar{3}0$, d. h. den halben Winkel der Basiskante.

---

*) Daraus folgt der Winkel der an den Zwischenaxen liegenden Kanten des Prisma $\infty P\frac{3}{2}$ = 38° 13′, derjenige der Kanten an den Nebenaxen = 21° 47′.

Soll dagegen aus den gemessenen Winkeln einer dihexagonalen Pyramide deren Parameterverhältniss und somit ihr Zeichen berechnet werden, so benutzt man natürlich dieselben Dreiecke in umgekehrter Weise. Seien z. B. die beiden Polkantenwinkel, also die Bögen $a = p : 21\bar{3}1$ (allgemein: $k i \bar{h} l$) und $a' = q : 21\bar{3}1$, gegeben, so folgt genau so wie S. 265

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin a}$$

und da hier $A' = 30^0 - A$, so ist

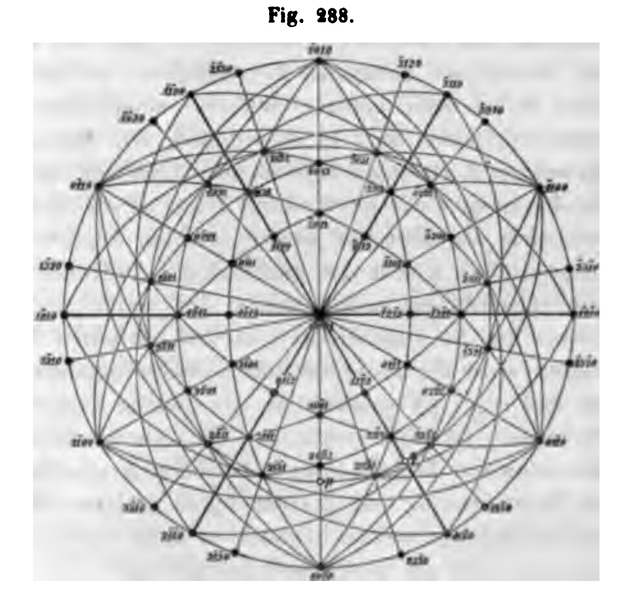
$$\tfrac{1}{2} \text{ cotang } A - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sin a'}{\sin a},$$

folglich

$$\text{cotang } A = \frac{2 \sin a'}{\sin a} + \sqrt{3}.$$

Das so gefundene A ist gleich dem Bogen $10\bar{1}0 : 21\bar{3}0$ (allgemein: $k i \bar{h} 0$), aus welchem sich mittelst ebener Trigonometrie das Verhältniss $h : k$ (n) berechnen lässt. Das Verhältniss $h : l$ (m) gilt zugleich für die abstumpfende Pyramide 2. Ordnung q, man hat also nur den Bogen $0001 : q$ (aus dem Dreieck: 0001, q, $21\bar{3}1$) zu berechnen und die hieraus sich ergebende Länge der Hauptaxe der Pyramide q durch c, die Hauptaxenlänge der Grundform, zu dividiren; der dem gefundenen Quotienten nächstliegende rationale Werth wird für $h : l$ eingesetzt. Sind statt der beiden Polkanten der dihexagonalen Pyramide nur eine und der Winkel der Basiskanten gemessen, so gestaltet sich die Berechnung des Zeichens noch einfacher: Aus dem halben Basiskantenwinkel erhält man durch Subtraction von 90° den Bogen $0001 : 21\bar{3}1$ (allgemein: $0001 : k i \bar{h} l$); dieser bildet mit der halben gemessenen Polkante, z. B. mit dem Bogen $p : 21\bar{3}1$ und mit dem Bogen $0001 : p$ ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem somit die letzterwähnte Seite und der Winkel an 0001 (oben mit A bezeichnet) ohne Weiteres berechnet werden können. Damit sind aber für die Fläche $21\bar{3}1$ (allgemein: $k i \bar{h} l$) zwei Zonen bestimmt, nämlich [p, $\bar{1}2\bar{1}0$] und [0001, $21\bar{3}0$], aus welchen ihre Indices sich ergeben.

Fig. 288.



In den meisten Fällen hat man zur Berechnung des Zeichens einer dihexagonalen Pyramide nur eine Winkelmessung nöthig, wenn ihre Flächen nämlich in einer bekannten Zone liegen. Auch das alsdann einzuschlagende Verfahren der Rechnung lässt sich leicht an dem Beispiel Fig. 288 erläutern. Sei z. B. der Bogen $11\bar{2}1 : 21\bar{3}1$ *) gemessen worden, so bildet dieser eine Seite des rechtwinkeligen Dreiecks $11\bar{2}1$, $21\bar{3}1$, q, in welchem noch der Winkel an $11\bar{2}1$ bekannt ist, da derselbe zugleich dem Dreieck $11\bar{2}1$, $11\bar{2}0$, $10\bar{1}0$ angehört und daher aus dem Axenverhältniss der Substanz berechnet werden kann. In dem ersteren Dreieck lässt sich daher der Bogen $11\bar{2}1 : q$ und aus diesem das Zeichen der Pyramide q bestimmen. Die Indices dieser letzteren, zusammen mit der Bedingungsgleichung für die Lage in der Zone [$11\bar{2}1$, $10\bar{1}0$] (vergl. S. 333), liefern das Zeichen der dihexagonalen Pyramide.

§. 69. **Beispiele holoëdrisch hexagonal krystallisirender Substanzen.** Es existirt nur eine kleine Zahl von Körpern, welche unzweifelhaft holoëdrisch hexagonal krystallisiren; die grosse Mehrzahl der hexagonalen Substanzen gehört vielmehr einer hemiëdrischen Abtheilung, der rhomboëdrischen, an. In dieser sind, wie später gezeigt werden wird, die Pyramiden 2. Ordnung scheinbar holoëdrisch, daher, im Falle eine Substanz nur Pyramiden einer Stellung zeigt, es zweifelhaft ist, ob sie nicht jener Hemiëdrie angehört und ihre Pyramiden folglich als solche 2. Ordnung aufzufassen sind. Selbst das gleichzeitige Auftreten aller Flächen einer Pyramide 1. Ordnung neben denen der zweiten giebt noch keinen strengen Beweis für die Zugehörigkeit zur holoëdrischen Abtheilung, weil die beiden Hälften einer Pyramide nur von einander »unabhängige« Gestalten darstellen, also bei einer Krystallisation die gleiche Ausbildung derselben nicht ausgeschlossen ist. Erst wenn man von einer Substanz an verschiedenen, unter abweichenden Verhältnissen erhaltenen Krystallisationen stets alle Flächen der Pyramiden 1. und 2. Ordnung in gleicher Ausbildung oder vollzählige dihexagonale Pyramiden beobachtet, kann man die Substanz mit volkommener Sicherheit als holoëdrisch betrachten.

Da die Hemimorphie als eine von der Hemiëdrie verschiedene und unabhängige Erscheinung auftreten kann (s. S. 228), so ist eine solche möglich in Bezug auf die Hauptaxe der hexagonalen Krystalle. Während unter der kleinen Zahl unzweifelhaft holoëdrischer Substanzen sich keine hemimorph krystallisirende befindet, sind deren mehrere unter den hemiëdrisch und tetartoëdrisch krystallisirenden Körpern und werden daher in den folgenden Abtheilungen dieses Systems Erwähnung finden.

Ebenso sind für die Zwillingsbildung des hexagonalen Systems wichtigere Beispiele nur unter den zahlreichen rhomboëdrisch-hemiëdrischen Körpern zu finden, daher an dieser Stelle nur darauf hingewiesen werden

*) Es ist dies an der S. 337 abgebildeten Combination des Beryll der Winkel $q : s$ in der bekannten Zone $q : m$.

möge, dass als Zwillingsebenen holoëdrisch-hexagonaler Krystalle möglich sind alle Flächen, mit Ausnahme derjenigen der beiden hexagonalen Prismen und der Basis, weil diese den Symmetrieebenen parallel gehen.

In der folgenden krystallographischen Beschreibung holoëdrisch-hexagonaler Substanzen bedeutet $a : c$ das Verhältniss einer Nebenaxe ($= 1$ gesetzt) zur Hauptaxe der primären Pyramide, und ist demselben der Autor beigefügt, dessen Messungen dem Werthe des Axenverhältnisses zu Grunde liegen.

Magnesium $= Mg$. $a : c = 1 : 1,6391$ Des Cloizeaux. Bildet sublimirt kleine hexagonale Prismen $\{10\bar{1}0\}$ mit $\{0001\}$, zuweilen mit $\{10\bar{1}1\}$.*)

Beryllium $= Be$. $a : c = 1 : 1,5802$ Brögger. Aeusserst kleine Krystalle mit den Formen: $\{0001\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{10\bar{1}2\}$.

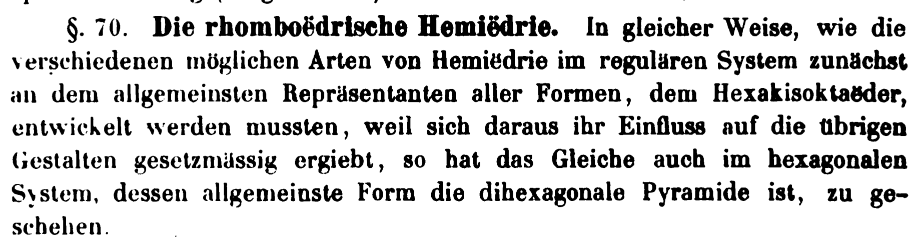
Zink $= Zn$. $a : c = 1 : 2,177$ G. Rose. Die auf Hütten durch Destillation entstehenden Krystalle bilden horizontal gestreifte Prismen mit Basis und untergeordneter Pyramide.

Beryll (wenn grün gefärbt, »Smaragd«) $= Be^3 Al^2 (SiO^3)^6$. $a : c = 1 : 0,4989$ N. von Kokscharow. Häufig nur $\{10\bar{1}0\}$, $\{0001\}$ in prismatischer Ausbildung, nicht selten auch die flächenreichere Combination Fig. 289, $m = \{10\bar{1}0\}$, $o = \{10\bar{1}1\}$, $c = \{0001\}$, $o^2 = \{20\bar{2}1\}$, $q = \{11\bar{2}1\}$, $s = \{3\bar{2}\bar{1}1\}$. Von diesen Flächen liegen die dihexagonale Pyramide s, sowie q in der Zone einer Fläche von o und einer seitlich anstossenden m (s. S. 333). Doppelbrechung negativ, schwach. Brechungsexponenten:

Linie B :	$\omega = 1,5663$	$\varepsilon = 1,5616$
- D :	- 1,5703	- 1,5659
- E :	- 1,5743	- 1,5697

Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 42, 120). Häufig durch Spannungen inhomogen und daher scheinbar optisch zweiaxig (vergl. S. 141).

Fig. 289.

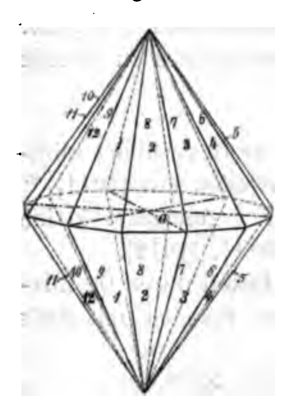


§. 70. **Die rhomboëdrische Hemiëdrie.** In gleicher Weise, wie die verschiedenen möglichen Arten von Hemiëdrie im regulären System zunächst an dem allgemeinsten Repräsentanten aller Formen, dem Hexakisoktaëder, entwickelt werden mussten, weil sich daraus ihr Einfluss auf die übrigen Gestalten gesetzmässig ergiebt, so hat das Gleiche auch im hexagonalen System, dessen allgemeinste Form die dihexagonale Pyramide ist, zu geschehen.

*) Magnesium und Zink sind, obgleich bisher an denselben nur Pyramiden einer Ordnung (s. S. 336) beobachtet wurden, wegen ihrer unzweifelhaften Isomorphie mit Beryllium, welches nach Brögger in verschiedenen Krystallisationen ganz holoëdrische Entwickelung der Pyramiden zeigt (s. Zeitschr. f. Kryst. 9, 286), ebenfalls mit grosser Wahrscheinlichkeit als holoëdrisch zu betrachten.

Denken wir uns diese durch drei senkrechte, gleichwerthige Symmetrieebenen des Hexagonalsystems, z. B. diejenigen, welche durch die Nebenaxen (die strichpunktirten Linien *a* in Fig. 290) gehen, in sechs Sechstel zerlegt, so liegen in jedem solchen Sechstel vier Flächen der dihexagonalen Pyramide, 1, 2 oben und 1, 2 unten, welche sämmtlich die nach vorn gehende Zwischenaxe in demselben Abstande schneiden. Würden wir nun von diesen Sechsteln drei so auswählen, dass stets die zu den theilenden Ebenen symmetrischen der andern Hälftform angehören, also die drei abwechselnden, so würde offenbar jene Zwischenaxe vorn von vier Flächen, hinten in demselben Abstande von keiner einzigen (weil die Flächen 7, 8 nach einer theilenden Ebene zu 1, 2 symmetrisch sind) geschnitten werden. Da die so entstehende Hälftform nicht den S. 226 angegebenen Bedingungen einer hemiëdrischen genügt, ist es nöthig, die Theilung der dihexagonalen Pyramiden ausser nach jenen drei Ebenen auch noch durch die Haupt-Symmetrieebene, oder durch die drei anderen senkrechten Symmetrieebenen (durch die Zwischenaxen), oder endlich durch alle sieben Ebenen, nach denen Symmetrie stattfindet, vorzunehmen. Dass diese drei Methoden in der That die einzigen sind, durch welche man je eine mögliche Hemiëdrie erhält, lehrt folgende Betrachtung: Die sechs Seiten der drei Zwischenaxen werden in denselben Abständen von je vier Flächen der dihexagonalen Pyramide geschnitten; von einer hemiëdrischen Form müssen also durch dieselben sechs Punkte je zwei Flächen gehen; aus jenen vier Flächen, z. B. 1, 2 oben, 1, 2 unten, ist aber eine Auswahl von zweien auf dreierlei Art möglich, nämlich *a*) je zweier neben einander gelegener, z. B. 1, 2 oben, 3, 4 unten, 5, 6 oben u. s. f. *b*) je zweier in einer Basiskante zusammentreffender, z. B. 2 oben und unten, 4 oben und unten u. s. f. *c*) je zweier kreuzweise gelegener, z. B. 1 unten, 2 oben, 3 unten, 4 oben u. s. w.

Fig. 290.



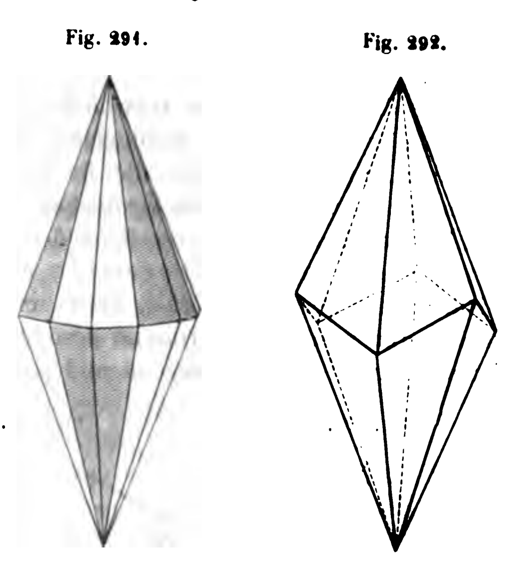
Jede dieser drei Arten der Auswahl der Flächen giebt, wie man sich leicht an einem colorirten Modelle überzeugen kann, eine Hälftform, welche in Bezug auf alle Symmetrieaxen die S. 226 aufgestellten Bedingungen erfüllt. Es sind demnach, ebenso wie im ersten Krystallsystem, drei verschiedene Arten von Hemiëdrie möglich, von denen zunächst diejenige betrachtet werden soll, bei der die obigen sechs Sechstel noch durch die Haupt-Symmetrieebene halbirt, die Formen also in zwölf Dodekanten zerlegt werden. Sechs dieser Zwölftel enthalten also folgende Flächen der dihexagonalen Pyramide:

1, 2 oben, 3, 4 unten, 5, 6 oben, 7, 8 unten, 9, 10 oben, 11, 12 unten.

Die zu diesen nach den zerlegenden Ebenen symmetrischen Flächen der anderen Hälfte sind:

1, 2 unten, 3, 4 oben, 5, 6 unten, 7, 8 oben, 9, 10 unten, 11, 12 oben.

1) Die dihexagonale Pyramide liefert nach dem Gesetz dieser Hemiëdrie, durch Beibehaltung der Paare neben einander liegender Flächen in allen alternirenden Dodekanten und Verschwindenlassen der anderen, Fig. 291, je zwei Hälften, welche die Gestalt Fig. 292 besitzen, und zwar bilden die weiss gelassenen Flächen diese Form in der in letzterer Figur gezeichneten Stellung, während die zweite Hälfte eine genau gleiche, aber um 180° (oder 60°, was zu demselben Resultat führt) gedrehte Gestalt liefert. Eine solche Krystallform heisst, weil bei gleicher Centraldistanz ihre Flächen die Gestalt ungleichseitiger Dreiecke (Skalene) haben, hexagonales Skalenoëder, und unterscheidet man die beiden, aus einer dihexagonalen Pyramide sich ableitenden Hemiëder als positives und negatives Skalenoëder und bezeichnet dieselben mit Hülfe der Indices einer ihrer Flächen $\varkappa\{hikl\}$ und $\varkappa\{ik\bar{h}l\}$ *), nach Naumann mit:


Fig. 291. Fig. 292.

$$+\frac{mPn}{2} \text{ und } -\frac{mPn}{2} \text{ **)}$$

Selbstverständlich ist es an und für sich beliebig, welche der beiden Hälftformen man in einem speciellen Falle positive, welche negative nennt, und es sind hier dieselben Erwägungen, welche S. 320 über die Wahl der Grundform angestellt wurden, Platz greifend; so ist es z. B. üblich, die an einem derartig krystallisirenden Stoffe regelmässig vorherrschenden, oder die durch Spaltbarkeit ausgezeichneten Hälftformen als positive zu bezeichnen. Ist eine solche Wahl einmal an einem Krystall getroffen, so ist damit natürlich das Vorzeichen + oder — für alle anderen, daran auftretenden Formen gegeben.

*) Diese Hemiëdrie bietet, wie aus der Betrachtung der entsprechenden des tetragonalen Systems hervorgehen wird, gewisse Analogien mit der tetraëdrischen, daher sie mit dem Zeichen $\varkappa$ von den übrigen unterschieden werden soll, obgleich ihre Formen keine »geneigtflächige« sind, sondern aus parallelen Flächenpaaren bestehen.

**) Eine allgemein gebrauchte Abkürzung dieser Zeichen wird im nächsten Paragraphen erörtert werden.

Ein hexagonales Skalenoëder besteht aus drei oberen und drei, in alternirender Stellung dazu befindlichen, unteren Flächenpaaren, deren Flächen sich je in einer stumpferen Polkante, deren Winkel gleich demjenigen der entsprechenden Polkante an der dihexagonalen Pyramide ist, schneiden. Ausser diesen sechs stumpferen Polkanten besitzt das Skalenoëder noch sechs schärfere, mit jenen abwechselnd, und ebenso viel (im Zickzack auf- und niedersteigende), unter sich gleiche, Mittelkanten. Die Polecken desselben sind also 3 + 3kantige, die Seitenecken 2 + 1 + 1-kantige.

Was die Combinationen verschiedener Skalenoëder mit einander betrifft, so sind dieselben äusserst mannigfaltig, je nach den Werthen von *m* und *n* derselben, und je nachdem die in Combination tretenden Formen von gleichem oder verschiedenem Vorzeichen sind. Die wichtigsten Fälle werden wir bei den Beispielen dieser Hemiëdrie kennen lernen.

2) Die hexagonale Pyramide erster Ordnung, derselben Hemiëdrie unterworfen (Fig. 293), liefert eine Form, welche nur aus sechs, drei oberen und drei alternirend gestellten unteren Flächen besteht, von denen je zwei gegenüberliegend und parallel sind. Diese Form, Fig. 294, heisst **Rhomboëder***) und besteht aus ... einander unter ... selben schiefen ... kel durchschne ... Paaren paralle ... chen, daher de... Gestalt bei gle... Centraldistanz

Fig. 293.

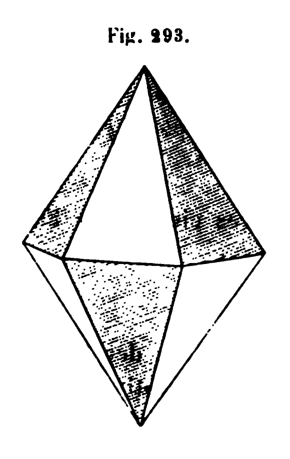


Fig. 294.

eines Rhombus ist. Bei dem in Fig. 294 ... Rhomboëder ist der stumpfe Winkel dieses ... bus an der Polecke, bei demjenigen ... der spitze ebendaselbst befindlich; ein Rh... der der ersteren Art nennt man ein **stumpfes**, eines der zweiten Art ein **spitzes**. Die beiden durch die H... entstehenden Rhomboëder sind um so spitzer, je spitzer die ... Pyramide ist, von der sie sich ableiten. Wie aus der Ableit... geht, sind die sechs Polkanten eines Rhomboëders unter einander gleich, ebenso die sechs Mittelkanten, und da die Form parallel... so sind die Winkel der Polkanten die Supplemente von denje... Mittelkanten. Bei den spitzen Rhomboëdern ist der Winkel der Pol... grösser als 90°, derjenige der Mittelkanten um ebenso viel kl... bei den stumpfen ist das Umgekehrte der Fall. Da an jedem ...

* Wegen der durch ihre Häufigkeit veranlassten Wichtigkeit der Rhomboëder ist diese Hemiëdrie nach denselben benannt worden.

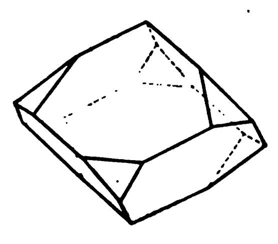
krystallisirenden Körper eine beliebig grosse Reihe von Rhomboëdern möglich ist, so kommt zuweilen auch ein solches vor, dessen Winkel sehr wenig von 90° abweicht, welches also fast die Gestalt eines Würfels hat; da ein solcher Krystall sich in der Richtung der Hauptaxe anders mit der Temperatur ausdehnt, als senkrecht dazu, demnach die Rhomboëder spitzer oder stumpfer werden, je nachdem die Ausdehnung durch die Wärme in der Hauptaxe grösser oder kleiner, als in den übrigen Richtungen, — so kann ein solches würfelähnliches Rhomboëder, wie es bei jeder dieser Abtheilung zugehörigen Substanz krystallonomisch möglich ist, bei einer bestimmten Temperatur sogar genau rechtwinkelige Polkanten und Mittelkanten besitzen, ohne deshalb ein reguläres Hexaëder zu sein. Denn zum Wesen eines regulären Krystalls gehört eben die Constanz seiner Winkel und somit seiner weit höheren Symmetrie für alle Temperaturen, gehört die Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit nach allen Richtungen, während jenes scheinbare Hexaëder natürlich ein optisch einaxiger Krystall bleibt, also nur als »Rhomboëder von 90°« betrachtet werden darf. Von einem Uebergang des hexagonalen Systems in das reguläre könnte nur dann die Rede sein, wenn mit der Annäherung jenes Rhomboëders an den Würfel auch die übrigen Eigenschaften des betreffenden Krystalls, z. B. seine optischen, sich denen eines regulären näherten; dies ist aber keineswegs der Fall.

Fig. 295.

Die beiden, aus derselben Pyramide erster Ordnung abgeleiteten Rhomboëder, welche natürlich ganz gleiche Gestalt haben und sich nur durch ihre, um 60° oder 180° gegen einander gedrehte Stellung unterscheiden, werden ebenso wie die Skalenoëder als positives und negatives bezeichnet, und zwar ist es üblich, in allen Fällen, in denen nach den Flächen eines derselben Spaltbarkeit stattfindet, dieses das positive zu nennen.



Fig. 296.



Zwei zusammengehörige Rhomboëder erscheinen derart mit einander combinirt, Fig. 296, dass das eine die Seitenecken des andern, bei gleicher Neigung beider Arten von Flächen gegen die Hauptaxe, abstumpft. Die Bezeichnung zweier solcher Rhomboëder ist $\varkappa\{h0\bar{h}l\}$ und $\varkappa\{0h\bar{h}l\}$, nach Naumann:

$$+\frac{mP}{2} \text{ und } -\frac{mP}{2}.$$

Die Combination Fig. 297 stellt ebenfalls zwei Rhomboëder von entgegengesetztem Vorzeichen dar; bezeichnen wir das vorherrschende, r, mit $\varkappa\{10\bar{1}1\}$,

so gehört das zweite, s, welches die Polkanten des ersten gerade abstumpft, offenbar einer stumpferen Pyramide, also einer solchen mit kleinerer Hauptaxe, an. Um diese letztere zu bestimmen, bedarf es noch einer Fläche, z. B. der in derselben Figur mit c bezeichneten Basis $\{0001\}$, deren Combinationskante mit s horizontal sein muss, da sie ja die Kante zwischen $\{0001\}$ und einer Pyramidenfläche ist; dieselbe Richtung besitzt aber auch die Kante einer s-Fläche mit einer darunter liegenden r-Fläche, da andernfalls s keine gerade Abstumpfung der Polkanten von r wäre; es liegen demnach z. B. s_1, c und r_4 in einer Zone, und da s_1 zugleich in der Zone $r_1\, r_2$ liegt, so sind seine Indices bestimmt. Beziehen wir diese wieder auf die beiden nach vorn gehenden und positiv angenommenen Seiten der Nebenaxen, so sind die Symbole von r_1 und r_2 (111) und $(\bar{1}01)$, die von c und r_4 (001) und $(01\bar{1})$; aus diesen beiden Zonen folgen die Indices $0\bar{1}\bar{2} = 012$ und daraus das Zeichen der Fläche $s_1 = (01\bar{1}2)$. Für jedes beliebige Rhomboëder $r = \varkappa\{h\,0\,\bar{h}\,l\}$ ergiebt sich in derselben Weise für das die Polkanten abstumpfende Rhomboëder das Zeichen $\varkappa\{0.h.\bar{h}.2l\}$. Da $\frac{h}{l} = m$, so erhält das zweite Rhomboëder das Naumann'sche Zeichen $-\frac{\frac{m}{2}P}{2}$, wenn man das erste Rhomboëder $+\frac{mP}{2}$ bezeichnet.

Fig. 297.

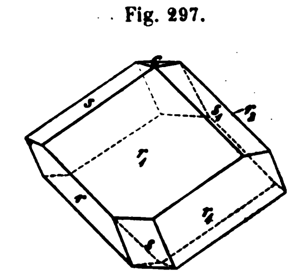
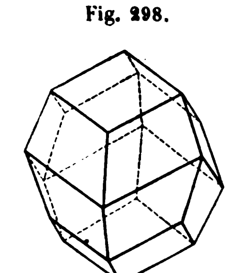


Fig. 298 zeigt ein Rhomboëder in Combination mit einem Skalenoëder, welches die Mittelkanten des ersteren zuschärft. Die Mittelkanten des Skalenoëders sind also parallel denen des Rhomboëders, und da ein Rhomboëder durch die Richtung seiner Mittelkanten vollkommen bestimmt ist (je zwei Mittelkanten bestimmen die Lage einer Fläche desselben), so muss es möglich sein, aus dem Zeichen eines Skalenoëders dasjenige des Rhomboëders, welches mit ihm gleiche Mittelkanten hat, des sogenannten »Rhomboëders der Mittelkanten«, abzuleiten. Sei $\varkappa\{h\,i\,\bar{k}\,l\}$ das Zeichen des Skalenoëders, so sind die Indices zweier Flächen desselben, welche in der linken Mittelkante zusammenstossen (auf dieselben Nebenaxen bezogen, wie vorhin): hkl und $hi\bar{l}$, diejenigen der beiden Flächen, welche die rechts vorn gelegene Mittelkante bilden, khl und $ih\bar{l}$. Die oben vorn sichtbare Rhomboëderfläche ist, da sie in beiden Zonen liegt, durch jene Werthe bestimmt, und zwar findet man, wenn man ihre Indices aus jenen beiden Zonen berechnet und dann für i seinen Werth $h-k$ einsetzt, die drei Indices der Rhomboëderfläche, bezogen auf die beiden vordern Nebenaxen und die Hauptaxe:

Fig. 298.



$$2k-h \qquad 2k-h \qquad l$$

Das vollständige Zeichen des Rhomboëders der Mittelkanten ist also

$$\varkappa\{2k-h \,.\, 0 \,.\, -2k+h \,.\, l\}.$$

Will man das Parameterverhältniss dieses Rhomboëders ausdrücken durch die Werthe $m = \frac{h}{l}$ und $n = \frac{h}{k}$, so ergeben sich, weil $k = \frac{h}{n}$ und $l = \frac{h}{m}$, die Indices zweier Nebenaxen und der Hauptaxe:

$$\frac{2h}{n} - h \qquad \frac{2h}{n} - h \qquad \frac{h}{m}$$

d. i.

$$\frac{2-n}{n} \qquad \frac{2-n}{n} \qquad \frac{1}{m}$$

also die Parameter:

$$\frac{n}{2-n} \qquad \frac{n}{2-n} \qquad mc$$

d. i.

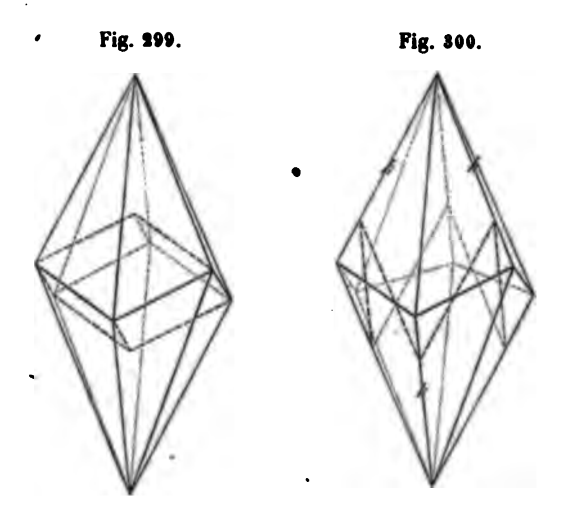
$$1 \qquad 1 \qquad \frac{m(2-n)}{n}c.$$

Das Rhomboëder hat also das Zeichen

$$+\frac{\frac{m(2-n)}{n}P}{2}.$$

Denkt man sich die Flächen dieses Rhomboëders durch die Mittelkanten des Skalenoëders $+\frac{mPn}{2}$ gelegt, so wird es von diesem vollständig umhüllt und beide Formen berühren einander in ihren Mittelkanten (Fig. 299). In ähnlicher Weise umhüllt ein Skalenoëder noch zwei andere Rhomboëder, welche man das der kürzeren und dasjenige der längeren Polkanten nennt. Das erstere hat zu Polkanten die kürzeren Polkanten des Skalenoëders, k Fig. 300, es ist also ebenfalls durch dessen Zeichen vollkommen bestimmt. In genau derselben Weise berechnet, wie es soeben für das Rhomboëder der Mittelkanten geschah, ergiebt sich dessen Zeichen

Fig. 299. Fig. 300.



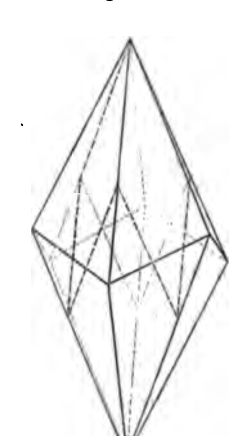
$$\varkappa\{2h-k \,.\, 0 \,.\, -2h+k \,.\, l\} = +\frac{\frac{m(2n-1)}{n}P}{2}$$

Ein Skalenoëder, mit seinem Rhomboëder der kürzeren Polkanten combinirt, erscheint als Zuschärfung der Polkanten des letzteren, Fig. 301.

Dasjenige Rhomboëder, dessen Polkanten die längeren Polkanten des Skalenoëders sind, ist ebenfalls hierdurch bestimmt. Die Rechnung, in derselben Weise durchgeführt, liefert dafür das Zeichen

$$\varkappa\{0\,.\,h+k\,.\,-h-k\,.\,l\} = -\frac{\frac{m(n+1)}{n}P}{2}$$

Fig. 301. Fig. 302.



Es ist das spitzeste Rhomboëder (s. Fig. 302), welches von dem Skalenoëder umhüllt wird, und ist von entgegengesetztem Vorzeichen, da seine Flächen in denjenigen Dodekanten liegen, denen die des Skalenoëders nicht angehören.

Vergleicht man die Längen der Hauptaxe dieser drei, von einem Skalenoëder sich ableitenden Rhomboëder (die Längen der Nebenaxen = 1 gesetzt), so sieht man, dass diejenige des dritten gleich der Summe der beiden ersten, denn

$$n+1 = (2n-1) + (2-n).$$

Durch die beiden Rhomboëder der längeren und der kürzeren Polkanten sind zugleich die beiden Rhomboëder bestimmt, welche die längeren und die kürzeren Polkanten des Skalenoëders gerade abstumpfen, es sind diejenigen mit entgegengesetztem Vorzeichen und halb so grossem Parameter der Hauptaxe. Demgemäss werden die längeren Polkanten von $\varkappa\{h\bar{i}\bar{k}l\}$ abgestumpft durch

$$\varkappa\{h+k\,.\,0\,.\,-h-k\,.\,2l\}$$

die kürzeren durch:

$$\varkappa\{0\,.\,2h-k\,.\,-2h+k\,.\,2l\}$$

Sind umgekehrt die Zeichen der beiden die Polkanten eines Skalenoëders abstumpfenden Rhomboëder $\varkappa\{h0\bar{h}l\}$ und $\varkappa\{0h'\bar{h}'l'\}$ gegeben, so bestimmen diese ihrerseits das Skalenoëder, da dasselbe in den beiden Zonen liegt, welche von je einer dieser Rhomboëderflächen und der die zugehörige Polkante des Skalenoëders halbirenden Prismenfläche 2. Ordnung gebildet wird. Führt man diese Zonenrechnung durch, so ergiebt sich das Zeichen des Skalenoëders:

$$\varkappa\{2(hl'+h'l)\,.\,-2(2h'l-hl')\,.\,-2(2hl'-h'l)\,.\,3ll'\}.$$

3) Je grösser der Werth von n bei einem Skalenoëder, d. h. je näher er 2 ist, desto mehr ähnelt dasselbe einer Pyramide der zweiten Ordnung, desto weniger unterscheiden sich die stumpferen und die schärferen Polkanten in ihren Winkeln von einander. Ist $n = 2$, so sind

alle Polkanten gleich, die Mittelkanten horizontal, und die Form fällt zusammen mit einer Pyramide zweiter Ordnung. Da ein Skalenoëder einem Rhomboëder um so ähnlicher ist, je weniger dessen n von 1 verschieden, so ist dieses Romboëder selbst die Grenzgestalt für den Fall $n = 1$, in welchem der Winkel der stumpferen Polkanten gleich Null wird. Die andere Grenzform einer solchen Reihe von Skalenoëdern ist eine Pyramide der andern Ordnung. Man ersieht dies am leichtesten, wenn man die rhomboëdrische Hemiëdrie auf diese Form anwendet, Fig. 303, wobei dieselbe zu betrachten ist als diejenige dihexagonale Pyramide, deren $n = 2$. Es resultiren dann nämlich zwei vollkommen zusammenfallende hemiëdrische Formen, welche sich folglich auch nicht von der holoëdrischen unterscheiden können.

Fig. 303.

Von den Combinationen der hemiëdrischen Pyramiden der zweiten Ordnung mit Rhomboëdern u. s. w. werden wir einige gelegentlich der Beispiele dieser Abtheilung kennen lernen.

4) Die dihexagonalen Prismen sind in den holoëdrischen Krystallreihen diejenigen dihexagonalen Pyramiden, deren $m = \infty$; werden dieselben nun hemiëdrisch, Fig. 304, so liefern sie zwei Formen, bei denen die Flächen der einen vollkommen zusammenfallen mit denjenigen der andern, d. h. es entsteht durch die Hemiëdrie dasselbe dihexagonale Prisma, welches anzusehen ist als ein Skalenoëder, dessen $m = \infty$. Es unter-

Fig. 304.

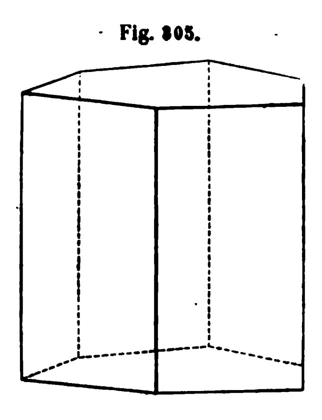


Fig. 305.

scheidet sich daher diese Form von der holoëdrischen dadurch, dass drei ihrer Flächenpaare (die oben weiss gelassenen) den drei oberen Flächenpaaren des Skalenoëders Fig. 292, die anderen den drei unteren Flächenpaaren des Skalenoëders entsprechen. Tritt daher zu der Hemiëdrie eine Hemimorphie nach der Hauptaxe hinzu, durch welche die obere und die untere Hälfte des Skalenoëders in zwei von einander unabhängige Gestalten

verwandelt werden, so muss diese sich auch auf die Grenzformen erstrecken, d. h. die jenen Hälften entsprechenden Prismenflächen müssen ebenfalls von einander unabhängig werden; es kann also die eine Hälfte allein am Krystalle erscheinen, z. B. nur die oben weiss gelassenen; diese bilden alsdann die in Fig. 305 dargestellte Form, welche ditrigonales Prisma genannt wird. Die andere Hälfte ist ebenfalls ein ditrigonales Prisma von derselben Gestalt, welches man erhält, wenn man das erste um 60° dreht.

5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung wird, wie aus Fig. 306 ersichtlich, ebenfalls durch die Hemiëdrie scheinbar nicht geändert, ist

Fig. 306.

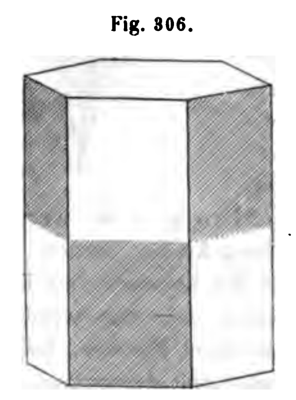
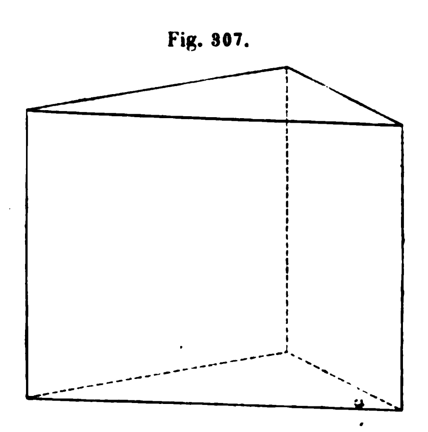


Fig. 307.



aber in einer hemiëdrischen Krystallreihe nicht die Pyramide erster Ordnung mit unendlich langer Hauptaxe, sondern dasjenige Rhomboëder, dessen $m = \infty$. Je grösser m, desto spitzer ist das Rhomboëder; das spitzeste ist das Prisma erster Ordnung, die eine Grenzform aller Rhomboëder. Ist der Krystall, an welchem das Prisma erscheint, zugleich nach der Hauptaxe hemimorph, so bewirkt dies ein Zerfallen des Rhomboëders in eine obere und eine untere Hälfte; jeder dieser Hälften entsprechen in dem vorliegenden Grenzfalle drei abwechselnde Flächen des Prisma, also zerfällt dieses durch die Hemimorphie in zwei von einander unabhängige Gestalten, von welchen in Fig. 307 die aus den Flächen $(10\bar{1}0)$ $(\bar{1}100)$ $(0\bar{1}10)$ bestehende dargestellt ist. Eine solche Form heisst nach ihrem Querschnitt trigonales Prisma.

Fig. 308.

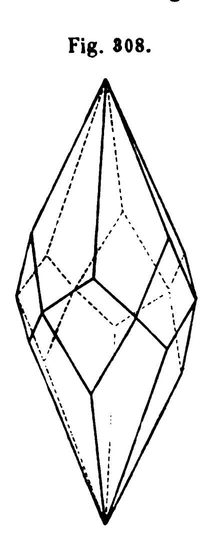
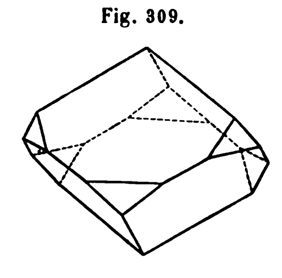


Fig. 309.



In Combination mit einem Skalenoëder erscheint das Prisma erster Ordnung als verticale Abstumpfung der Mittelecken, welche 2 + 1 + 1-kantig sind, s. Fig. 308, in Combination mit einem Rhomboëder ebenso; die abgestumpften Mittelecken sind hier 2 + 1 kantig, und die eine der Combinationskanten zwischen je einer Prismen- und einer Rhomboëderfläche ist horizontal, s. Fig. 309.

6) Das hexagonale Prisma der zweiten Ordnung ist die Pyramide derselben Stellung mit unendlich langer Hauptaxe; da jene für endliche Werthe von m durch die Hemiëdrie nicht in ihrer Flächenzahl alterirt wird, so kann dies auch nicht mit der Grenzform, für den Fall $m = \infty$, stattfinden, wie auch Fig. 310 zeigt. Das Prisma zweiter Ordnung erscheint deshalb an rhomboëdrisch-hemiëdrischen Krystallen mit der vollen Flächenzahl, und zwar gehören seine Flächen ebenso wohl dem oberen, als dem

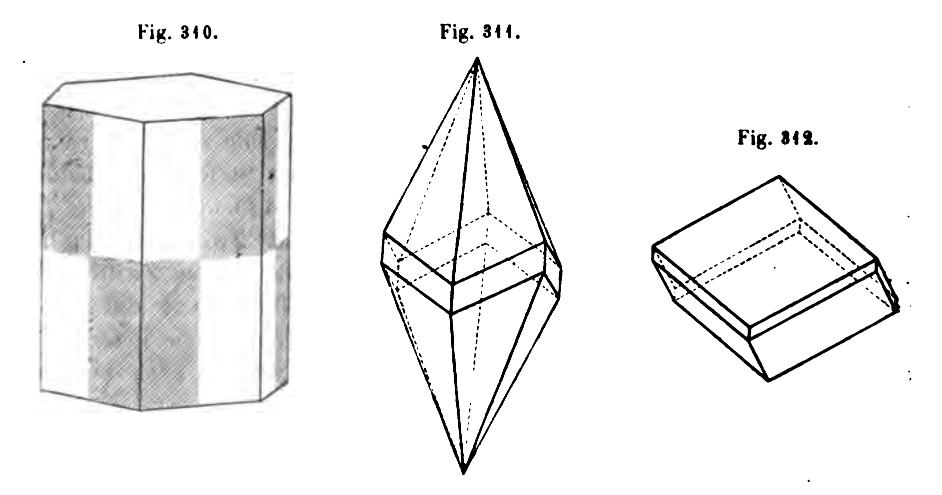


Fig. 310. Fig. 311. Fig. 312.

unteren Pole der Hauptaxe an, wie aus Fig. 310 unmittelbar ersichtlich, es kann daher auch durch die Hemimorphie nicht verändert werden. Das Prisma $\{11\bar{2}0\}$ bildet die gerade Abstumpfung der Mittelkanten sowohl eines jeden Skalenoëders, Fig. 311, als auch eines jeden Rhomboëders, Fig. 312.

7) Die Basis ist in dieser hemiëdrischen Abtheilung aufzufassen als dasjenige Rhomboëder, dessen $m = 0$ ist. Im Falle der Hemimorphie sind obere und untere Fläche in ihrem Auftreten von einander unabhängig. $\{0001\}$ stumpft die Polecken der Rhomboëder wie der Skalenoëder gerade ab. Fig. 313 stellt die Combination derselben mit einem Rhomboëder dar, welche nach jener tafelartig ausgebildet ist.

Fig. 313.

Der Einfluss, welchen die Hemimorphie nach der Hauptaxe auf die rhomboëdrisch-hemiëdrischen Formen ausübt, ist der deutlichste Beweis

dafür, dass man in der That, wie es bisher geschehen, die durch eine Hemiëdrie anscheinend unveränderten Formen nicht als holoëdrische, sondern nur als »scheinbar holoëdrische« anzusehen habe; denn wenn z. B. das hexagonale Prisma 1.O. in dieser Abtheilung wirklich holoëdrisch wäre, wie es zu sein scheint, so würden seine Flächen sämmtlich gleichmässig dem oberen und unteren Pole der Hauptaxe angehören, also durch die Hemimorphie auch gleichmässig beeinflusst werden. Dass dies nicht der Fall ist, sondern die Form stets in zwei von einander unabhängige trigonale Prismen zerfällt, ist nur erklärlich dadurch, dass dieselbe eine von dem holoëdrischen Prisma verschiedene, nämlich ein unendlich spitzes Rhomboëder ist, dessen Flächen abwechselnd dem obern und untern Pole angehören.

Die vorstehend beschriebenen Formen sind nicht mehr, wie die holoëdrischen, symmetrisch nach der Basis und nach den Flächen des Prisma 1. Ordnung, daher nun auch nach diesen Flächen eine Zwillingsbildung eintreten kann. Denken wir uns zwei Rhomboëder zu einander symmetrisch in Bezug auf eine Fläche $\{10\bar{1}0\}$, so sind ihre Hauptaxen parallel. und das eine hat diejenige Richtung der Flächen, welche das negative am andern Krystall haben würde. Zu derselben relativen Stellung der beiden Krystalle gelangen wir aber auch, wenn wir das eine Rhomboëder um die Hauptaxe 180° drehen, d. h. wenn wir die Basis als Zwillingsebene betrachten. Auf beide Arten gelangt man daher zu demselben Zwillingsgesetze, welches gewöhnlich so definirt wird: »Zwillingsebene die Basis.« Dieses Gesetz, welches offenbar sogenannte Ergänzungszwillinge liefert, tritt also in dieser Abtheilung des hexagonalen Systems zu den auch bei den holoëdrischen Krystallen möglichen Gesetzen noch hinzu.

§. 71. **Die abgekürzte Naumann'sche und die Miller'sche Bezeichnung der rhomboëdrischen Formen.** Wegen der grossen Häufigkeit dieser Hemiëdrie und der dadurch bewirkten oftmaligen Wiederholung des Schreibens ihrer Zeichen wurde von Naumann eine abgekürzte Bezeichnungsweise für die Formen derselben vorgeschlagen, welche eine sehr ausgedehnte Anwendung gefunden hat.

Von der zur Grundform gewählten Pyramide P leiten sich zwei Rhomboëder ab, von denen nun wieder eines, falls beide an den Krystallen auftreten, als positives auszuwählen ist. Da die Rhomboëder parallelflächige Gestalten sind, somit keine Fläche des positiven einer des negativen parallel ist, so sind dieselben in unzweifelhafter Weise stets von einander zu unterscheiden, wenn parallel den Flächen des einen derselben Spaltbarkeit vorhanden ist, wie dies in der That bei vielen hierher gehörigen Körpern der Fall ist. Bei einem derartigen Krystall wird man stets das Spaltungsrhomboëder zum positiven primären Rhomboëder $\varkappa\{10\bar{1}1\}$ wählen; dieses bezeichnet man nun, statt mit $+\frac{P}{2}$, mit

$$+R \text{ (oder auch einfach mit } R \text{ ohne } + \text{ Zeichen),}$$

das zugehörige negative $\varkappa\{01\bar{1}1\}$ mit

$$-R.$$

Jedes davon abgeleitete Rhomboëder $\varkappa\{h0\bar{h}l\}$ resp. $\varkappa\{0h\bar{h}l\}$ wird entsprechend, statt mit $\frac{mP}{2}$, mit

$$+ \text{ oder } - mR$$

bezeichnet; da nun m jeden beliebigen rationalen Werth haben kann zwischen 0 und ∞, von denen der erstere der Basis, der letztere dem hexagonalen Prisma erster Ordnung entspricht, als dem spitzesten Rhomboëder, welches existirt, so können diese beiden Grenzformen in derselben Weise bezeichnet werden, nämlich $0R$ und ∞R, und die Ableitungsreihe der verschiedenen Rhomboëder einer Krystallreihe, incl. ihrer Grenzglieder, wird sodann die folgende sein:

$$0 \ldots R \pm mR, \ldots \pm R \ldots \pm mR \ldots \infty R.$$
$$(m < 1) \qquad\qquad (m > 1)$$

Wir haben im vorigen § gesehen, dass zu jedem Skalenoëder $\varkappa\{h\bar{i}\bar{k}l\}$ ein Rhomboëder existirt, welches dieselben Mittelkanten und das Zeichen $\varkappa\{2k-h.0.-2k+h.l\}$ besitzt, daher immer derselben Krystallreihe angehören muss. Die in diesen beiden Zeichen aufgeführten speciellen Werthe der Indices, in denen $h > k > i$, entsprechen offenbar der linken oberen vorderen Skalenoëder- und der oberen vorderen Rhomboëderfläche. Soll, wie es in Fig. 314 dargestellt ist, die erstere durch die Mittelkante des Rhomboëders gehen, so müssen wir uns dieselbe parallel sich selbst verschoben denken, bis sie auf der nach links vorn gehenden Nebenaxe dieselbe Parameterlänge abschneidet, wie die Rhomboëderfläche, also ihr erster Index ebenfalls $= 2k-h$ wird; dies entspricht offenbar einer Multiplication aller ihrer Indices mit $\frac{2k-h}{h}$, wodurch derjenige der Hauptaxe $\frac{2k-h}{h}\,l$ wird. Setzen wir also, wie es die Figur zeigt, die Nebenaxen des Rhomboëders und des Skalenoëders gleich gross, so verhalten sich die Längen ihrer Hauptaxen wie

$$\frac{1}{l} : \frac{h}{2k-h} \cdot \frac{1}{l} = 1 : \frac{h}{2k-h},$$

stehen also immer in einem rationalen Verhältniss zu einander. Die Gestalt eines Skalenoëders ist nun offenbar vollkommen bestimmt durch die Richtung ihrer Mittelkanten und durch das Verhältniss ihrer Hauptaxe zu der des durch ihre Mittelkanten gelegten Rhomboëders, welches wir mit n bezeichnen wollen; denn gehen wir von irgend einem Rhomboëder mR aus und verlängern dessen Hauptaxe auf die $n$fache Grösse, also auf ein rationales Vielfaches, und verbinden die Mittelecken desselben mit den


Fig. 314.

neuen Endpunkten der Hauptaxe durch Gerade, so sind letztere die Polkanten des Skalenoëders. Bezeichnen wir dieses mit

$$+ \text{ oder } - mRn,$$

wo $\pm mR$ das Zeichen des Rhomboëders der Mittelkanten und n die Vervielfachung der Hauptaxe (in Fig. 314 ist $n = 3$) angiebt, so haben wir hierdurch ein Zeichen gewonnen, welches weit leichter als die bisher benützten eine Vorstellung von der Form zu geben geeignet ist und zugleich das Zeichen der wichtigsten im Zonenverbande mit derselben stehenden Formen in sich enthält, endlich auch häufig aus einfacheren Zahlen besteht, als dasjenige der holoëdrischen Form*).

Da man in dem Zeichen des Rhomboëders der Mittelkanten $\varkappa\{2k - h. 0. -2k + h. l\}$ für h und k die verschiedensten Werthe einsetzen kann, ohne das Verhältniss $(2k - h) : l$, also ohne die Gestalt des Rhomboëders zu ändern, so giebt es eine ganze Reihe von Skalenoëdern $\varkappa\{h\bar{i}\bar{k}l\}$, welche sämmtlich das gleiche Rhomboëder der Mittelkanten besitzen, also derselben Zone (der Mittelkantenzone des Rhomboëders) angehören, und deren Hauptaxe stets $\frac{h}{2k-h}$ mal so gross ist, als diejenige des Rhomboëders, nur dass letzterwähnte Zahl jedesmal einen andern Werth erhält. Diese Reihe von mR abgeleiteter Skalenoëder erhalten wir also, wenn wir in das Zeichen mRn für n die verschiedensten rationalen Zahlen > 1 einsetzen.

Die Ableitung dieses Zeichens aus dem Symbol derjenigen dihexagonalen Pyramide $\{h\bar{i}\bar{k}l\}$, deren Hälftform das Skalenoëder darstellt, ist eine sehr einfache: m ist das Verhältniss der Hauptaxe zu den Nebenaxen für das Rhomboëder der Mittelkanten, also das reciproke der Indices, folglich $\frac{2k-h}{l}$; n ist aber die S. 349 hergeleitete Zahl, welche die Verlängerung der Hauptaxe angiebt; das Zeichen des Skalenoëders, bezogen auf die Indices der dihexagonalen Pyramide, ist demnach:

$$\frac{2k-h}{l} R \frac{h}{2k-h}.$$

Ist dagegen umgekehrt das abgekürzte Naumann'sche Zeichen mRn eines Skalenoëders gegeben, und will man aus diesem die Indices der zugehörigen dihexagonalen Pyramide ableiten, so hat man die Gleichungen

$$\frac{2k-h}{l} = m \text{ und } \frac{h}{2k-h} = n$$

nach h, k und l aufzulösen und findet leicht:

$$\frac{h}{k} = \frac{2n}{n+1} \qquad \frac{l}{k} = \frac{2}{m(n+1)}.$$

Diese beiden Verhältnisse bestimmen das Symbol der dihexagonalen Pyramide unzweideutig, da ein Index, z. B. k, einer beliebigen Zahl gleich gesetzt werden kann, um h und l auf den möglichst einfachen Ausdruck

*) Diese abgekürzten Zeichen sollen deshalb bei den Beispielen (§. 73) stets neben den anderen aufgeführt werden.

ganzer Zahlen zu bringen. Setzt man $k = n + 1$, so erhält man als Symbol der dihexagonalen Pyramide

$$\left\{2n \,.\, -(n-1) \,.\, -(n+1) \,.\, \frac{2}{m}\right\}$$

Hieraus kann man leicht für das Rhomboëder der kürzeren und das der längeren Polkanten, deren Symbole S. 343 *f.* angegeben sind, die [abgekürzten Zeichen, bezogen auf das Zeichen mRn ihres Skalenoëders, angeben und findet:

für das Rhomboëder der kürzeren Polkanten $\frac{m}{2}(3n-1)R$,

für das Rhomboëder der längeren Polkanten $-\frac{m}{2}(3n+1)R$,

während dasjenige der Mittelkanten natürlich $= mR$ ist. Für die Abstumpfung der längeren und der kürzeren Polkanten erhält man, entsprechend den S. 344 gegebenen Symbolen, die Zeichen:

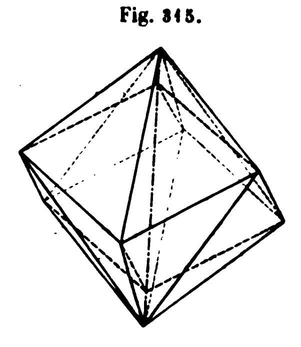
Abstumpfung der längeren Polkanten $\frac{m}{4}(3n+1)R$

- - kürzeren - $-\frac{m}{4}(3n-1)R$.

Bezeichnet man z. B. das in Fig. 299 dargestellte Rhomboëder als primäres positives mit R, das Skalenoëder derselben Figur also mit $R3$, so resultirt als Rhomboëder der kürzeren Polkanten $4R$, als Rhomboëder der längeren Polkanten $-5R$, als Abstumpfung der letzteren $\frac{5}{2}R$, der kürzeren Polkanten $-2R$.

Vervollständigt man die Reihe der von einem Rhomboëder mR abgeleiteten Skalenoëder bis zu ihren beiden Grenzgliedern, so ist offenbar das eine, dessen $n = 1$, das Rhomboëder der Mittelkanten selbst. Die auf dieses zunächst folgenden Glieder der Reihe haben, so lange n wenig grösser als 1, sehr stumpfe längere Polkanten, wie aus Fig. 315 ersichtlich, welche ein Rhomboëder mR mit dem Skalenoëder $mR\frac{5}{4}$ darstellt. Je grösser n, desto spitzer werden, bei unveränderten Verlauf der Mittelkanten, die Skalenoëder, und für $n = \infty$ resultirt das zweite Grenzglied der Reihe, das Prisma zweiter Ordnung, welches zugleich allen Ableitungsreihen der Skalenoëder gemeinschaftlich ist.

Fig. 315.



Die Pyramiden zweiter Ordnung lassen sich [bei dieser Ableitungsmethode nicht, wie bei der ursprünglichen, in] der sie Grenzformen von dihexagonalen Pyramiden bilden, als solchen Ableitungsreihen angehörig betrachten, daher die Bezeichnung derselben und des zugehörigen Prisma $mP2$ und $\infty P2$ bleibt.]

Eine andere Bezeichnung der rhomboëdrischen Formen, welche ebenfalls die Zonenverhältnisse der Skalenoëder zu den Rhomboëdern zu einfachem Ausdruck zu bringen geeignet ist, hat Miller eingeführt, indem er als Axenebenen die drei Flächen des positiven primären Rhomboëders nahm, als Axen demnach dessen drei Polkanten. Da diese gleichwerthig sind, so werden die Elemente des Krystalls bei dieser Auffassung:

$\alpha = \beta = \gamma$ (d. i. der ebene Winkel zwischen zwei Polkanten von R)
$a = b = c = 1$.

Die Grundform $\{111\}$, welche alle drei Axen in gleichem Abstande schneidet, ist offenbar die Basis oR; zu dieser Form gehört aber nur noch die parallele Gegenfläche $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$; die sechs anderen Flächen mit den Indices 1, nämlich $(11\bar{1})$ $(\bar{1}\bar{1}1)$ u. s. w., entsprechen dem Rhomboëder — $2R$, so dass also bei dieser Bezeichnungsweise nicht alle Flächen mit gleichen Indices einer und derselben einfachen Form angehören. Ebenso wenig erhalten die beiden Rhomboëder und Skalenoëder, welche sich aus derselben hexagonalen, resp. dihexagonalen Pyramide ableiten und allerdings auch zwei von einander unabhängige Formen darstellen, gleiche Indices, wie folgende Beispiele zeigen: das positive Rhomboëder R ist $\{010\}$, weil seine Flächen zu Axenebenen genommen sind, — R dagegen wird $\{22\bar{1}\}$; — $\frac{1}{2}R$, welches die Polkanten von R abstumpft, erhält, wie leicht einzusehen, das Zeichen $\{110\}$, dagegen ist $\frac{1}{2}R = \{131\}$; $R3$ wird $\{\bar{1}20\}$, $-R3 = \{25\bar{4}\}$ u. s. f. Da ein Rhomboëder stets zwei gleiche Indices hat, so giebt die Vertauschung der drei Werthe, welche sich auf gleichwerthige Axen beziehen, nur drei Flächen, zu denen durch Multiplication aller Indices mit -1 noch die drei parallelen hinzukommen, während bei dem Zeichen der Skalenoëder durch alle möglichen Vertauschungen sechs Flächen nebst ihren parallelen Gegenflächen resultiren.

Sei in unserer Bezeichnung das Symbol einer beliebigen Fläche $= (pqrl)$, so erhält man das Miller'sche Symbol (uvw) aus folgenden Transformationsformeln (s. z. B. Liebisch, Geometrische Krystallographie S. 439):

$$\begin{aligned} u &= q - p + l \\ v &= p - r + l \\ w &= r - q + l \end{aligned}$$

und da $p + q + r = 0$, umgekehrt aus Miller's Symbol das unsrige nach den Gleichungen

$$\begin{aligned} 3p &= v - u \\ 3q &= u - w \\ 3r &= w - v \\ 3l &= u + v + w. \end{aligned}$$

Diese Bezeichnung hat allerdings vor der von Bravais vorgeschlagenen und bisher verwendeten den Vortheil, dass sie dreizählige Symbole besitzt, welche unmittelbar zur Berechnung der Zonen benutzt werden können; dafür entbehren dieselben jedoch der Beziehung auf die holoëdrischen Formen und der Rücksicht auf die wichtigste Richtung in den hexagonalen Krystallen, der Hauptaxe, so dass bei dieser Auffassung die durch die Uebereinstimmung in physikalischer Beziehung bedingte Analogie des hexagonalen Systems mit dem tetragonalen vollständig verloren geht. Diesem Umstande ist es zuzuschreiben, dass die Bravais'schen Symbole trotz der kleinen Unbequemlichkeiten, welche durch den vierten Index

bei der Zonenrechnung entstehen, in neuerer Zeit eine fast ganz allgemeine Anwendung gefunden haben.

§. 72. **Projection und Berechnung der rhomboëdrisch-hemiëdrischen Formen.** Während im regulären System die Projection und Berechnung der hemiëdrischen Formen sich so einfach aus denen der holoëdrischen ergiebt, dass eine besondere Betrachtung derselben umgangen werden konnte, ist dies nicht thunlich in der rhomboëdrischen Abtheilung des hexagonalen Systems, welcher so zahlreiche Substanzen mit zum Theil so flächenreichen Krystallen angehören, dass hier auch weniger einfache Fälle der Berechnung nicht selten vorkommen.

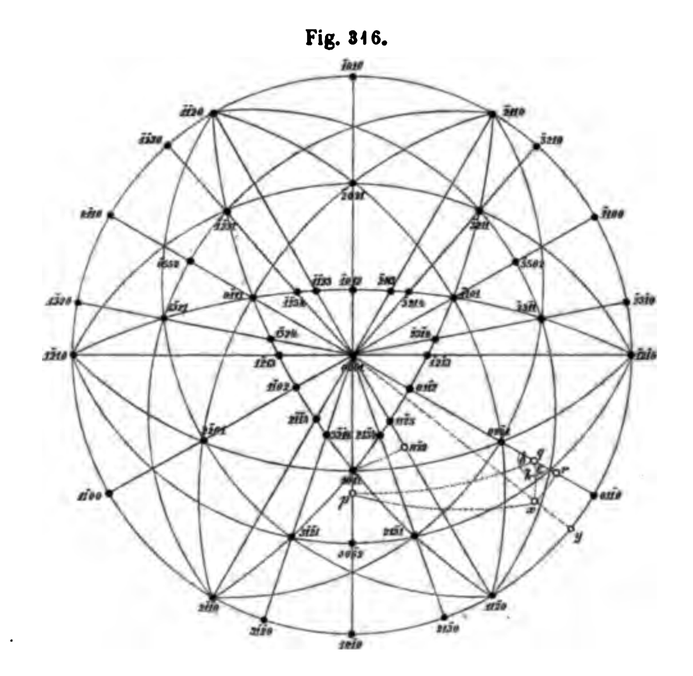
Wie die holoëdrischen, so werden auch die rhomboëdrisch-hemiëdrischen Formen auf die Basis (0001) projicirt, deren Pol also in der Mitte des Grundkreises erscheint (s. Fig. 316, welche die wichtigsten Formen des Kalkspaths zur Darstellung bringt); während aber die sechs Radien, welche den Zwischenaxen parallel gehen, in der Projection der holoëdrischen Gestalten gleichwerthig waren, enthalten hier die drei um 120° von einander abstehenden die Pole der positiven, die drei andern die Pole der negativen Rhomboëder. Jede derartige Form, z. B. $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, ist nun offenbar bestimmt durch ihre Neigung zur Basis, also im vorliegenden Falle durch den Bogen $0001 : 10\bar{1}1 = \gamma$. Aus diesem lässt sich sehr einfach der Polkantenwinkel des Rhomboëders berechnen, denn da $\varkappa\{01\bar{1}2\}$ die Polkanten gerade abstumpft, so ist der Bogen $10\bar{1}1 : 01\bar{1}2$ gleich dem halben Polkantenwinkel, und der sin dieses Bogens ist $= \sin\gamma \,.\, \sin 60^0$, da er in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck 0001, $10\bar{1}1$, $01\bar{1}2$ dem Winkel von 60° gegenüberliegt. Umgekehrt folgt, wenn der Polkantenwinkel gemessen wurde, aus der Hälfte desselben die Neigung des Rhomboëders zur Basis γ nach derselben Gleichung. Der Bogen γ dient direct zur Berechnung des Axenverhältnisses mittelst des rechtwinkeligen Dreiecks 0001, $10\bar{1}1$, $11\bar{2}2$, aus dem sich ergiebt: $\tang (0001 : 11\bar{2}2) = \tang\gamma \,.\, \cos 30^0$; denn nach S. 332 ist die erstere tang gleich dem Axenverhältniss der Pyramide, deren Hälftform das Rhomboëder darstellt. Ist also die Neigung eines Rhomboëders zur Basis $= \gamma$ bekannt, so folgt daraus die Länge seiner Hauptaxe nach der Formel:

$$c \text{ (resp. } mc) = \tang\gamma \,.\, \cos 30^0.$$

Bei der Berechnung der Skalenoëder können verschiedene Fälle vorkommen. Der einfachste ist der, dass ein solches in Combination mit seinem Rhomboëder der Mittelkanten auftritt; ist dieses bestimmt und damit eine Zone für das Skalenoëder gegeben, so genügt zu seiner Berechnung die Messung eines Winkels in dieser Zone. So liegt z. B. das Skalenoëder $\varkappa\{21\bar{3}1\} = R3$ in der Zone $[10\bar{1}1 : 11\bar{2}0] = R : \infty P2$; es sei sein Zeichen noch unbekannt, aber der Bogen $10\bar{1}1 : 21\bar{3}1$ gemessen. Alsdann hat man zunächst in dem rechtwinkeligen Dreieck $10\bar{1}1$, $10\bar{1}0$, $11\bar{2}0$ den Winkel an $10\bar{1}1$ zu berechnen: dieser gehört zugleich einem rechtwinkeligen Dreieck an, welches man erhält, wenn man den Zonenkreis der stumpfen Polkante

des Skalenoëders construirt; da wo dieser den Durchmesser $0001 : 10\bar{1}0$ schneidet, liegt der Pol desjenigen Rhomboëders, welches jene Polkante gerade abstumpft. Von dem betreffenden Dreiecke (bei dem in der Figur gewählten Beispiele hat es die Eckpunkte $10\bar{1}1$, $50\bar{5}2$, $21\bar{3}1$) sind also ausser dem rechten Winkel noch zwei Stücke bekannt; man kann daher die Seite $10\bar{1}1 : 50\bar{5}2$, d. h. das Zeichen des abstumpfenden Rhomboëders, und den Bogen $50\bar{5}2 : 21\bar{3}1$, d. i. den halben stumpfen Polkantenwinkel des Skalenoëders, berechnen. Diese beiden Werthe liefern aber mittelst des Dreiecks 0001, $50\bar{5}2$, $21\bar{3}1$ den Winkel zwischen den Durchmessern $0001 : 21\bar{3}0$ und $0001 : 10\bar{1}0$, d. h. das Zeichen des dihexagonalen Prisma $\{21\bar{3}0\}$. Damit ist das Verhältniss zweier Indices bestimmt, durch das die

Fig. 316.



Polkante abstumpfende Rhomboëder ein weiteres und somit das Zeichen des Skalenoëders.

In derselben Zone $[10\bar{1}1 : 11\bar{2}0]$, aber über $10\bar{1}1$, liegen die Pole derjenigen Skalenoëder, welche statt der Mittelkanten die Polkanten des Rhomboëders zuschärfen; während die ersteren sämmtlich positiv, d. h. von demselben Vorzeichen wie das Rhomboëder sind, können die über $10\bar{1}1$ liegenden ebenfalls positiv sein, wie $\varkappa\{21\bar{3}4\} = \frac{1}{4}R3$, z. Th. sind sie aber negativ, wenn nämlich ihre Pole näher an $\varkappa\{01\bar{1}2\}$ liegen. An der Grenze der beiden Sextanten, welche die Pole der Formen mit entgegengesetztem Vorzeichen enthalten, nämlich auf den den Nebenaxen parallelen Durchmessern, liegen die Pole der Pyramiden 2. Ordnung, und da diese Durchmesser von der Zone jener, theils positiver, theils negativer Skalenoëder

geschnitten werden, so gehört den letzteren auch der Pol einer Pyramide 2. Ordnung an, der Polkantenzone von $\varkappa\{10\bar{1}1\}$ z. B. die Form $\{11\bar{2}3\}$, deren Indices sich aus den beiden angeführten Zonen für jeden beliebigen Fall leicht ergeben. Die Berechnung eines oberen Skalenoëders der Polkantenzone eines Rhomboëders aus dem gemessenen Winkel desselben zu letzterem ist so übereinstimmend mit der Berechnung eines unteren, dass ihre Ausführung überflüssig erscheint.

Tritt ein Skalenoëder allein auf, so hat man dasselbe aus zweien seiner Kantenwinkel zu berechnen. Seien z. B. die beiden Polkanten gemessen worden, so sind deren Hälften (die Winkel zwischen einer Skalenoëderfläche und den beiden Rhomboëderflächen, welche die längere resp. kürzere Polkante gerade abstumpfen, z. B. die Bögen $a = 21\bar{3}1 : 50\bar{5}2$ resp. $a' = 21\bar{3}1 : 0\bar{2}21$. Aus den beiden Dreiecken, welche diese Bögen mit 0001 bilden, kann man in derselben Weise, wie S. 335, die beiden Winkel an letzterem Pol, deren Summe $= 60^0$, berechnen nach der Gleichung:

$$\text{cotang}\ (10\bar{1}0 : 21\bar{3}0) = \frac{\sin a'}{\sin a \,.\, \sin 60^0} + \frac{1}{2 \sin 60^0},$$

ebenso die Abstände der beiden Pole $50\bar{5}2$ und $0\bar{2}21$ von 0001, und hat damit alle Daten für die Indices des Skalenoëders. Ist der Winkel einer Polkante und derjenige der Mittelkante gemessen, so hat man zu erwägen, dass die Hälfte des letzteren gleich dem Winkel des Skalenoëders zu dem Prisma 2. Ordnung ist, da dieses die Mittelkanten aller Skalenoëder abstumpft. Will man also z. B. das Zeichen des Skalenoëders $\varkappa\{21\bar{3}1\}$ aus dem Bogen $21\bar{3}1 : 11\bar{2}0 = \beta$ und dem halben Polkantenwinkel $21\bar{3}1 : 50\bar{5}2 = \alpha$ berechnen, so sind in dem sphärischen Dreiecke $21\bar{3}1$, $\bar{1}2\bar{1}0$, $11\bar{2}0$ die drei Seiten $= 90^0 - \alpha$, 60^0 und β, gegeben; der hieraus folgende Winkel an $\bar{1}2\bar{1}0$ ist nun offenbar gleich dem Bogen $50\bar{5}2 : 10\bar{1}0$, aus welchem man mit Hinzunahme von α das Zeichen des Skalenoëders berechnen kann, wie vorher.

Dass man bei der umgekehrten Berechnung eines Skalenoëders aus seinen Parameterverhältnissen von den beiden abstumpfenden Rhomboëdern (s. S. 344) ausgeht, und wie man aus deren Neigungen zu 0001 die halben Polkantenwinkel des Skalenoëders findet, versteht sich nach Obigem von selbst. Der halbe Winkel der Mittelkante, d. i. bei dem in Fig. 316 gewählten Beispiele der Bogen $21\bar{3}1 : 11\bar{2}0$, wird alsdann am einfachsten aus dem rechtwinkeligen Dreieck $21\bar{3}1$, $11\bar{2}0$, $21\bar{3}0$ berechnet, in welchem $11\bar{2}0 : 21\bar{3}0$ und der Winkel an $11\bar{2}0$ durch die Indices des Skalenoëders bestimmt sind, da letzterer Winkel zugleich dem rechtwinkeligen Dreieck $11\bar{2}0$, $10\bar{1}0$, $10\bar{1}1$ angehört, in welchem der zuletzt angeführte Pol ebenfalls aus dem Zeichen des Skalenoëders folgt.

Die Lage einer beliebigen Krystallfläche ist bekanntlich bestimmt, wenn ihre Neigung gegen zwei bekannte Flächen gemessen wurde, und da es bei flächenreichen Krystallen, wenn auch seltener, vorkommt, dass für eine Skalenoëderfläche keine Zonen beobachtet sind, so soll schliesslich noch die

Berechnung einer solchen betrachtet werden. Sei z. B. der Winkel der unbekannten Fläche x (Fig. 316) zu p und q gemessen worden, so bilden die beiden Bögen xp und xq mit pq ein sphärisches Dreieck (in der Figur punktirt bezeichnet), in welchem alle drei Seiten bekannt sind, da pq aus dem Zeichen der Rhomboëder, d. h. aus den Bögen 0001 : p und 0001 : q und dem dazwischen liegenden Winkel von 60° berechnet werden kann; aus dem hierbei benutzten Dreieck 0001, p, q leite man zugleich den Winkel δ her. In dem Dreieck pqx wird nunmehr der Winkel χ berechnet und daraus $\varepsilon = 180^0 - \delta - \chi$. Hierauf legt man durch x einen Zonenkreis senkrecht zum Durchmesser 0001 : 01$\bar{1}$0 und erhält dadurch ein rechtwinkeliges Dreieck xqr, in welchem qx und der Winkel ε bekannt sind; der hieraus berechnete Werth qr bestimmt die Lage des Rhomboëders r, welches die Polkante des Skalenoëders x abstumpft, während man aus dem ebenfalls zu berechnenden Bogen xr mittelst des Dreiecks x, r, 0001 leicht den Ort des Poles y erhält. Durch r und y ist aber das Zeichen des Skalenoëders x bestimmt und die Aufgabe gelöst. Noch einfacher gestaltet sich die Lösung, wenn die beiden Rhomboëder von dem gleichen Vorzeichen sind, da alsdann der Winkel zwischen denselben direct aus dem Zeichen folgt, während der übrige Theil der Rechnung dem obigen ganz analog ist.

§. 73. Beispiele rhomboëdrisch-hemiëdrischer Substanzen.

Tellur = *Te*. $a : c = 1 : 1{,}3298$ G. Rose. Rhomboëder von 93° 3′ Polkante; nat. Krystalle: $\{10\bar{1}0\}\infty R$ (darnach spaltbar); $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $\varkappa\{01\bar{1}1\}-R$.

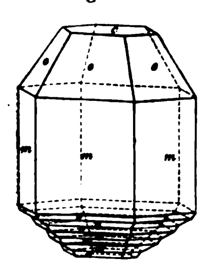
Arsen = *As*. $a : c = 1 : 1{,}4025$ G. Rose. Rhomboëder von 94° 54′ Polkante; spaltbar nach $\{0001\}\,oR$.

Antimon = *Sb*. $a : c = 1 : 1{,}3236$ Laspeyres. Rhomboëder von 92° 53′ Polkante; spaltbar nach $\{0001\}\,oR$ und $\varkappa\{01\bar{1}2\}-\frac{1}{2}R$.

Wismuth = *Bi*. $a : c = 1 : 1{,}3035$ G. Rose. Rhomboëder von 92° 20′ Polkante; spaltbar nach $\{0001\}\,oR$ und $\varkappa\{02\bar{2}1\}-2R$.

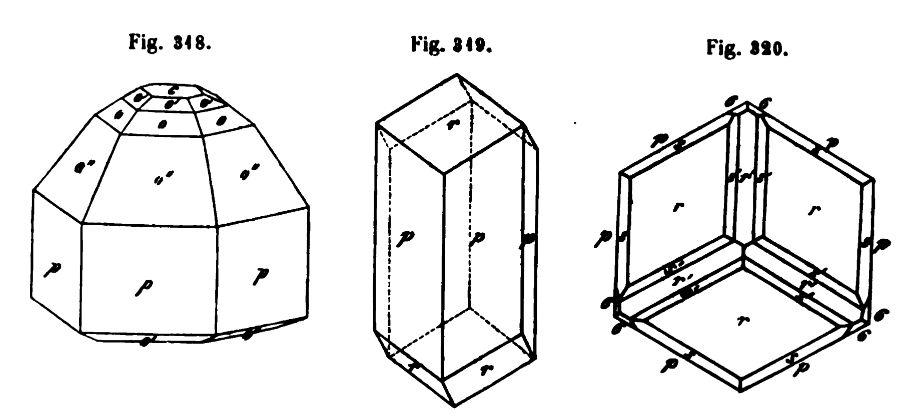
Schwefelzink (nat. Wurtzit) = ZnS. $a : c = 1 : 0{,}9353$ Friedel. An künstlichen, wie natürlichen Krystallen wurden bisher nur die Flächen der Basis, des 1. und 2. Prisma und einer Pyramide in holoëdrischer Ausbildung beobachtet. Wegen der Isomorphie mit dem rhomboëdrisch spaltbaren NiS ist jedoch rhomboëdrische Hemiëdrie anzunehmen (vergl. S. 336), daher man sich die primäre Pyramide um 30° gedreht und als Pyramide 2. Ordnung zu denken hat; unter dieser Annahme ist das obige Axenverhältniss berechnet. Förstner (Zeitschr. f. Kryst. 5, 363) fand beiderseits ausgebildete Krystalle eines Hüttenproductes von ZnS deutlich hemimorph (s. Fig. 317).

Fig. 317.



Schwefelcadmium (nat. Greenockit) = CdS. $a : c = 1 : 0{,}9387$ von Kokscharow. Künstliche mikroskopische Krystalle zeigen Rhomboëder und Skalenoëder, die natürlichen dagegen die

ausgezeichnet hemimorphe Combination, (Fig. 318) : $p = \{11\bar{2}0\} \infty P2$, oben: $c = \{0001\}\ oR$, $o' = \{11\bar{2}4\}\ \frac{1}{2}P2$, $o = \{11\bar{2}2\}\ P2$, $o'' = \{11\bar{2}1\}\ 2P2$, unten: $c = \{000\bar{1}\}\ oR$ gross, $o' = \{11\bar{2}\bar{4}\}$. Wegen der holoëdrischen Ausbildung sind die beobachteten Pyramiden als solche 2. Ordnung genommen worden, wie bei dem damit isomorphen ZnS, daher man sich die Figur um 30° gedreht zu denken hat.



Antimonsilberblende (dunkles Rothgiltigerz) = $Ag^6 Sb^2 S^6$. $a : c = 1 : 0{,}7880$ Miller. Fig. 319 stellt die einfache Combination $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}R$ mit dem Polkantenwinkel 71° 18′, $p = \{11\bar{2}0\}\ \infty P2$ dar, Fig. 320 eine flächenreichere (in der Richtung der Hauptaxe von oben gesehen), wie solche sehr häufig von diesem Mineral vorkommen; es ist $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}\ R$, $p = \{11\bar{2}0\}\ \infty P2$, ein Skalenoëder s zwischen r und p, welches folglich dieselben Mittelkanten wie r hat; durch Messung des Winkels $p : s = 24°\ 55\frac{1}{2}'$, aus welchem der Mittelkantenwinkel folgt, ergiebt sich das Zeichen $\varkappa\{3\bar{1}\bar{2}1\}$ $R3$; ferner $r' = \varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$; zwischen diesem und r ein Skalenoëder s', dessen kürzere Polkanten zugleich diejenigen von r sind, so dass die Messung eines Winkels $s' : r = 21°\ 47'$ genügt, das Zeichen $\varkappa\{3\bar{1}\bar{2}4\}\ \frac{1}{4}R3$ desselben zu berechnen; endlich erscheint noch ein negatives Skalenoëder σ mit den Polkanten 14° 3′ resp. 103° 43′ und dem Zeichen $\varkappa\{7\bar{1}\bar{6}1\} - 5R\frac{7}{5}$. Wenn $\{10\bar{1}0\}$ am Rothgiltigerz auftritt, erscheint es gewöhnlich als trigonales Prisma, wodurch bewiesen wird, dass diese Substanz hemimorph ist; in der That finden sich, wenn auch selten, Krystalle mit Ausbildung beider Enden und verschiedenen Formen an denselben. Doppelbrechung negativ. Brechungsexponenten: $\omega = 3{,}084$, $\varepsilon = 2{,}881$ Roth (Lithium). Spaltbarkeit nach $\varkappa\{10\bar{1}1\}\ R$.

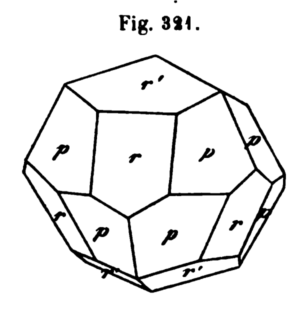
Arsensilberblende (lichtes Rothgiltigerz = $Ag^6 As^2 S^6$. $a : c = 1.0{,}7851$ Miller. Genau dieselben Combinationen wie das vorige: der Winkel der Polkante von $\varkappa\{10\bar{1}1\}\ R$ ist 72° 10′. Doppelbrechung —.

Wasser = H^2O. $a : c = 1 : 1{,}400$? Gewöhnlich hexagonale Tafeln, doch kommen auch rhomboëdrische Combinationen (z. B. in manchen Hagelfällen) vor. Doppelbrechung +, schwach. See-Eis ist gewöhnlich aus paral-

lelen Krystallpartikeln zusammengesetzt, deren Hauptaxe senkrecht zur gefrorenen Wasserfläche steht, daher eine natürliche Eisplatte direct das einaxige Interferenzbild im convergenten polarisirten Lichte zeigt.

Magnesiumhydroxyd (nat. Brucit) = MgH^2O^2. $a : c = 1 : 0{,}5208$ Hessenberg. Tafelförmige Combinationen von $\{0001\}oR$ und $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Spaltbarkeit nach $\{0001\}$. Doppelbrechung +.

Fig. 321.



Thonerde (nat. Korund) = Al^2O^3. $a : c = 1 : 1{,}363$ v. Kokscharow. Vorherrschend $\{11\bar{2}0\}\infty P2$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Doppelbrechung —. $\omega = 1{,}768$, $\varepsilon = 1{,}760$ Roth.

Eisenoxyd (nat. Eisenglanz) = Fe^2O^3. $a : c = 1 : 1{,}359$ v. Kokscharow. Eine besonders an natürlichen Krystallen häufige Combination zeigt Fig. 321: $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $r' = \varkappa\{10\bar{1}4\}\frac{1}{4}R$, $p = \{22\bar{4}3\}\frac{4}{3}P2$. Das Zeichen dieser letztern Form folgt aus dem Parallelismus der Kanten $p : r$ und $r : p$, wie bereits S. 327 (vergl. Fig. 282) nachgewiesen wurde.

Chromoxyd = Cr^2O^3. $a : c = 1 : 1{,}368$ G. Rose. Man erhält tafelförmige Combinationen $\{0001\}oR$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ oder dem vorigen sehr ähnliche mit $\{22\bar{4}3\}\frac{4}{3}P2$ und $\{11\bar{2}0\}\infty P2$.

Magnesiumsiliciumfluorid = $MgSiF^6 + 6H^2O$. $a : c = 1 : 0{,}5174$ Topsøe. Combin. $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $\{11\bar{2}0\}\infty P2$, ersteres vorherrschend (ähnlich Fig. 312) oder beide Formen gleich gross, so dass die Krystalle einem Dodekaëder ähneln. Durchwachsungszwillinge nach $\{0001\}$. — Mit diesem Salze ist eine grosse Reihe anderer isomorph, in denen Mg durch andere zweiwerthige Metalle, Si durch Ti, Zr, Sn etc., endlich F durch Cl, Br, J ersetzt ist.

Kaliumnitrat = KNO^3. Beim Verdampfen eines Tropfens der warmen Lösung bilden sich zuerst mikroskopische Rhomboëder von ca. 74° Polkantenwinkel.

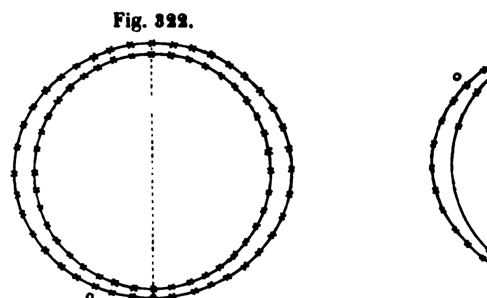
Natriumnitrat = $NaNO^3$. $a : c = 1 : 0{,}8276$ Brooke. Natürlich und aus wässerigen Lösungen künstlich $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$; Polkante 73° 30'. Krystallform und physikalische Eigenschaften sehr ähnlich denen des Kalkspaths. Vollkommen spaltbar nach $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Doppelbrechung negativ. Brechungsexponenten für die Linien:

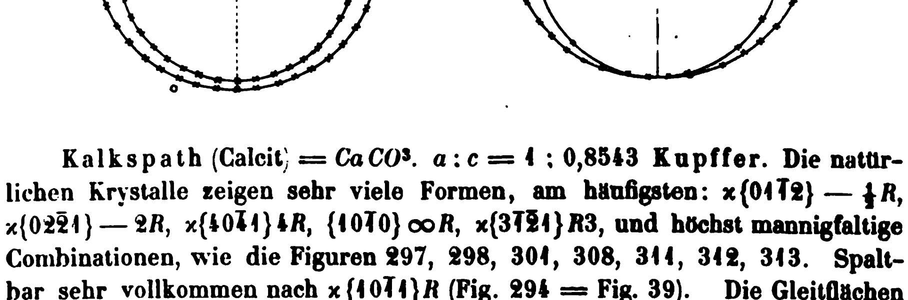
	ω	ε
B =	1,579	1,335
D =	1,587	1,336
E =	1,594	1,337
H =	1,626	1,344

(Schrauf, Wien. Ak. Sitz. Ber. 41, 786.) Diese ausserordentlich starke Doppelbrechung veranlasste W. Kohlrausch (Ann. d. Phys. n. F. 6, 86),

mittelst des Totalreflectometers in einer grösseren Zahl von Richtungen nnerhalb einer Spaltungsfläche und einer der Axe parallelen Ebene die Lichtgeschwindigkeiten zu messen. Fig. 322 und 323 zeigen die den genannten beiden Ebenen parallelen Durchschnitte der Wellenfläche in den richtigen Verhältnissen (s. S. 60 Anmerk.); die markirten Punkte entsprechen den Radien, in denen die Messung ausgeführt wurde (bei dem Kreis in Fig. 323 genügten einige wenige, um die Gleichheit des Durchmessers nach allen Richtungen zu constatiren.

Fig. 322. Fig. 323.

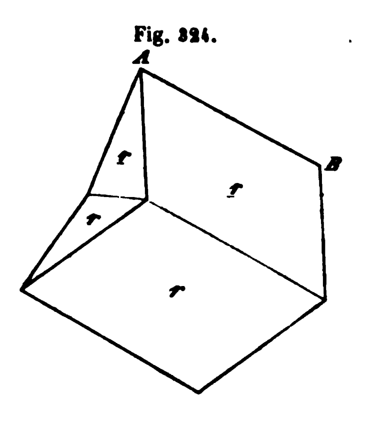




Kalkspath (Calcit) = $CaCO^3$. $a:c = 1:0{,}8543$ Kupffer. Die natürlichen Krystalle zeigen sehr viele Formen, am häufigsten: $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$, $\varkappa\{02\bar{2}1\} - 2R$, $\varkappa\{40\bar{4}1\}4R$, $\{10\bar{1}0\}\infty R$, $\varkappa\{3\bar{1}\bar{2}1\}R3$, und höchst mannigfaltige Combinationen, wie die Figuren 297, 298, 301, 308, 311, 312, 313. Spaltbar sehr vollkommen nach $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ (Fig. 294 = Fig. 39). Die Gleitflächen sind nach Reusch (Poggendorff's Ann. d. Phys. 132, 44) die Flächen von $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$.

Der Kalkspath bietet die ausgezeichnetsten Beispiele für die Zwillingsbildung im hexagonalen System dar und zwar nach mehreren Gesetzen.

Fig. 324.



Zwillingsebene eine Rhomboëderfläche: Dieses Gesetz entspricht vollkommen demjenigen in der Holoëdrie, nach welchem die Zwillingsebene eine Pyramidenfläche ist. Am häufigsten ist dasjenige Gesetz, nach welchem die Zwillingsebene eine Fläche von $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$, d. i. von demjenigen Rhomboëder, welches die Polkanten des Spaltungsrhomboëders gerade abstumpft. Fig. 324 stellt zwei Spaltungsrhomboëder, jedes nur zur Hälfte ausgebildet und mit der Zwillingsebene, der Abstumpfung der Polkante *AB*, an einander gewachsen, dar. In dieser Weise sind jedoch die Kalkspathzwillinge selten ausgebildet, sondern gewöhnlich so, dass an den Krystall *II*

Fig. 325 (die Zwillingsebene von *I* und *II* ist hier nicht die Abstumpfung der seitlichen Polkante, wie in der vorigen Figur, sondern der nach vorn herablaufenden) ein dritter *III*, nach derselben Ebene symmetrisch, angewachsen ist. Da nun *III* und *I* parallel sind, so kann man sie als einen einzigen Krystall betrachten, welcher eine in Zwillingsstellung befindliche parallelwandige Lamelle, *II*, umschliesst; die Flächen 2 und 3 (und ihre parallelen), deren Kante die Zwillingsebene abstumpft, fallen für beide Krystalle zusammen, dagegen bildet die Kante zwischen III_1 und II_1 einen einspringenden (die parallelen hinteren Flächen einen ausspringenden) Winkel von 38° 14′, diejenige von II_1 und I_1 einen ebenso grossen ausspringenden. Die Zwillingslamelle erscheint also nur auf der unteren vorderen und der dieser parallelen Fläche des Spaltungsrhomboëders als ein meist sehr schmaler geradliniger Streifen, welcher genau der längeren Diagonale der Rhombusfläche parallel verläuft. Gewöhnlich sind nun in ein solches Rhomboëder eine grössere Zahl derartiger Zwillingslamellen

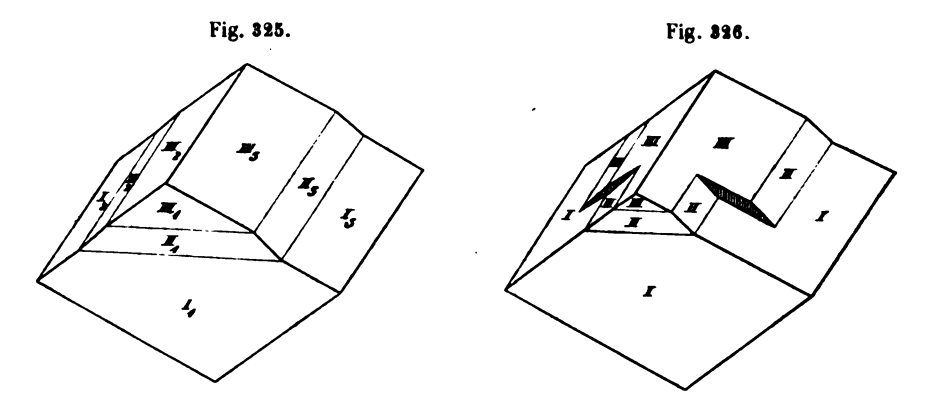


Fig. 325. Fig. 326.

eingeschaltet, so dass dasselbe auf zwei gegenüber liegenden Flächen eine Streifung, parallel der längeren Diagonale, zeigt. Eine solche Zwillingslamelle setzt nun zuweilen in eine andere Ebene über, und es ist aus Fig. 326 leicht ersichtlich, dass alsdann ein Hohlraum entstehen muss, welcher in Form einer Röhre von rhombischem Querschnitt den Krystall von einer Seite bis zur andern durchzieht; hört eine solche Zwillingslamelle inmitten des Krystalls ganz auf, so muss statt der Röhre eine parallelwandige Kluft, parallel einer Spaltungsfläche, bis an die beiden andern heranreichend, erscheinen, und auch dies beobachtet man häufig. Nun können aber die Zwillingslamellen dieser Art nicht nur nach einer Fläche von $-\frac{1}{2}R$, sondern auch nach den beiden anderen auftreten; wo deren zwei, verschiedenen Ebenen angehörig, sich durchkreuzen, ist ebenfalls keine vollständige Ausfüllung des Raumes durch Krystallsubstanz möglich, und es entsteht somit ein röhrenförmiger Hohlraum auf der Durchkreuzungslinie der beiden Lamellen. Diese hohlen Kanäle im Innern der

Kalkspathkrystalle, welche durch die Doppelbrechung als zwei von dem Punkte aus, wo sie die Oberfläche berühren, divergirende Röhren erscheinen, sind schon vor langer Zeit beobachtet worden, aber erst durch eine Untersuchung von G. Rose (»über die im Kalkspath vorkommenden hohlen Kanäle«, Abhandlungen der Berl. Akad. d. Wiss. 1868) als sämmtlich von Zwillingslamellen herrührend erklärt worden. Schon vorher wurde von Reusch (Poggendorff's Ann. 132. 441) die interessante Entdeckung gemacht, dass man Zwillingslamellen nach $-\frac{1}{2}R$ künstlich herstellen könnte, wodurch dann auch die Möglichkeit zur Herstellung jener Kanäle gegeben ist. Schleift man nämlich an ein Spaltungsrhomboëder von Kalkspath, dessen Durchschnitt *abcd* Fig. 327 *a* darstellt (wobei *ab* und *cd* zwei Polkanten, *bc* und *ad* die Diagonalen zweier Flächen), zwei horizontale Flächen an, wie sie die punktirten Linien andeuten, und lässt mittelst einer Pressung in der Richtung der Pfeile einen Druck auf das Kalkspathstück wirken, so geht ein Abwärtsgleiten der rechten, eine Aufwärtsbewegung der linken Hälfte vor sich, und

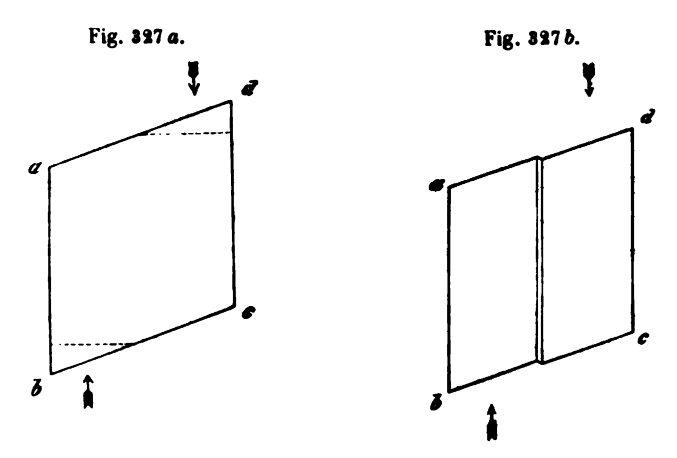


Fig. 327 *a*. Fig. 327 *b*.

zwar in der Weise, dass innerhalb eines Raumes, der von zwei Ebenen, parallel der Abstumpfung der Kanten *ab* und *cd*, begrenzt ist, eine Umlagerung der Theilchen bis zur Zwillingsstellung stattfindet, d. h. es entsteht eine Zwillingslamelle nach $-\frac{1}{2}R$, s. Fig. 327 *b*. Da eine solche im Innern ohne Zertrümmerungen, vielmehr vollkommen homogen und oben und unten von einer (neu entstandenen) spiegelnden, in der Zwillingsstellung befindlichen Fläche begrenzt ist, so unterscheidet sie sich in Nichts von einer natürlichen, und es ist daher sehr wahrscheinlich, dass auch die natürlichen Zwillingslamellen dieses Gesetzes durch Druck ihre Entstehung gefunden haben.

Vollständig symmetrische Zwillinge, der Fig. 324 entsprechend, erhält man künstlich nach einem Verfahren, welches Baumhauer lehrte (Zeitschr. f. Kryst. 3, 589). Legt man ein kleines prismatisches Spaltungsstück mit einer stumpfen Kante auf, setzt auf die nach oben gekehrte senkrecht dazu

die Schneide eines Messers auf und drückt diese allmählich in den Krystall ein, so verschiebt sich der Theil des Krystalls, welcher zwischen der nach oben gekehrten Polecke und dem Messer liegt, bis zur Zwillingsstellung nach der horizontalen Fläche von $-\frac{1}{2}R$. Drückt man das Messer bis zur Mitte des Krystalls ein, so entsteht ein Zwilling, wie er in Fig. 328 dargestellt ist; die Fläche *cef* des ursprünglichen Rhomboëders, dessen Polecke *f* war, hat die Lage *ceg* angenommen, an den beiden seitlichen Rhomben des umgelagerten Theiles sind die Diagonalen vertauscht; ein vorher auf einer solchen eingerissener Kreis ist in eine Ellipse verwandelt, eine vorher darauf dargestellte Aetzfigur nach der nunmehrigen längeren Diagonale verzerrt; stellt man aber nun auf der Fläche neue Aetzfiguren dar, so haben diese eine neue Stellung, entsprechend dem Umstande, dass jetzt die Hauptaxe nach links geneigt ist.

Fig. 328.

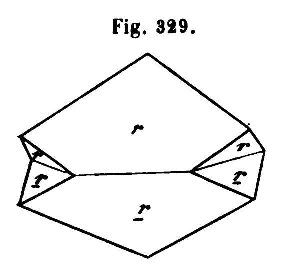
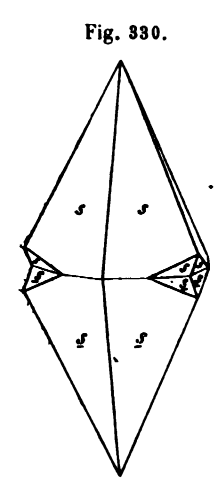


Fig. 329.

Zwillingsebene die Basis: Es wurde bereits S. 348 bemerkt, dass bei einem rhomboëdrisch-hemiëdrischen Krystall dieses Gesetz identisch sei mit demjenigen: »Zwillingsebene eine Fläche des Prismas erster Ordnung«. Dies geht sehr deutlich aus den in Fig. 329 und 330 abgebildeten Kalkspathzwillingen hervor. Fig. 329 stellt zwei nach diesem Gesetz mit der Basis verwachsene Spaltungsrhomboëder dar, welche ebenso symmetrisch sind in Bezug auf eine Fläche von $\{10\bar{1}0\}$, wenn man sich das eine parallel verschoben denkt, bis es neben dem andern befindlich ist. Vergrössert man die drei oberen und die drei unteren Flächen dieses Zwillings durch Abspalten, so erhält man eine trigonale Pyramide ohne einspringende Winkel, welche dadurch als Zwilling kenntlich ist, dass die Spaltbarkeit der oberen Hälfte nicht in die untere sich fortsetzt, und umgekehrt. Fig. 330 ist ein Zwilling desselben Gesetzes, gebildet von zwei mit der Basis verwachsenen Skalenoëdern $\varkappa\{3\bar{1}\bar{2}1\}R3$.

Fig. 330.



Doppelbrechung —, sehr stark. Brechungsexponenten nach Rudberg:

	ω	ε
Linie *B*	1,6531	1,4839
- *C*	1,6545	1,4845
- *D*	1,6585	1,4863
- *E*	1,6636	1,4887
- *F*	1,6680	1,4907
- *G*	1,6762	1,4945
- *H*	1,6833	1,4978.

Die neuesten Messungen von **Sarasin** ergaben:

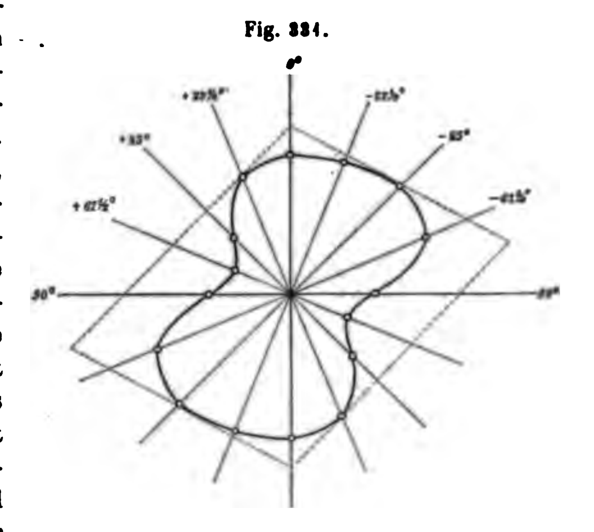
	ω	ε
Linie *A*	1,6499	1,4826
- *B*	1,6528	1,4839
- *D*	1,6583	1,4864
- *F*	1,6678	1,4907
- *H*	1,6832	1,4977

und für die äusserste Cadmiumlinie im Ultraviolett (Wellenlänge = 0,000214 mm):

1,8459 1,5600.

Ueber die verschiedenen physikalischen Eigenschaften des Kalkspaths, namentlich seine thermische Ausdehnung, ist bereits in der I. Abtheilung ausführlich gehandelt worden. Ueber die Elasticität desselben nach verschiedenen Richtungen liegen genaue Messungen von **Baumgarten** (Poggendorff's Annalen d. Phys. 152, 369) vor. Derselbe bestimmte die Biegungen von Stäbchen, deren Längsrichtungen parallel dem Hauptschnitt des Kalkspathrhomboëders und unter einander $22^1/_2{}^0$ geneigt waren. Die Radien der Curve, Fig. 331, sind den elastischen Biegungen der entsprechenden Stäbchen proportional. Die Curve zeigt, wie sich im Hauptschnitt, d. i. in einer Fläche von $\{11\bar{2}0\}$, die Elasticität mit der Richtung ändert; das Minimum der Biegung liegt parallel der Rhomboëderkante, das Maximum parallel der kurzen Diagonale der Rhomboëderfläche, und die Curve ist nicht symmetrisch nach der Basis und der zum Hauptschnitt senkrechten Prismenfläche 1. Ordnung, entsprechend der fehlenden geometrischen Symmetrie nach diesen Ebenen.

Fig. 331.



Magnesit = $Mg\,CO^3$. $a : c = 1 : 0,8095$ **Rumpf**. Nur $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, nach welchem auch die Krystalle vollkommen spalten. Doppelbrechung —, stark.

Eisenspath = $Fe\,CO^3$. $a : c = 1 : 0,8171$ **Breithaupt**. Aehnliche Combinationen, wie Kalkspath, häufig nur $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$; darnach vollkommen spaltbar. Doppelbrechung —, stark.

Manganspath = $MnCO^3$. $a : c = 1 : 0,8183$ **Sansoni**. $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Spaltbar nach derselben Form.

Zinkspath = $ZnCO^3$. $a : c = 1 : 0,8062$ **Breithaupt**. $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Spaltbarkeit wie vor.

Turmalin = $(\overset{\prime}{R}{}^2, \overset{\prime\prime}{R})Al^2BHSi^2O^{10}$ $(\overset{\prime}{R} = Li, Na, K,\ \overset{\prime\prime}{R} = Mg, Fe)$. $a . c$

$= 1 : 0{,}4474$ Kupffer. Unter den Mineralien das wichtigste Beispiel der Hemimorphie und der polaren Pyroëlektricität nach der Hauptaxe. Fig. 332 stellt eine Combination der häufigeren Formen dar: $p = \{10\bar{1}0\}\,\infty R$ als trigonales Prisma, $m = \{11\bar{2}0\}\,\infty P2$ vollflächig, wie es nach S. 347 der Fall sein muss, $p' = \{5\bar{1}\bar{4}0\}\,\infty P\frac{5}{4}$ dagegen als ditrigonales Prisma; der obere (antiloge) Pol zeigt $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $2r = \varkappa\{02\bar{2}1\}-2R$, der untere (analoge) $r = \varkappa\{01\bar{1}\bar{1}\}R$ und die Abstumpfung der Polkanten desselben $r' = \varkappa\{10\bar{1}\bar{2}\}-\frac{1}{2}R$. Der analoge Pol ist nach G. Rose stets derjenige, an welchem die Flächen von r auf die Flächen, nicht auf die Kanten des herrschenden trigonalen Prisma aufgesetzt erscheinen. Nach Kundt's Untersuchungen kommen aber auch Zwillinge nach $\{0001\}$ mit unregelmässiger Durchwachsung vor, äusserlich einfachen Krystallen gleichend, aber aus Partien mit entgegengesetzter Lage der Pole bestehend, daher man auf einem basischen Querschnitt an verschiedenen Stellen entgegengesetzte Elektricität erhält. — Die Brechungsexponenten des farblosen Turmalins sind für die D-Linie: $\omega = 1{,}6366$ $\varepsilon = 1{,}6193$.

Fig. 332.

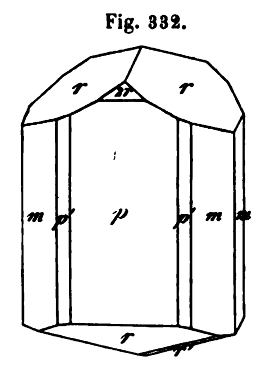
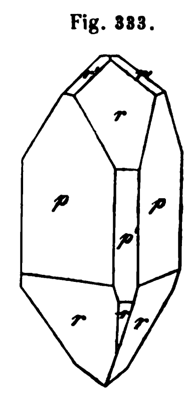


Fig. 333.



Ueber die starke Absorption des ordinären Strahls in den dunkel gefärbten Turmalinen s. S. 63.

Chlorit $= H^8\,(Mg, Fe)^5 Al^2\,Si^3 O^{18}$. $a : c = 1 : 3{,}495$ Des Cloizeaux. Combination: $\{0001\}\,oR$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Spaltbarkeit oR sehr vollkommen. Doppelbrechung sehr schwach, theils — ($\omega = 1{,}577$, $\varepsilon = 1{,}576$ Roth), theils +. Sehr starker Pleochroïsmus; Strahlen ⊥ zur Axe schwingend smaragdgrün, ‖ zur Axe vibrirende hyazinthroth bis braun.

Aldehydammoniak $= C^2H^7NO$. $a : c = 1 : 1{,}3949$ Rammelsberg. Combination: $\varkappa\{10\bar{1}1\}+R$, $\varkappa\{01\bar{1}2\}-\frac{1}{2}R$, $\{0001\}\,oR$. Doppelbrechung —, nicht stark.

Hydrochinon $= C^6H^6O^2$. $a : c = 1 : 0{,}6591$ Groth. Combination: $\varkappa\{10\bar{1}1\}+R$, $\{11\bar{2}0\}\,\infty P2$. Doppelbrechung +, schwach.

Thymol $= C^{10}H^{14}O$. $a : c = 1 : 1{,}5685$ Groth. $\varkappa\{10\bar{1}1\}+R$, darnach vollkommen spaltbar, $\varkappa\{01\bar{1}2\}-\frac{1}{2}R$, $\{0001\}\,oR$. Doppelbrechung +.

Tolylphenylketon $= C^{14}H^{13}O$. $a : c = 1 : 1{,}2254$ Bodewig. Hemimorph und polar pyroëlektrisch. Combination Fig. 333: $p = \{10\bar{1}0\}\,\infty R$

als trigonales Prisma, die drei alternirenden Flächen p' stets untergeordnet; am oberen (analogen) Pol $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $r' = \varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$; am unteren (antilogen) Pol $r = \{01\bar{1}\bar{1}\}R$, $-r = \varkappa\{10\bar{1}\bar{1}\} - R$. Brechungsexponenten für die D-Linie: $\omega = 1{,}7170$, $\varepsilon = 1{,}5629$.

§. 74. **Die pyramidale Hemiëdrie.** Die zweite mögliche Art der Hemiëdrie im hexagonalen System entsteht nach S. 338 dadurch, dass die Formen durch die sechs in der Hauptaxe einander schneidenden Symmetrieebenen in zwölf gleiche Theile zerlegt werden, und die eine Hälfte derselben, z. B. die Flächen 2 oben und unten, 4 oben und unten u. s. f. der dihexagonalen Pyramide Fig. 290, zu einer hemiëdrischen Form vereinigt wird. Diese kann demnach weder nach dem Prisma 1. noch nach dem 2. Ordnung, sondern nur nach der Basis Symmetrie zeigen.

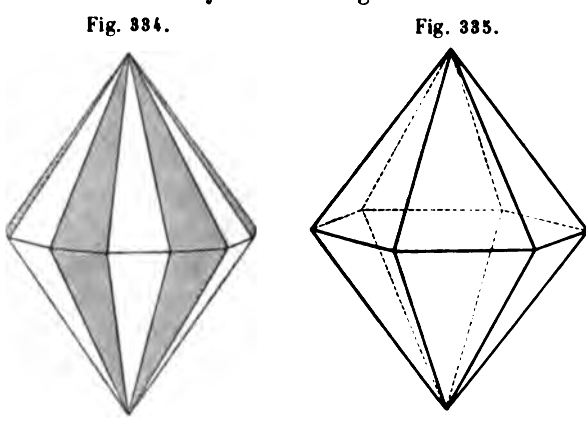


Fig. 334. Fig. 335.

1) Indem, zufolge dem angegebenen Gesetze, von den 4 Flächen einer dihexagonalen Pyramide, welche zwischen den durch zwei Nebenaxen gehenden Symmetrieebenen liegen, zwei über einander liegende (Fig. 334) verschwinden, bleibt eine hemiëdrische Form Fig. 335 übrig, welche einer hexagonalen Pyramide entspricht, da ihre Kanten theils horizontale Basiskanten, identisch mit den abwechselnden Basiskanten der holoëdrischen Gestalt, theils Polkanten sind, welche sämmtlich gleiche Winkel haben. Die so entstehende hexagonale Pyramide hat den horizontalen Querschnitt p^3 . . . Fig. 336, während p^1 derjenige der Pyramide erster, p^2 der zweiter Ordnung ist, so dass aus der Gleichheit der Winkel zwischen p^3 und p^1 unmittelbar hervorgeht, dass auch p^3 ein gleichwinkeliges Hexagon, und folglich alle Polkanten dieser hemiëdrischen Form denselben Winkel haben müssen. Wegen ihrer Stellung zwischen der Pyramide erster und zweiter Ordnung heisst die aus der pyramidalen Hemiëdrie hervorgehende Hälftgestalt der dihexagonalen, die **hexagonale**

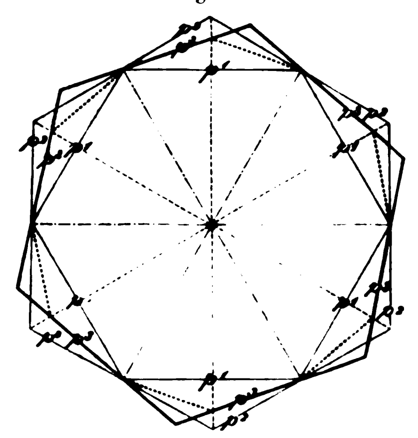


Fig. 336.

Pyramide dritter Ordnung oder der Zwischenrichtung. Die beiden, einander zur holoëdrischen Form ergänzenden Pyramiden dritter Ordnung werden bezeichnet: $\pi\{k\,i\,\bar{h}\,l\}$ und $\pi\{h\,\bar{i}\,\bar{k}\,l\}$ =

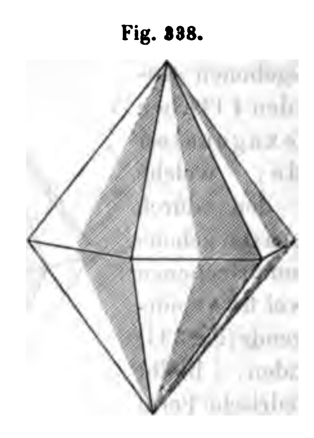
$$+ \text{ und } - \left[\frac{m\,P\,n}{2}\right]$$

2) Die hexagonale Pyramide erster Ordnung, demselben Gesetz der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 337, bleibt geometrisch unverändert. Für den Grenzfall $n = 1$ fällt die positive mit der negativen Pyramide dritter Ordnung und mit der holoëdrischen zusammen.

3) Wie Fig. 338 zeigt, ist das Gleiche der Fall mit der Pyramide zweiter Ordnung.

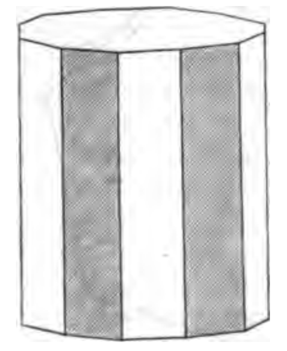
Fig. 337.

Fig. 338.



4) Wird dagegen, während n zwischen 1 und 2, $m = \infty$, so fallen die übereinander liegenden Flächen in eine Ebene, und von solchen gehört abwechselnd die eine zur positiven, die andere zur negativen hemiëdrischen Form, Fig. 339. Aus dem dihexagonalen Prisma entstehen somit zwei hexagonale Prismen dritter Ordnung, von denen das eine den Hauptquerschnitt p^3, Fig. 336, besitzt, wenn p^1 und p^2 diejenigen des Prismas der ersten und der zweiten Ordnung sind. Jene Formen sind demnach zu bezeichnen:

Fig. 339.



$$\pi\{k\,i\,\bar{h}\,0\} \text{ und } \pi\,\{h\,\bar{i}\,\bar{k}\,0\} = + \text{ und } - \left[\frac{\infty P n}{2}\right].$$

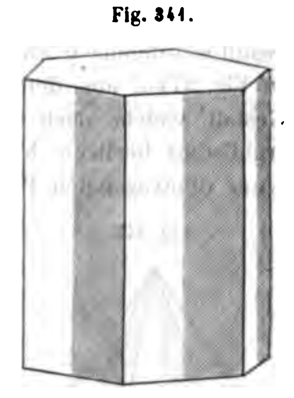
Während das dihexagonale Prisma die Kanten desjenigen erster Ordnung zuschärft, stumpft ein Prisma dritter Ordnung dieselben schief ab.

5) Das **hexagonale Prisma erster Ordnung**, Fig. 340, in gleicher Weise hemiëdrisch werdend, liefert zwei völlig congruente, scheinbar holoëdrische Formen.

6) Die hemiëdrischen Formen des Prismas zweiter Ordnung, Fig. 341, unterscheiden sich ebenso wenig von einander, wie von der holoëdrischen; endlich

7) bleibt auch die Basis oP unverändert.

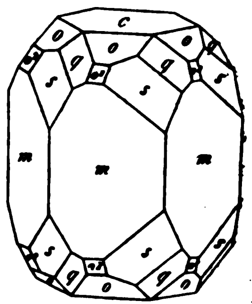
Fig. 340. Fig. 341.



Die Krystallformen dieser Hemiëdrie gleichen demnach vollkommen den holoëdrischen, mit Ausnahme der dihexagonalen Pyramiden und Prismen welche nur mit der Hälfte ihrer Flächen, als Formen der Zwischenrichtung, auftreten.

Beispiele: Apatit $= Ca^5 Cl (PO^4)^3$. $a : c = 1 : 0{,}7346$ v. Kokscharow. Eine häufig vorkommende Combination zeigt Fig. 342, nämlich $c = \{0001\}$, $o = \{10\bar{1}1\}$, $o^2 = \{20\bar{2}1\}$, $q = \{11\bar{2}1\}$, $s = \pi\{21\bar{3}1\}$. Die Zeichen dieser Flächen sind sämmtlich gegeben durch Zonen, wenn wir von o als $\{10\bar{1}1\}$ ausgehen, denn q liegt in zwei Zonen $o : m$ von links nach rechts und von rechts nach links, o^2 dadurch, dass q seine Polkanten abstumpft, endlich s durch die Zonen $oqsm$ und $o^2 s m$ (vergl. auch die Projection Fig. 288). Die Aetzfiguren auf $\{0001\}$ werden von einer Pyramide dritter Ordnung gebildet; diejenigen auf $\{10\bar{1}0\}$ sind Trapeze, welche nach oben und unten, nicht aber nach rechts und links symmetrisch sind, entsprechend der Symmetrie des Krystalls (Baumhauer, Sitzber. d. b. Akad. Münch. 1875). Doppelbrechung —. Brechungsexponenten für die Linien D und E:

Fig. 342.



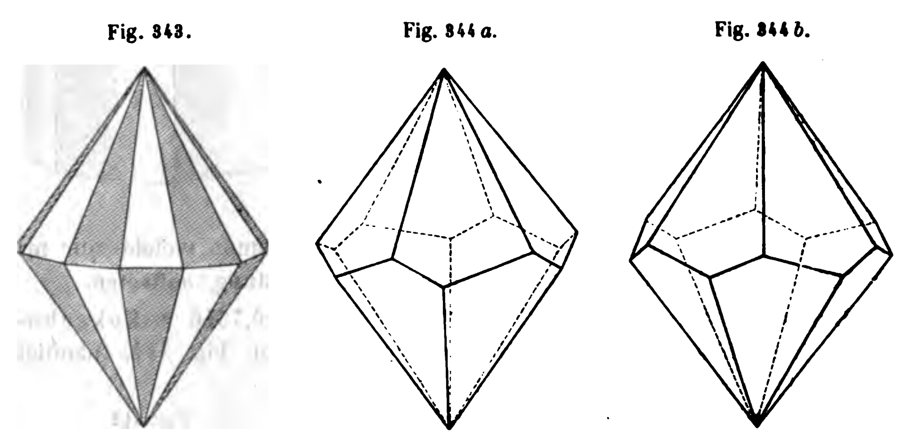
$$D:\ \omega = 1{,}6461 \qquad \varepsilon = 1{,}6417$$
$$E:\ \quad 1{,}6500 \qquad\quad 1{,}6464.$$

Pyromorphit $= Pb^5\ Cl\ (PO^4)^3$

und Mimetesit $= Pb^5\ Cl\ (AsO^4)^3$

zeigen nur $\{10\bar{1}0\}$, $\{0001\}$ $\{10\bar{1}1\}$, gehören aber wegen ihrer Isomorphie mit Apatit hierher. Auch verhalten sich ihre Prismenflächen beim Aetzen, wie die des Apatit, daher die Krystalle unzweifelhaft pyramidal-hemiëdrisch sind.

§. 75. **Die trapezoëdrische Hemiëdrie.** Bei der dritten und letzten möglichen Hemiëdrie findet die Zerlegung statt nach allen Symmetrieebenen (vergl. S. 338). 1) Die trapezoëdrisch-hemiëdrischen Formen der dihexagonalen Pyramiden entstehen demnach durch Auswahl von 12 alternirend oben und unten gelegenen Flächen, Fig. 343. Aus jeder derselben resultiren demnach zwei Hemiëder, aus den weiss gelassenen Flächen die in Fig. 344 *a*, aus den schwarz bezeichneten die in Fig. 344 *b* dargestellte Gestalt, welche nach der Trapezform, die deren Flächen bei gleicher Centraldistanz besitzen, hexagonale Trapezoëder heissen. Die beiden aus einer dihexagonalen Pyramide entstehenden Trapezoëder besitzen wie aus


Fig. 343. Fig. 344 *a*. Fig. 344 *b*.

der Art der Zerlegung der holoëdrischen Form hervorgeht, keine Symmetrieebene und sind daher enantiomorph, sie können durch keine Drehung zur Deckung gebracht werden. Wir nennen dasjenige von beiden, welches dadurch entsteht, dass von den vier Flächen des dem Beobachter zugekehrten Sechstels der dihexagonalen Pyramide, welches zwischen den benachbarten Hälften zweier Nebenaxen liegt, die rechte obere und linke untere bleiben, die beiden anderen verschwinden, das rechte Trapezoëder (Fig. 344 *a*), das entgegengesetzte, in welchem also die linke obere Fläche jenes Sechstels auftritt, das linke (Fig. 344 *b*), und bezeichnen dieselben mit $\tau\{k i \bar{h} l\}$ und $\tau\{h \bar{i} \bar{k} l\}$

$$= \frac{mPn}{2} r \text{ und } \frac{mPn}{2} l$$

Die Trapezoëder besitzen je 12 gleiche Polkanten und 12 Mittelkanten (zum Unterschied von den Basiskanten so genannt, weil sie nicht horizontal sind), von denen sechs stumpfere (bei dem rechten Trapezoëder von rechts oben nach links unten, bei dem linken umgekehrt laufend*)) und sechs schärfere sind.

*) Wenn, wie in den Figg. 343 und 344, $n = \frac{3}{2}$ (also $> 1,366$), folglich die nach den Nebenaxen herablaufenden Polkanten die stumpferen sind; ist dagegen $n < 1,366$, so ist das Verhältniss der Mittelkanten der Trapezoëder das umgekehrte.

2) Die hexagonalen Pyramiden erster Ordnung, demselben Gesetze der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 345, liefern Formen, welche sich geometrisch nicht von den holoëdrischen unterscheiden, da von den zwei Flächen der dihexagonalen Pyramide, welche hier in eine Ebene fallen, eine zur hemiëdrischen Form gehört, also diese Ebene, und ebenso alle elf anderen an der hemiëdrischen Form auftreten müssen.

3) Das Gleiche ist der Fall mit den hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung, welche, wie Fig. 346 zeigt, durch diese Hemiëdrie anscheinend nicht verändert wird.

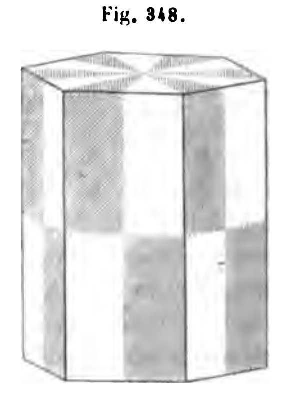
Fig. 345.

Fig. 346.

Fig. 347.

4) Die dihexagonalen Prismen, Fig. 347,
5) das hexagonale Prisma erster Ordnung, Fig. 348,
6) das hexagonale Prisma zweiter Ordnung, Fig. 349, und

Fig. 348.



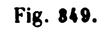
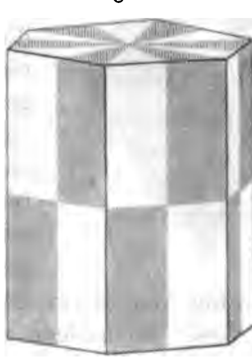


Fig. 349.



7) die Basis, s. Fig. 347 bis 349, liefern in Folge dessen ebenfalls hemiëdrische Formen dieser Abtheilung, welche vollkommen mit den holoëdrischen übereinstimmen.

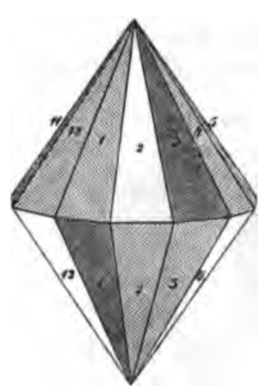
Eine Substanz, welche in dieser Abtheilung des hexagonalen Systems krystallisirte, ist bis jetzt nicht aufgefunden worden. Da sich die Krystall-

formen derselben nur in den dihexagonalen Pyramiden von den holoëdrischen unterscheiden, so würde eine solche Substanz, falls keine jener flächenreichsten Formen, sondern etwa nur hexagonale Pyramiden und Prismen an deren Krystallen beobachtet würden, sich geometrisch nicht von einer holoëdrisch krystallisirenden unterscheiden, wäre aber als hierher gehörig zu betrachten, wenn sie in der Richtung der Hauptaxe die Polarisationsebene des Lichtes drehen würde, da alle circularpolarisirenden Krystalle, welche man bisher beobachtet hat, einer enantiomorphen Hemiëdrie oder Tetartoëdrie angehören.

§. 76. **Mögliche Arten der Tetartoëdrie des hexagonalen Systems.** Nach Früherem erhalten wir die verschiedenen möglichen Arten der Tetartoëdrie dadurch, dass wir auf den allgemeinen Repräsentanten aller hexagonaler Formen, d. i. eine dihexagonale Pyramide, zwei Arten der Hemiëdrie gleichzeitig anwenden, und alsdann untersuchen, ob die so entstehenden viertelflächigen Gestalten den allgemeinen Bedingungen der Hemiëdrie (S. 226) noch genügen. Während uns im regulären System die Anwendung je zweier von den drei Hemiëdrien stets zu derselben Tetartoëdrie führte, erhalten wir im hexagonalen verschiedene Resultate, je nachdem wir die erste Hemiëdrie mit der zweiten, oder die erste mit der dritten, oder endlich die zweite mit der dritten combiniren.

Den ersten Fall stellt Fig. 350 dar, in welcher diejenigen Flächen von links unten nach rechts oben schraffirt sind, welche, entsprechend der Fig. 291, vermöge der rhomboëdrischen Hemiëdrie ausfallen, dagegen von links oben nach rechts unten diejenigen, welche nach Fig. 334 d. i. gemäss dem Gesetze der pyramidalen Hemiëdrie die zweite Hälftgestalt bilden. Numerirt man die Flächen ebenso, wie in der Fig. 290, so sind die ausfallenden Flächen, in derselben Richtung durchstrichen, wie sie schraffirt sind, folgende:

Fig. 350.



oben: ~~1~~ 2 ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6 ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ 10 ~~11~~ ~~12~~

unten: ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ 8 ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ 12.

Die zwischen 1 und 2 liegende Symmetrieebene enthält eine horizontale Symmetrieaxe (Zwischenaxe), welche in einem bestimmten Abstande statt von vier, nur von einer Fläche (2 oben) der tetartoëdrischen Form geschnitten wird: die nächste gleichwerthige Symmetrieaxe, zwischen 3 und 4, wird in demselben Abstande und unter dem gleichen Winkel ebenfalls von einer Fläche (4 unten) durchschnitten; die dritte gleichartige Halbaxe ganz ebenso von »6 oben«, die vierte von »8 unten«, die fünfte von »10 oben«, die sechste endlich von »12 unten«. Ganz ebenso ersieht man aus der Figur, dass die sechs gleichwerthigen Seiten der Nebenaxen in gleichem Abstande je von einer Fläche getroffen werden. Was die beiden Seiten

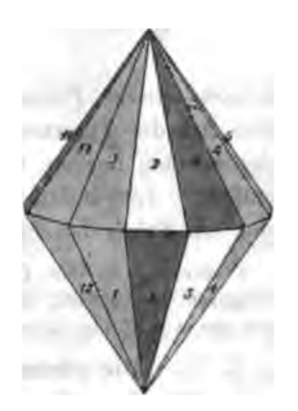
der Hauptaxe betrifft, so wird die obere von den Flächen 2, 6 und 10, die untere in demselben Abstande von 4, 8, 12 geschnitten, und aus der Vertheilung dieser Flächen, zwischen denen jedesmal drei der dihexagonalen Pyramide fehlen, ersieht man unmittelbar, dass die dreikantige Ecke, welche die drei oberen Flächen mit einander bilden, dieselben drei gleichen Winkel haben muss, wie die von den drei unteren gebildete Ecke. Die so erhaltene tetartoëdrische Form entspricht also in Bezug auf alle Symmetrieaxen den Bedingungen der Hemiëdrie, und da die Fläche »8 unten« die parallele Gegenfläche von »2 oben«, »12 unten« diejenige von »6 oben«, endlich »4 unten« die von »10 oben« ist, so besteht die tetartoëdrische Form aus drei Paaren paralleler Flächen, d. h. sie besitzt die Gestalt eines **Rhomboëders**, daher diese Art der Tetartoëdrie die »rhomboëdrische« genannt wird.

Combinirt man die trapezoëdrische mit der rhomboëdrischen Hemiëdrie, Fig. 351, in welcher die erstere, wie in Fig. 343, durch Schraffirung von links unten nach rechts oben, die letztere durch solche von links oben nach rechts unten angedeutet ist, so werden, in derselben Richtung durchstrichen, folgende Flächen in Fortfall kommen:

oben: ~~1~~ 2 ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6 ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ 10 ~~11~~ ~~12~~
unten: ~~1~~ ~~2~~ 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~.

Es zeigt sich, dass die 6 Flächen der so entstehenden tetartoëdrischen Form eine ganz andere Vertheilung haben, als in dem ersten Falle. Die in der Symmetrieebene, welche zwischen die Flächen 1 und 2 fällt, liegende halbe Zwischenaxe wird von »2 oben«, die nächste gleichwerthige von »3 unten«, die »dritte von »6 oben«, die vierte von »7 unten«, die fünfte von »10 oben«, die sechste von »11 unten«, stets in demselben Abstande geschnitten. Die drei unteren Flächen 3, 7, 11 sind zwar nicht den drei oberen parallel, wie im vorigen Falle, aber da zwischen je zweien derselben stets drei Flächen ausfallen, so bilden die drei oberen wie die drei unteren je eine dreikantige Ecke mit denselben Kantenwinkeln. In Bezug auf Haupt- und Zwischenaxen erfüllt also diese Tetartoëdrie alle Bedingungen der Hemiëdrie; nicht so in Bezug auf die Nebenaxen, denn die zwischen 2 und 3 liegende Nebenaxe wird vorn von zwei, hinten im gleichen Abstande von **keiner** Fläche geschnitten, die zwischen 1 und 12 gelegene vorn von keiner, hinten von zwei u. s. f. Es tritt also hier der S. 227 erwähnte Fall ein, dass durch die Tetartoëdrie eine »Hemimorphie« nach gewissen Symmetrieaxen resultirt. Die aus den Flächen 2, 6, 10 oben, 3, 7, 11 unten bestehende Form, das trigonale **Trapezoëder**, ist hemimorph nach

Fig. 351.



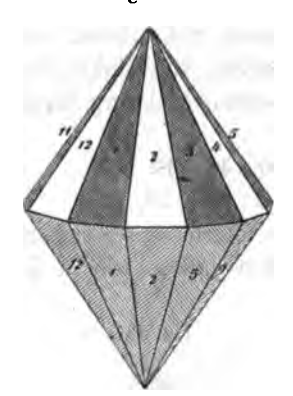
den drei Nebenaxen. Nach dieser Form wird die zweite Art der Tetartoëdrie die »trapezoëdrische« genannt.

Endlich kann noch die trapezoëdrische mit der pyramidalen Hemiëdrie zur Erzeugung einer Tetartoëdrie combinirt werden. In Fig. 352 entspricht die von links ansteigende Schraffirung der ersteren, die von links abfallende der letzteren. Welche Flächen übrig bleiben, ersieht man leicht aus dem folgenden Schema, in welchem die ausfallenden Flächen in derselben Richtung durchstrichen sind:

oben: ~~1~~ 2 ~~3~~ 4 ~~5~~ 6 ~~7~~ 8 ~~9~~ 10 ~~11~~ 12
unten: ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~.

Es bleiben also nur oben sechs Flächen übrig, so dass zwar jede Seite einer Neben- wie einer Zwischenaxe in demselben Abstande von einer Fläche geschnitten wird, nicht aber die beiden Seiten der Hauptaxe gleichartig getroffen werden. Diese Tetartoëdrie führt also zu einer Hemimorphie nach der Hauptaxe. Dass die letztere aber auch unabhängig von der Hemiëdrie erscheinen kann, hat eine Anzahl von Beispielen rhomboëdrischer Substanzen gelehrt. Wie die Hemimorphie an diesen mit der rhomboëdrischen Hemiëdrie verbunden auftrat, so könnte sie ebenso sich mit der pyramidalen oder mit der trapezoëdrischen Hemiëdrie verbinden. Denken wir uns aber die Pyramide 3. Ordnung (vergl. Fig. 334) oder das hexagonale Trapezoëder (vergl. Fig. 343) nach der Hauptaxe hemimorph, so sind die sechs oberen Flächen dieselben, wie sie in Fig. 352 übrig bleiben. Die dritte Art der Tetartoëdrie bringt also denselben Einfluss auf die hexagonalen Formen hervor, wie ihn auch die pyramidale oder die trapezoëdrische Hemiëdrie, verbunden mit Hemimorphie nach der Hauptaxe, erzeugen würde, daher im Folgenden eine weitere Ausführung dieses Falles nicht nöthig ist.

Fig. 352.



Anmerk. An dem früher für holoëdrisch gehaltenen Nephelin hat Baumhauer Aetzfiguren beobachtet, welche auf eine dieser drei, in ihren Resultaten identischen Arten der Ausbildung hinweisen (Zeitschr. f. Kryst. 6, 209).

§. 77. **Die rhomboëdrische Tetartoëdrie.** 1) Die dihexagonale Pyramide Fig. 353 zerfällt zunächst durch die rhomboëdrische Hemiëdrie in ein positives und ein negatives Skalenoëder. Das erstere enthält die folgenden Flächen:

1 2 . . 5 6 . . 9 10 . .
. . 3 4 . . 7 8 . . 11 12

und ist in Fig. 354 für sich dargestellt. Wählt man von dessen 12 Flächen abermals die Hälfte aus, indem man auf die ursprüngliche holoëdrische Gestalt auch noch die pyramidale Hemiëdrie anwendet, so entstehen aus

demselben zwei Tetartoëder, deren eines von folgenden Flächen gebildet wird:

. 2 . . . 6 . . . 10 . .
. . . 4 . . . 8 . . . 12

Diese Form ist, wie bereits S. 371 nachgewiesen wurde, ein Rhomboëder, und da dasselbe weder die Flächenlage einer pyramidalen Form erster, noch einer solchen zweiter Ordnung besitzt, so wird es **Rhomboëder dritter Ordnung** oder **Rhomboëder der Zwischenrichtung** genannt und mit $\varkappa\pi\{k\,i\,\bar{h}\,l\}$

$$= + \frac{mPn}{4}\frac{r}{l}$$

Fig. 353.

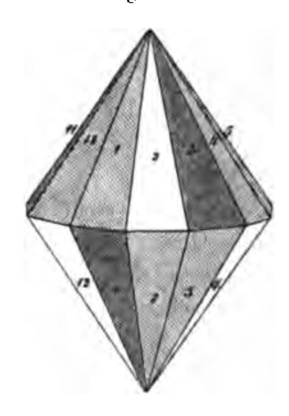
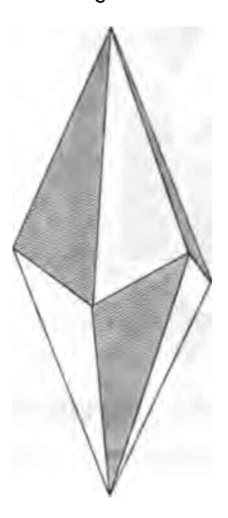


Fig. 354.



bezeichnet; die 6 schraffirten Flächen des Skalenoëders Fig. 354 bilden ebenfalls ein Rhomboëder dritter Ordnung, $\varkappa\pi\{h\bar{i}\bar{k}l\} = +\frac{mPn}{4}\frac{l}{r}$, von genau derselben Form und nur durch eine Drehung, welche von dem Werthe des Coëfficienten n abhängt, von dem ersten verschieden. Wir haben es hier also nicht mit einer enantiomorphen Tetartoëdrie zu thun. Selbstverständlich haben die beiden negativen Rhomboëder $\varkappa\pi\{\bar{i}h\bar{k}l\} = -\frac{mPn}{4}\frac{r}{l}$ und $\varkappa\pi\{i\bar{k}hl\} = -\frac{mPn}{4}\frac{l}{r}$, welche aus dem negativen Skalenoëder entstehen, ebenfalls eine den beiden ersten congruente Gestalt. Alles, was bei Gelegenheit der rhomboëdrischen Hemiëdrie über die Rhomboëder gesagt wurde, gilt auch hier, mit Ausnahme ihres Auftretens in den Combinationen, welches ihrer abweichenden Stellung wegen ein anderes ist (s. unter Beispiele am Schluss dieses §).

2) Die hexagonalen Pyramiden erster Ordnung, nach demselben Gesetze tetartoëdrisch werdend, Fig. 355, liefern dieselben Rhomboëder, welche wir auch in der Hemiëdrie kennen lernten. Sie sind die Grenzgestalten je einer Reihe von Skalenoëdern; deren Flächen fallen dann zu je zweien, von denen eine dem ersten, die andere dem zweiten Rhomboëder der Zwischenrichtung angehört, zusammen, folglich ist ein Rhomboëder erster Ordnung (die Hälfte einer Pyramide erster Ordnung) die gemeinschaftliche Grenzform des rechten und linken Rhomboëders dritter Ordnung (in Fig. 356 durch Schraffirung des letzteren unterschieden) für den Fall, dass die Ableitungszahl des Skalenoëders (bei der Ableitung aus dem Rhomboëder mit denselben Mittelkanten) = 1 ist. Die Rhomboëder können daher, wie in der Hemiëdrie, mit

Fig. 355.

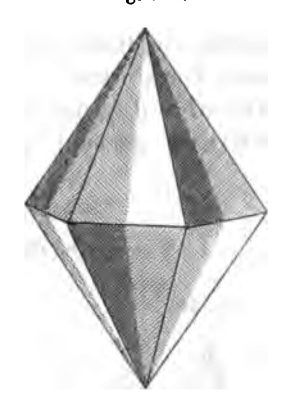
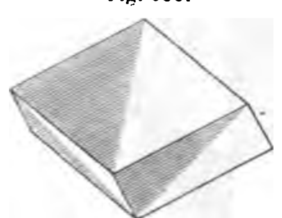


Fig. 356.



$$\varkappa\{h0\bar{h}l\},\ \varkappa\{0h\bar{h}l\} = \pm mR$$

bezeichnet werden.

3) Die hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung, dem Gesetze der rhomboëdrischen Tetartoëdrie unterworfen, Fig. 357, liefern je ein aus sechs abwechselnden Flächen gebildetes »Rhomboëder zweiter Ordnung« als gemeinschaftliche Grenzform des einen positiven und des entgegengesetzten negativen Rhomboëders dritter Ordnung, während die beiden anderen Tetartoëder für den Grenzfall $h : k = 2$ in dasjenige Rhomboëder zweiter Ordnung zusammenfallen, welches von den übrigen sechs Flächen gebildet wird. Rhomboëder als Theilgestalten der Pyramiden zweiter Ordnung sind nur in dieser Tetartoëdrie möglich. Sie werden bezeichnet:

Fig. 357.

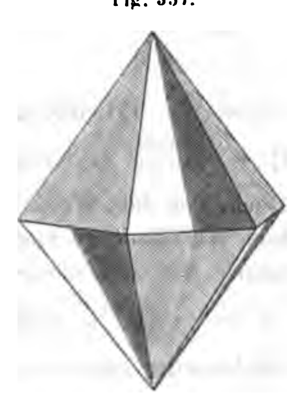
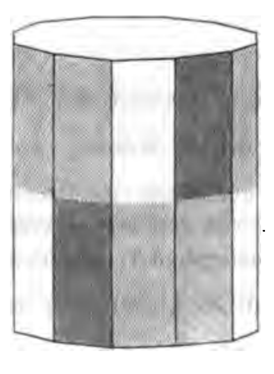


Fig. 358.



$$\varkappa\pi\{kkhl\} = \frac{mP2}{4}\,\frac{r}{l} \text{ und } \varkappa\pi\{h\bar{k}\bar{k}l\} = \frac{mP2}{4}\,\frac{l}{r}$$

4) Die dihexagonalen Prismen liefern in dieser Tetartoëdrie, wie aus Fig. 358 hervorgeht, je ein hexagonales Prisma dritter Ordnung,

welches sich geometrisch nicht unterscheidet von demjenigen der pyramidalen Hemiëdrie; während dieses indess als eine hexagonale Pyramide dritter Ordnung, deren $l = 0$, aufzufassen ist, muss man jenes als ein unendlich spitzes Rhomboëder dritter Ordnung betrachten. Bezeichnet wird dasselbe

$$\varkappa\pi\{k\,i\,\bar{h}\,0\} = \frac{\infty Pn}{4}\frac{r}{l}\ .\ .\ .$$

5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung, Fig. 359, erscheint in der rhomboëdrischen Tetartoëdrie mit seiner vollen Flächenzahl, wie schon daraus folgt, dass es als Rhomboëder, dessen $l = 0$, nicht weniger Flächen haben kann, als sechs. Wir können es daher, wie in der rhomboëdrischen Hemiëdrie, mit $\{10\bar{1}0\}$ ∞R bezeichnen.

Fig. 359.

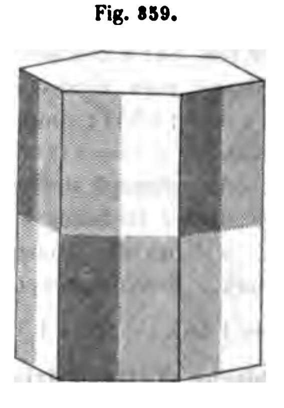
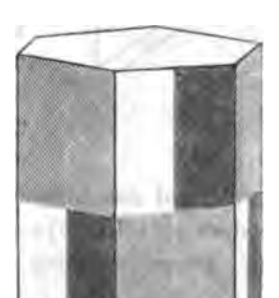


Fig. 360.



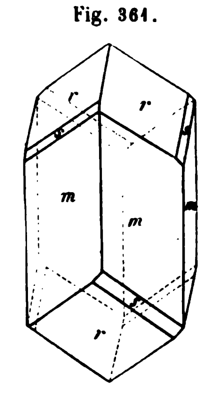
6) Das hexagonale Prisma zweiter Ordnung, demselben Gesetze der Tetartoëdrie unterworfen, Fig. 360, giebt eine Form, welche sich ebensowenig, wie vorige, von der holoëdrischen unterscheidet und daher auch mit $\{11\bar{2}0\} = \infty P2$ bezeichnet wird. Es ist die gemeinschaftliche Grenzgestalt, in welche die beiden Rhomboëder, welche je aus einer Pyramide zweiter Ordnung entstehen, zusammenfallen, sobald l den Minimalwerth Null erreicht.

7) Sowohl die Rhomboëder erster Ordnung, wie diejenigen zweiter und dritter, liefern, wenn der Coëfficient $m = 0$ wird, ein und dasselbe Flächenpaar, die Basis $\{0001\} = oR$.

Ueberblicken wir die so resultirenden Formen, so ersehen wir, dass die beiden hexagonalen Prismen und die Basis genau so, wie in der Holoëdrie, erscheinen, dass ferner auch das Auftreten der hexagonalen Prismen dritter Ordnung, welche sich ebenso auch in der pyramidalen Hemiëdrie vorfinden, nicht genügt, um diese Tetartoëdrie nachzuweisen, wohl aber dasjenige der Rhomboëder zweiter Ordnung, da in allen Hemiëdrien die Pyramiden zweiter Ordnung vollflächig, in der trapezoëdrischen Tetartoëdrie (s. S. 378) als trigonale Pyramiden erscheinen. Sobald also an einem Krystall Rhomboëder beobachtet werden, welche sich von hexagonalen Pyramiden verschiedener Ordnung ableiten, gleichviel, welche derselben man als erster, welche als zweiter Ordnung betrachtet, so kann dieser Krystall keiner andern Abtheilung des hexagonalen Systems angehören, als der rhom-

boëdrischen Tetartoëdrie. Ebenso unzweifelhaft ist dies natürlich nachgewiesen durch das Auftreten von Rhomboëdern dritter Ordnung in Combination mit anderen Formen, welche sie als solche zu erkennen gestatten.

Fig. 361.



Beispiele: Der rhomboëdrisch-tetartoëdrischen Abtheilung gehören nur eine kleine Zahl wenig wichtiger Substanzen an; es wird daher genügen, eine einzige derselben, aus der Reihe der in der Natur vorkommenden, hier etwas näher zu betrachten:

Dioptas $= H^2 Cu Si O^4$. Dieses Mineral findet sich in smaragdgrünen Krystallen, welche nach einem Rhomboëder von 54° 5' Polkantenwinkel (Breithaupt) spalten. Nimmt man dieses zum primären $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, so ist $a : c = 1 : 0{,}5342$, und die in Fig. 361 abgebildete Combination: $r = \varkappa\{02\bar{2}1\} - 2R$ (das Spaltungsrhomboëder stumpft dessen Polkanten ab), $m = \{11\bar{2}0\}$ $\infty P2$, und das Rhomboëder dritter Ordnung s, die Hälftform eines Skalenoëders $\varkappa\{14.\bar{1}\bar{3}.\bar{1}.6\} - 2R\frac{7}{8}$, welches die gleichen Mittelkanten mit $-2R$ hat. Doppelbrechung $+$, stark. Brechungsexponenten:

$$\omega = 1{,}667, \quad \varepsilon = 1{,}723.$$

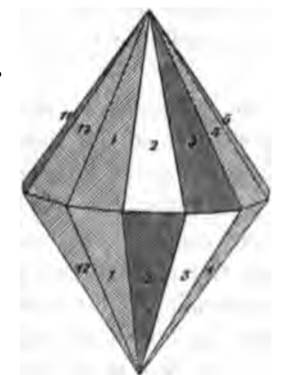
§. 78. **Die trapezoëdrische Tetartoëdrie.** 1) Die dihexagonale Pyramide Fig. 362 zerfällt durch die rhomboëdrische Hemiëdrie in ein positives und ein negatives Skalenoëder. Das erstere enthält die folgenden Flächen:

oben:	1	2	.	.	5	6	.	.	9	10	.	.
unten:	.	.	3	4	.	.	7	8	.	.	11	12

und ist in Fig. 363 für sich dargestellt. Wählt man von dessen 12 Flächen abermals die Hälfte aus, indem man auf die holoëdrische Form das Gesetz der trapezoëdrischen Hemiëdrie anwendet, so entstehen daraus zwei Tetartoëder, von denen das eine von folgenden Flächen gebildet wird:

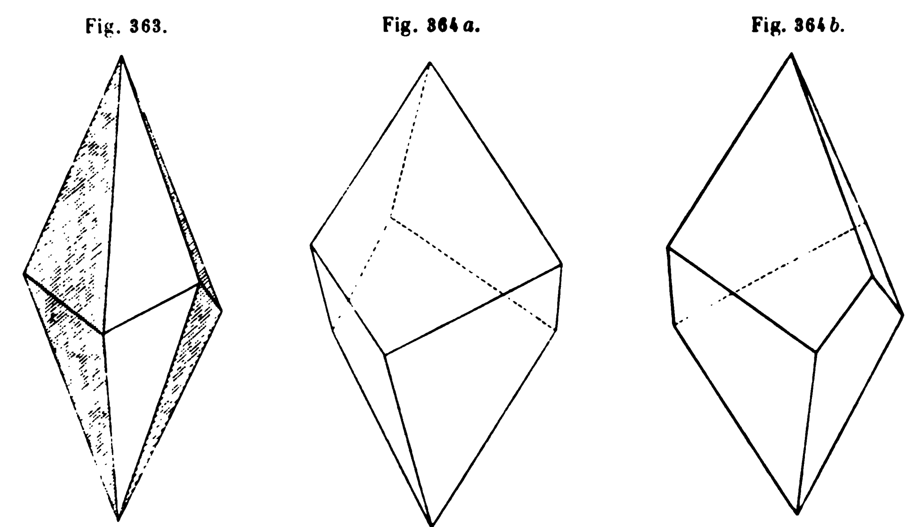
.	2	.	.	.	6	.	.	.	10	.	.
.	.	3	.	.	.	7	.	.	.	11	.

Fig. 362.



Diese Flächen sind in Fig. 362 und 363 weiss gelassen, und sie umschliessen die in Fig. 364 *a* dargestellte Gestalt, welche nach der Trapezform ihrer Flächen und der Dreikantigkeit ihrer Polecken das trigonale Trapezoëder genannt wird. Da von dem, oben dem Beobachter zugekehrten Flächenpaare 1 und 2 die rechte mit ihren zugehörigen jene Form zusammensetzt, so heisst dieselbe das rechte trigonale Trapezoëder. Die sechs anderen Flächen des positiven Skalenoëders, in Fig. 363 schraffirt, bilden

die in Fig. 364 *b* dargestellte Form, welche das **linke** Trapezoëder heisst, weil zu demselben die linke Fläche des oben bezeichneten Flächenpaares gehört. Da das Skalenoëder nur symmetrisch ist zu den drei Ebenen, welche durch je eine längere und eine kürzere Polkante gehen, d. h. zu den Flächen des Prismas zweiter Ordnung, einem Trapezoëder aber jedesmal nur die Flächen auf der einen Seite einer solchen Ebene, die auf der anderen dem entgegengesetzten zugehören, so ist das eine Trapezoëder symmetrisch zum anderen in Bezug auf jene Ebenen, besitzt aber selbst keine Symmetrieebenen, d. h. das rechte und linke Trapezoëder sind **enantiomorph**, sie können durch keine Drehung zur Congruenz gebracht werden.


Fig. 363. Fig. 364 *a*. Fig. 364 *b*.

Das negative Skalenoëder besitzt die gleiche Gestalt, wie das positive, und unterscheidet sich nur durch seine um 60° oder 180° gedrehte Stellung von demselben; lässt man dieses nun abermals hemiëdrisch werden, so resultiren bei derselben Art der Auswahl der Flächen daraus wiederum ein **rechtes** Trapezoëder, welches mit dem vorerwähnten rechten gleiche Gestalt hat, und ein **linkes**, welches sich ebenfalls von dem linken, aus dem positiven Skalenoëder entstehenden, nur durch die Stellung unterscheidet. Die dihexagonale Pyramide zerfällt also durch diese Tetartoëdrie in vier Viertelgestalten, welche wir zu bezeichnen haben:

1 Rechtes positives Trapezoëder $= \varkappa\tau\{k\, i\, \bar{h}\, l\} \quad + \frac{mPn}{4} r = \quad \frac{mRn}{2} r.$

2 Linkes positives Trapezoëder $= \varkappa\tau\{h\, \bar{i}\, \bar{k}\, l\} \quad + \frac{mPn}{4} l = \quad \frac{mRn}{2} l.$

3 Rechtes negatives Trapezoëder $= \varkappa\tau\{h\, \bar{k}\, \bar{i}\, l\} \quad - \frac{mPn}{4} r = - \frac{mRn}{2} r.$

4 Linkes negatives Trapezoëder $= \varkappa\tau\{k\, \bar{h}\, i\, l\} \quad - \frac{mPn}{4} l = - \frac{mRn}{2} l.$

Von diesen vier Formen sind 1 und 2, sowie 3 und 4 enantiomorph, dagegen 1 und 3, sowie 2 und 4 congruent.

Ein trigonales Trapezoëder besitzt sechs (drei obere und drei untere) einander gleiche Polkanten, ferner drei schärfere und drei stumpfere Mittelkanten, von denen die letzteren identisch sind mit den Mittelkanten des zugehörigen Skalenoëders.

Trigonale Trapezoëder hat man bisher nur in Combinationen, und zwar mit den einfacheren Formen dieser Tetartoëdrie, beobachtet, daher dieselben erst nach diesen (bei den Beispielen) betrachtet werden sollen.

2) Eine hexagonale Pyramide erster Ordnung, derselben Tetartoëdrie unterworfen, Fig. 365, liefert ein Rhomboëder, welches sich nicht von dem hemiëdrischen unterscheidet. Bekanntlich ist jedes Rhomboëder die Grenzgestalt einer Reihe von Skalenoëdern, deren Flächenpaare mit den Flächen jenes Rhomboëders zusammenfallen, wenn die Ableitungszahl n (s. S. 351) $= 1$ ist. Von diesen Flächenpaaren gehört in der Tetartoëdrie jedesmal die eine Fläche dem rechten, die andere dem linken Trapezoëder an; für diesen Grenzfall, der in Fig. 366 dargestellt ist, fällt somit das rechte Trapezoëder (weiss) mit dem linken (schraffirt) zusammen, und beide unterscheiden sich geometrisch nicht von dem hemiëdrischen Rhomboëder. Ebenso liefern das rechte und linke negative Trapezoëder als gemeinschaftliche Grenzform das negative Rhomboëder, daher diese beiden Gestalten ganz ebenso, wie in der Hemiëdrie, mit $\varkappa\{h0\bar{h}l\} = mR$ und $\varkappa\{0h\bar{h}l\} = -mR$ (die primären mit $\pm R$) bezeichnet werden.

Fig. 365.

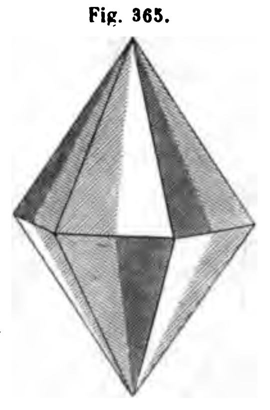
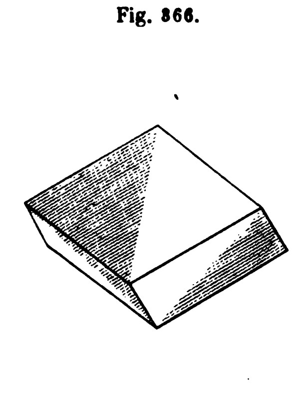


Fig. 366.



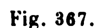
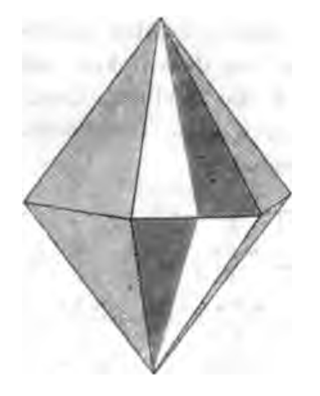


Fig. 367.



In den Combinationen der Rhomboëder mit den Trapezoëdern tritt der Unterschied des rechten von dem linken, obgleich beide geometrisch zusammenfallen, hervor, indem z. B. statt der Zuschärfung der Polkanten eines Rhomboëders (Skalenoëder) nur einseitig, entweder rechts oder links, geneigte schiefe Abstumpfungen auftreten.

3) Die Pyramide zweiter Ordnung, Fig. 367, liefert in dieser Tetartoëdrie eine aus sechs Flächen bestehende Form, nämlich den drei abwechselnden oben und den darunter liegenden (nicht den alternirenden) drei unteren. Dieselbe heisst trigonale Pyramide und besitzt drei einander gleiche Polkanten. Die in Fig. 368a

dargestellte, entsprechend den weiss gelassenen Flächen in Fig. 367, ist diejenige Form, in welche das positive rechte Trapezoëder übergeht, wenn $h : k = 2$ wird; Fig. 368 *b* dagegen zeigt die Grenzform des linken positi-

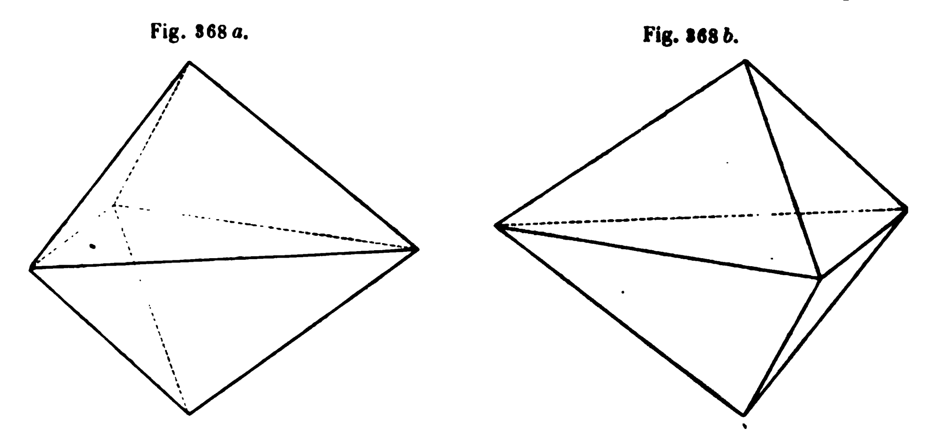


Fig. 368 *a*. Fig. 368 *b*.

ven Trapezoëders für denselben Fall. Aus Fig. 367 ist unschwer zu ersehen, dass die erste trigonale Pyramide zugleich die Grenzform der linken negativen Trapezoëder, und Fig. 368 *b* die gemeinschaftliche Grenzform der linken positiven und der rechten negativen ist, sobald $h : k$ den Werth 2 annimmt.

Auch die trigonalen Pyramiden, mit

$$\varkappa\tau\{kk\bar{h}l\} = \frac{mP2}{4}\,r \text{ die erste}$$

$$\text{und } \varkappa\tau\{h\bar{k}\bar{k}l\} = \frac{mP2}{4}\,l \text{ die zweite}$$

zu bezeichnen, kommen nur in Combinationen vor, welche bei den Beispielen zu erläutern sind.

4) Wenden wir auf ein **dihexagonales Prisma** dasselbe Gesetz der Tetartoëdrie, wie auf die dihexagonale Pyramide Fig. 362, an, so ist aus Fig. 369 ersichtlich, dass das rechte positive Trapezoëder für den Fall $l = 0$

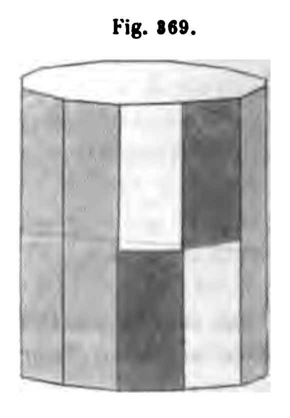


Fig. 369.

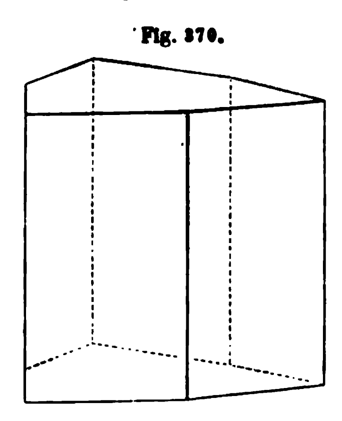


Fig. 370.

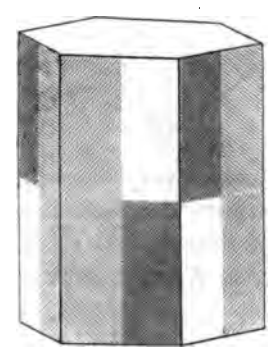
übergeht in eine Form, welche, statt von sechs, nur von drei Paaren verticaler Flächen gebildet wird und in Fig. 370 in Combination mit der Basis

dargestellt ist. Sie wird ditrigonales Prisma genannt und besitzt drei schärfere und drei stumpfere verticale Kanten, deren letztere denselben Winkel haben, wie diejenigen Kanten der holoëdrischen Form, in denen die Nebenaxen endigen *).

Da ein dihexagonales Prisma die Kanten des hexagonalen erster Ordnung zuschärft, so erscheint ein ditrigonales nur als Zuschärfung von je drei abwechselnden Kanten desselben.

Das in Fig. 370 dargestellte Prisma $\varkappa\tau\{k\,i\,\bar{h}\,0\} = \frac{\infty Pn}{4}r$ ist die gemeinschaftliche Grenzform des rechten positiven und des linken negativen Trapezoëders, das ganz gleich gestaltete, aber um 180° dagegen gedrehte, $\varkappa\tau\{h\,\bar{i}\,\bar{k}\,0\} = \frac{\infty Pn}{4}\,l$ ist die gemeinschaftliche Grenzform des linken positiven und des rechten negativen Trapezoëders.

Fig. 371.



5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung bleibt in dieser Tetartoëdrie völlig unverändert, wie aus Fig. 371 zu ersehen. Es ist die gemeinschaftliche Grenzform aller vier Trapezoëder, wenn in dem Zeichen der dihexagonalen Pyramide $h = k$ und $l = 0$ werden.

6) Dagegen zerfällt das hexagonale Prisma zweiter Ordnung, Fig. 372, in zwei trigonale Prismen, deren eines Fig. 373 die gemeinschaftliche Grenzgestalt

Fig. 372.

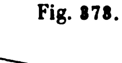
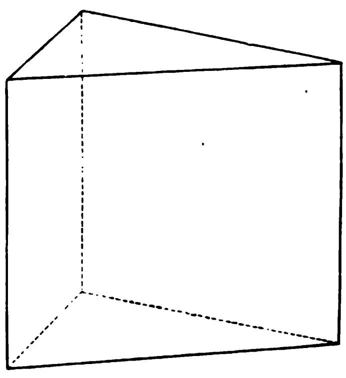


Fig. 373.



des rechten positiven und linken negativen, das andere, um 180° gedrehte, diejenige des linken positiven und des rechten negativen Tetartoëders ist,

---

*) Diese Form ist demnach wesentlich verschieden von dem ditrigonalen Prisma Fig. 305, welches aus dem Zusammenwirken der rhomboëdrischen Hemiëdrie und der Hemimorphie entsteht, denn das letztere besitzt drei stumpfe Kanten, welche mit den

wenn $h : k = 2$ und $l = 0$. Die beiden Formen sind daher zu bezeichnen $\varkappa\tau\{11\bar{2}0\} = \frac{\infty P2}{4} r$ und $\varkappa\tau\{2\bar{1}\bar{1}0\} = \frac{\infty P2}{4} l$.

Das erstere ist zugleich das Endglied der Reihe der trigonalen Pyramiden $\varkappa\tau\{k k \bar{h} l\}$ $\frac{m P2}{4} r$, welche sich demselben um so mehr nähern, je mehr $\frac{k}{l} = m$ sich dem Grenzwerth ∞ nähert; das zweite, $\varkappa\tau\{2\bar{1}\bar{1}0\} = \frac{\infty P2}{4} l$, ebenso des Endglied der Reihe der linken trigonalen Pyramiden.

Während das hexagonale Prisma zweiter Ordnung alle Kanten desjenigen erster Ordnung gerade abstumpft, tritt ein trigonales in derselben Weise nur an den abwechselnden drei Kanten desselben auf.

7) Dass die Basis $\{0001\}$, in der abgekürzten Naumann'schen Weise als untere Grenzform der Reihe der Rhomboëder mit oR bezeichnet, die Gestalt ist, in welche alle vier Tetartoëder einer dihexagonalen Pyramide übergehen, wenn $\frac{h}{l} = m$ gleich Null wird, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

§. 79. **Beispiele trapezoëdrisch-tetartoëdrischer Substanzen.** Wir haben im vorigen § gesehen, dass zwei Formen, die Basis und das Prisma erster Ordnung, in dieser Tetartoëdrie unverändert bleiben: ein Körper, welcher nur die Flächen dieser beiden zeigte, wäre daher geometrisch nicht von einem holoëdrischen zu unterscheiden. Wie aber bereits früher bemerkt wurde, zeigen die circularpolarisirenden Krystalle stets eine enantiomorphe Hemiëdrie oder Tetartoëdrie, oder wenigstens nur solche Formen, die einer derartigen Abtheilung ihres Krystallsystems angehören können. Beobachtet man daher in der Richtung der optischen Axe an einem Krystall, welcher nur von dem Prisma erster Ordnung und der Basis gebildet wird, Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, so ist mit grosser Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass derselbe einer enantiomorphen Hemiëdrie oder Tetartoëdrie angehöre; eine solche ist aber sowohl die trapezoëdrische Hemiëdrie (§. 75), als die im vorigen § betrachtete trapezoëdrische Tetartoëdrie; um zu entscheiden, welcher von diesen beiden Abtheilungen der Krystall zuzurechnen ist, bedarf es noch der Beobachtung weiterer Flächen an demselben. Es genügen zu diesem Zwecke die einer Pyramide erster Ordnung, welche anscheinend holoëdrisch auftritt in der trapezoëdrischen Hemiëdrie, dagegen als Rhomboëder in der gleichnamigen Tetartoëdrie. Sobald wir also an einem hexagonalen Krystall rhomboëdrische Formenausbildung und zugleich Circularpolarisation wahrnehmen, so haben wir ihn, obigem Erfahrungsgesetz zufolge, der trapezoëdrischen Tetartoëdrie zuzurechnen. In der That sind an den Krystallen einiger der unten folgenden Beispiele nur Formen beobachtet, denen zufolge dieselben

an den Zwischenaxen liegenden Kanten der holoëdrischen Form in ihrem Winkel übereinstimmen. Dem entsprechend sind auch die Combinationen dieser beiden Arten von ditrigonalen Prismen mit dem Prisma 1. Ordnung ganz verschieden.

auch der rhomboëdrischen Hemiëdrie angehören könnten, wenn sie nicht circularpolarisirend wären. Ohne die letztere Eigenschaft ist die trapezoëdrische Tetartoëdrie natürlich schon durch die Krystallform erwiesen, sobald das Auftreten von trigonalen Pyramiden oder Trapezoëdern beobachtet ist.

Folgende sind die bis jetzt bekannten Substanzen dieser Abtheilung:

Zinnober $= HgS$. $a : c = 1 : 1{,}1448$ Schabus. Die gewöhnliche Combination Fig. 374 zeigt $c = \{0001\}\, oR$, $r/_3 = \varkappa\{10\bar{1}3\}\, \frac{1}{3}R$, $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}\, R$, $m = \{10\bar{1}0\}\, \infty R$; als Seltenheit hat man beobachtet $\varkappa\tau\{11\bar{2}0\}\, \frac{\infty P2}{4}$ als schmale Abstumpfung der abwechselnden Prismenkanten und kleine Flächen von trigonalen Trapezoëdern. Spaltbarkeit nach ∞R ziemlich vollkommen. Die Krystalle besitzen das stärkste Drehungsvermögen der Polarisationsebene, welches überhaupt existirt, indem dasselbe nach Des Cloizeaux, welcher es entdeckte (Ann. d. mines, XI, 339), 15 mal so gross als das des Quarzes ist. Zwillinge nach $\{0001\}$, je aus einem rechts- und einem linksdrehenden Krystall bestehend, zeigen die Airy'schen Spiralen (S. 88). Doppelbrechung $+$; $\omega = 2{,}854$. $\varepsilon = 3{,}201$ Roth.

Fig. 374.

Quarz $= SiO^2$. $a : c = 1 : 1{,}0999$ Kupffer. Gewöhnliche Combination Figg. 375 und 376: $m = \{10\bar{1}0\}\, \infty R$, $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}\, R$, $r' = \varkappa\{01\bar{1}1\} - R$, letzteres gewöhnlich kleiner und zuweilen matter als r (diese beiden Rhomboëder, von denen das positive parallel der unvollkommenen Spaltbarkeit, haben Polkanten von 85° 46′, sind also sehr würfelähnlich); $s = \varkappa\tau\{11\bar{2}1\}\, \frac{2P2}{4}$, wie sich aus seiner Lage in zwei Zonen ergiebt, deren jede von einer Rhomboëder- und einer Prismenfläche bestimmt wird (s. S. 332); in derselben Zone, als Abstumpfungen derjenigen Combinationskante $s : m$, welche entweder rechts oder links unter r (nicht unter r') liegt, erscheinen nun die gewöhnlicheren trigonalen Trapezoëder, unter denen das häufigste $x = \varkappa\tau\{6\bar{1}\bar{5}1\} = \frac{4R\frac{3}{2}}{2}$. Da wir r zum positiven primären Rhomboëder gewählt haben, so ist das in Fig. 375 dargestellte $x = \varkappa\tau\{51\bar{6}1\} + \frac{4R\frac{3}{2}}{2}\, r$, das in Fig. 376 $= \varkappa\tau\{6\bar{1}\bar{5}1\} = \frac{4R\frac{3}{2}}{2}\, l$. Ausser

Fig. 375. Fig. 376.

diesen Trapezoëdern finden sich noch andere positive, meist in derselben Zone gelegene (vergl. S. 333), während solche, deren Flächen unter r' liegen, und welche wir daher als negative Trapezoëder zu bezeichnen haben (Hälften der negativen Skalenoëder), ziemlich selten auftreten. In Bezug auf das Zusammenvorkommen der verschiedenen Arten von Formen sind, vorzüglich durch G. Rose (Abhandl. der Berl. Akad. 1844), folgende Gesetzmässigkeiten erkannt worden: es giebt zweierlei Quarzkrystalle: 1) rechte; diese zeigen r, r', verschiedene andere Rhomboëder, m; ferner s nur rechts von r, positive Trapezoëder unter r rechts (s. Fig. 375), daneben seltener und untergeordnet negative Trapezoëder unter r', diese aber links; 2) linke mit r, r', anderen Rhomboëdern und m, wie die vorigen; dagegen s links von r, positive Trapezoëder unter r links (s. Fig. 376), daneben seltener und untergeordnet negative Trapezoëder unter r'. diese aber rechts. Es findet sich demnach an den Krystallen der ersten Klasse neben rechten positiven und linken negativen Trapezoëdern diejenige trigonale Pyramide, welche zu den gemeinschaftlichen Grenzformen jener gehört; an den Krystallen der zweiten Art linke positive und rechte negative Trapezoëder, sowie die andere trigonale Pyramide, welche deren gemeinsame Grenzform für den Fall $\frac{h}{k} = 2$ ist. Diese Verschiedenheit steht nun in gesetzmässigem Zusammenhange mit dem Sinne der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch die Quarzkrystalle; diejenigen der ersten Klasse sind nämlich die rechts drehenden, die der zweiten die links drehenden. Das Gesetz des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und der Circularpolarisation des Quarzes lautet daher, wenn dasjenige Rhomboëder, welches meist grösser und glänzender ist, als das entgegengesetzte, und unter welchem die gewöhnlichen Trapezoëder vorkommen, zum positiven gewählt wird, folgendermaassen:

1) Rechts drehende Krystalle zeigen die trigonale Pyramide s rechts von r, sowie rechte positive und linke negative Trapezoëder;

2) die links drehenden Krystalle zeigen s links von r, sowie linke positive und rechte negative Trapezoëder.

Aus Fig. 375 und 376 ersieht man leicht, dass nach den Nebenaxen, d. i. nach den Verbindungslinien zwischen zwei gegenüberliegenden Prismenkanten, Hemimorphie vorhanden ist, wie S. 371 als nothwendige Folge dieser Tetartoëdrie nachgewiesen wurde. Dem entsprechend zeigt ein Quarzkrystall, wenn er erwärmt oder nach dem Erwärmen abgekühlt wird, polare Pyroëlektricität, wie namentlich Hankel durch eingehende Untersuchungen nachgewiesen hat; die Nebenaxen sind die »elektrischen Axen«, d. h. die beiden gegenüberliegenden Prismenkanten werden entgegengesetzt elektrisch, daher die Krystalle sechs abwechselnd positiv und negativ elektrische Zonen zeigen, welche durch unelektrische Zonen, die über die Mitte der Prismenkanten herablaufen, getrennt werden. Beim Abkühlen werden negativ elektrisch die drei Prismenkanten, an denen s und die

Trapezoëder d. h. diejenigen Formen erscheinen, welche nach dem obigen Gesetze den Sinn der Circularpolarisation zu erkennen gestatten. Hiernach ist man im Stande, auch an einem Krystall, welcher jene Formen nicht zeigt, zu bestimmen, ob er, nach der Basis geschliffen, die Polarisationsebene des Lichtes rechts oder links drehen würde; es gehört dazu nur die Unterscheidung von r und r', welche wegen der grösseren Ausdehnung, anderen Flächenbeschaffenheit u. s. w. des ersteren meist nicht zweifelhaft ist. Untersucht man alsdann den Krystall nach der Kundt'schen Methode (S. 181), und erscheinen dabei die elektrisch negativen Zonen rechts von r, so ist der Krystall rechts drehend, im entgegengesetzten Falle links drehend.

Die Hemimorphie des Quarzes nach den Nebenaxen bedingt eine gegenseitige Unabhängigkeit in der Ausbildung an den beiden Enden dieser Richtungen, aber nicht ein vollständiges gegenseitiges Ausschliessen der an denselben auftretenden Formen; darnach könnten auch an den der Fläche s und den gewöhnlichen Trapezoëdern gegenüberliegenden Ecken trigonale Pyramiden, Trapezoëder etc. auftreten, aber als von jenen unabhängige Formen, also mit anderem Zeichen oder anderer Flächenbeschaffenheit. In der That ist dies der Fall, wenn auch nur ausserordentlich selten. Derartige Krystalle zeigen also Formen, für welche das oben angegebene Gesetz des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und dem Sinne der Drehung gerade das entgegengesetzte wäre. Abgesehen aber von ihrem äusserst seltenen Vorkommen und der leichten Unterscheidbarkeit von den gewöhnlichen Formen mittelst der Oberflächenbeschaffenheit, sind diese Formen als die entgegengesetzten dadurch mit Sicherheit zu bestimmen, dass sie in den beim Abkühlen positiv elektrisch werdenden Zonen am Krystall liegen, während die in den negativen Zonen liegenden es sind, welche den Sinn der Drehung dem angeführten Gesetze gemäss bestimmen. Das ausgezeichnetste Beispiel dieser seltenen Art von Krystallen bilden gewisse Quarze von Carrara, an denen diejenigen Prismenkanten, an welchen die Trapezoëderflächen nicht liegen, durch das trigonale Prisma $\varkappa\tau\{11\bar{2}0\}$ $\frac{\infty P2}{4}$ abgestumpft erscheinen. Von grosser Wichtigkeit ist die elektrische Methode auch für die Erkennung der Zwillingskrystalle des Quarzes, welche besonders nach zwei Gesetzen gebildet vorkommen:

1) Gewöhnliches Gesetz: Zwei gleichartige, d. h. zwei rechtsdrehende oder zwei linksdrehende Krystalle sind mit parallelen Hauptaxen so mit einander verbunden, dass die positiven Rhomboëderflächen des einen parallel den negativen des andern sind. Da das Spiegelbild eines enantiomorphen Krystalls stets einen entgegengesetzten darstellt, so kann ein solcher Zwilling aus zwei gleichartigen Quarzen niemals symmetrisch sein in Bezug auf irgend eine Krystallfläche. Man erhält die relative Stellung der beiden Krystalle, wenn man, von der parallelen ausgehend, den einen um

180° um die Hauptaxe dreht; s. Fig. 377 *a* und *b*, zwei rechtsdrehende Krystalle darstellend, an denen das negative Rhomboëder *r'* durch Punktirung unterschieden ist. Zwei derartige Krystalle verwachsen nun fast immer so mit einander, dass sie sich gegenseitig mit unregelmässigen Grenzen vollständig durchdringen und äusserlich ganz so erscheinen, wie ein einfacher Krystall, Fig. 378, dessen Oberfläche jedoch theilweise dem einen, theilweise dem andern Krystall angehört. Die Zusammensetzung des scheinbar einfachen Krystalls wird durch zweierlei Eigenschaften desselben erkannt: die Flächen der trigonalen Pyramide *s* und des Trapezoëders *x* liegen oft an zwei benachbarten Ecken, während sie an einfachen Krystallen oben (ebenso unten) nur an den abwechselnden vorkommen dürfen; je nach der Art der Durchdringung sind die bezeichneten Flächen in der verschiedensten Zahl und Vertheilung am Krystall vorhanden, es können z. B. oben alle sechs, unten gar keine auftreten u. s. f. Ein zweites Er-

Fig. 377 *a*.

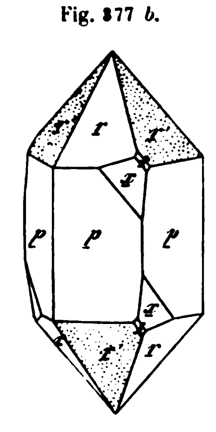


Fig. 377 *b*.

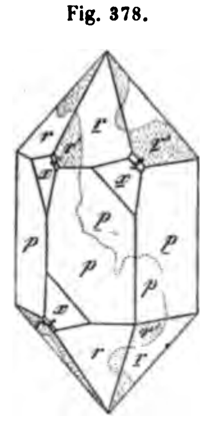


Fig. 378.

kennungsmittel der Verwachsung liegt in der verschiedenen Oberflächenbeschaffenheit der beiden Rhomboëder *r* und *r'*, von welchen gewöhnlich das letztere weniger eben und glänzend, als das erstere, manchmal auch ganz matt ist; hierdurch sind nun bei sehr vielen derartigen Verwachsungen auf den Rhomboëderflächen die Grenzen der beiden Krystalle deutlich zu sehen, da Theile derselben glänzend (*r* des einen), andere matter (*r'* des andern) erscheinen: natürlich muss an den Kanten stets eine glänzende an eine matte Fläche, demselben Krystall angehörig, zusammenstossen. Wenn die Differenz der Beschaffenheit der beiden Flächen so gering ist, dass sie sich der Beobachtung entzieht, und wenn weder trigonale Pyramiden, noch Trapezoëder an einem Krystall auftreten, ist er von einem einfachen nur durch pyroëlektrische Untersuchung desselben zu unterscheiden. Während ein einfacher Krystall regelmässig abwechselnde positive und negative Zonen zeigt, werden durch die Zwillingsstellung offenbar die beiden Enden der Nebenaxen vertauscht; wenn also zwei benachbarte Prismenkanten

nicht demselben Krystall, sondern die eine dem ersten, die andere dem zweiten angehört, so zeigen sie gleiche Elektricität statt verschiedener; geht die Zwillingsgrenze über eine Prismenkante fort, wie in Fig. 378 vorn rechts, so ist an dieser Stelle die elektrische Zone unterbrochen durch den Beginn der entgegengesetzten. Auf diesem Wege erkennt man, dass viele äusserlich einfach erscheinende Quarzkrystalle aus zahlreichen, unregelmässig einander durchdringenden und vielfach mit einander abwechselnden Theilen zweier Krystalle in Zwillingsstellung bestehen.

2) Brasilianisches Gesetz: Zwillingsebene ist eine Fläche des Prisma 2. Ordnung, und nach dieser Fläche sind die beiden Krystalle zu einander symmetrisch, daher immer ein rechter mit einem linken verbunden ist. Auch bei diesem Gesetze sind die beiden Krystalle des Zwillings fast immer so durcheinander gewachsen, dass sie äusserlich wie ein einfacher erscheinen, welcher Symmetrie nach $\{11\bar{2}0\}$ zeigt. Treten, wie es an Krystallen von Brasilien Fig. 379 der Fall ist, die Flächen des Trapezoëders x auf, so müssen diese scheinbar ein Skalenoëder bilden, wenn die Zwillingsgrenzen zugleich der Zwillingsebene entsprechen, d. h. der Krystall aus sechs Sectoren, deren Grenzen senkrecht durch die Mitten der Prismenflächen gehen, drei rechtsdrehenden mit rechten x-Flächen und drei linksdrehenden mit linken x-Flächen, besteht. Da r senkrecht zur Zwillingsebene, so ist die zu r symmetrische Fläche des zweiten Krystalls ebenfalls r, daher die positiven Rhomboëderflächen beider Krystalle zusammenfallen, ebenso die negativen. Erwärmt man einen Krystall von der Ausbildung der Fig. 379 und lässt ihn dann abkühlen, so müssen sämmtliche sechs Prismenkanten negativ elektrisch werden, weil diejenigen Enden der Nebenaxen, welche die Trapezflächen tragen, nach aussen gekehrt sind. Ist das Umgekehrte der Fall, besteht ein derartiger Zwilling aus sechs Sectoren, deren jeder die entgegengesetzte Seite der Nebenaxe nach aussen kehrt, so zeigt er gar keine Trapezoëderflächen und muss, da auch die r-Flächen beider Krystalle zusammenfallen, vollkommen wie ein normaler einfacher Krystall erscheinen; von einem solchen ist er aber leicht zu unterscheiden durch sein pyroëlektrisches Verhalten, denn nunmehr muss beim Erkalten an allen sechs Prismenkanten positive Elektricität auftreten. Ebenso wie durch elektrische Untersuchung lassen sich diese Krystalle als Zwillinge natürlich auch erkennen durch Prüfung ihrer optischen Eigenschaften. Diese zeigt, dass sie aus rechts- und linksdrehenden Partien zusammengesetzt sind, und dass in einem Zwilling von der Form Fig. 379 die rechtsdrehenden Theile sich da befinden, wo äusserlich das rechte Trapezoëder x auftritt, die linksdrehenden am linken x. Da, wo die Grenzen horizontal verlaufen, zeigt eine basische Platte im polarisirten Lichte die Airy'schen

Fig. 379.

Spiralen (S. 88). An Krystallen ohne Trapezoëderflächen ist sehr häufig die Art der Durchwachsung eine weit innigere, indem dieselben aus abwechselnden Schichten von Rechts- und Linksquarz bestehen; sind diese zahlreich und dünn, so zeigt eine Platte eines derartigen Krystalls das gewöhnliche schwarze Kreuz der nicht drehenden einaxigen Krystalle. Charakteristisch ist diese Erscheinung für den violett gefärbten Quarz, den sogenannten Amethyst (über die complicirten Doppelzwillinge beider Gesetze, welche beim brasilianischen Amethyst vorkommen, s. Groth, Zeitschr. f. Kryst. 1, 297). — Ueber die elektrischen Eigenschaften des Quarzes s. besonders B. von Kolenko, Zeitschr. f. Kryst. 9, 1.

Die Aetzfiguren, welche man auf den Krystallflächen des Quarzes mittelst Flusssäure erhält, gestatten eine sichere Unterscheidung der beiden Rhomboëder, sowie der rechts- und linksdrehenden Krystalle von einander. Auf r erscheinen horizontal verlängerte Vertiefungen, auf r' schief verlängerte, und zwar geht deren Längsrichtung bei den rechtsdrehenden Krystallen, wenn man eine obere r'-Fläche betrachtet, von links oben nach rechts unten, bei den linksdrehenden umgekehrt. Ausserdem entstehen an Krystallen, welche keine Trapezoëder- oder s-Flächen zeigen, solche durch die Aetzung und zwar an den Kanten rechts von r, wenn der Krystall rechtsdrehend ist, links von r im entgegengesetzten Falle (Leydolt, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. d. Wiss. 1855, 15, 59).

Die Drehung des Quarzes beträgt für 1 mm Dicke nach den Messungen von Soret und Sarasin:

für die Linie	A	= 12°,65
- - -	B	= 15,75
- - -	C	= 17,31
- - -	D	= 21,70
- - -	E	= 27,54
- - -	F	= 32,76
- - -	G	= 42,59

(für die äusserste ultraviolette Linie 26 im Cadmiumspectrum: 235°,97.)
Der Quarz ist optisch positiv und besitzt eine sehr schwache Doppelbrechung; die Brechungsexponenten des ordentlichen und ausserordentlichen Strahls sind für dieselben Linien (nach Rudberg):

	ω	ε
A	1,53913	1,54805 *)
B	1,54090	1,54990
C	1,54181	1,55085
D	1,54418	1,55328
E	1,54711	1,55631
F	1,54965	1,55894
G	1,55425	1,56365.

*) Für diese Linie, welche Rudberg nicht beobachtete, sind die von v. d. Willigen gefundenen Werthe eingesetzt. Für die übrigen Linien stimmen die Zahlen beider

Ueberjodsaures Natrium $= NaJO^4 + 3H^2O$. $a : c = 1 : 1,094$. Die Krystalle dieses Salzes, dessen Circularpolarisation von Ulrich entdeckt wurde, besitzen ausser der durch die Tetartoëdrie bedingten Hemimorphie nach den Nebenaxen noch eine solche nach der Hauptaxe; sie zeigen an einem Ende nur die Basis, daher in Fig. 380 nur das andere, in der Richtung der Hauptaxe gesehen, abgebildet ist; hier herrscht das Rhomboëder $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}$ R vor, dessen Polkanten (deren Winkel 85° 32′) abgestumpft durch $r/_2 = \varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$, und zu welchem noch $2r = \varkappa\{02\bar{2}1\} - 2R$ hinzutritt; von den Combinationskanten von r und $r/_2$ sind die abwechselnden drei abgestumpft durch ein Trapezoëder, welches bei der obigen Wahl des positiven Rhomboëders die Hälfte eines negativen Skalenoëders, und zwar

Fig. 380.

$$z = \varkappa\tau\{\bar{1}5\bar{4}9\} = -\frac{\frac{1}{3}R3}{2}\,r$$

darstellt; Krystalle dieser Art sind links drehend. Sind dagegen die drei anderen jener Kanten abgestumpft, d. h. tritt das linke Trapezoëder:

$$\varkappa\tau\{14\bar{5}9\} = -\frac{\frac{1}{3}R3}{2}\,l$$

auf, so sind die Krystalle rechts drehend. Die durch das Vorherrschen von r naturgemäss erscheinende Wahl desselben als positiven Rhomboëders giebt also hier dieselbe Beziehung, wie beim Quarz, nämlich: 1) Rechts drehende Krystalle zeigen linke negative Trapezoëder; 2) links drehende zeigen rechte negative Trapezoëder. Solche Trapezoëder, welche bei dieser Stellung positiv wären (beim Quarz die gewöhnlichen), kommen nicht vor. — Zwillinge nach {0001}, je ein rechts- und ein linksdrehender Krystall mit den rhomboëdrischen Enden der Hauptaxe aneinander gewachsen.

Das überjodsaure Natrium ist optisch positiv und besitzt ziemlich schwache Doppelbrechung. Die Drehung der Polarisationsebene ist stärker, als beim Quarz, und beträgt:

Linie	C	19°,4
-	D	23,3
-	E	28,5
-	F	34,2
-	G	47,1

(Groth, Berl. Akad. Mon. Ber. 1869. Poggendorff's Ann. d. Phys. 137. Bd.).

Unterschwefelsaures Kalium $= K^2S^2O^6$. $a : c = 1 : 0,6467$

Beobachter bis auf einige Einheiten der 5. Decimale überein. Für die oben erwähnte ultraviolette Cadmiumlinie 26 fand Sarasin: $\omega = 1,63040$, $\varepsilon = 1,64268$; für die Strahlen grösster beobachteter Brechbarkeit (Aluminium 32): $\omega = 1,67500$, $\varepsilon = 1,68910$. Die Doppelbrechung nimmt also mit der Brechbarkeit der Strahlen zu.

Weiss. $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ und $\varkappa\{01\bar{1}1\}-R$ gleich gross, $\{10\bar{1}0\}\infty R$, seltener $\varkappa\tau\{11\bar{2}0\}\ \frac{\infty P2}{4}$. Doppelbrechung +. Drehung:

Linie $C = 6^\circ,2$
- $D = 8,4$
- $E = 10,5$
- $F = 12,3$

(Pape, Poggend. Ann. d. Phys. 139. Bd. 225 f.).

Unterschwefelsaures Blei $= PbS^2O^6 + 4H^2O$. $a:c = 1:1,5160$ Brezina. Combination von $\{0001\}\ oR$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $\varkappa\{01\bar{1}1\}-R$, von denen das vorherrschende zum positiven genommen ist; gewöhnlich nur diese Formen; selten treten hierzu die trigonalen Pyramiden $\varkappa\tau\{11\bar{2}3\}\ \frac{\frac{2}{3}P2}{4}$ und $\varkappa\tau\{11\bar{2}1\}\ \frac{2P2}{4}$, sowie das Prisma $\varkappa\tau\{11\bar{2}0\}\ \frac{\infty P2}{4}$, und zwar: an rechts drehenden Krystallen links von R, an links drehenden rechts davon gelegen. Březina (Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 64. I, 1871) beobachtete ausserdem die Pyramide $\{11\bar{2}2\}$ und zwar anscheinend holoëdrisch, d. h. an benachbarten Ecken. — Zwillinge nach $\{0001\}$.

Die Krystalle sind optisch positiv, schwach doppeltbrechend und zeigen folgende Drehung:

Linie $C = 4^\circ,1$
- $D = 5,5$
- $E = 7,2$
- $F = 8,9$

(Pape, Poggend. Ann. d. Phys. 139. Bd. 225 f.).

Unterschwefelsaures Calcium $= CaS^2O^6 + 4H^2O$. Axenverhältniss dem vorigen sehr ähnlich (isomorph)*). Doppelbrechung —, Drehung $2^\circ 1$ für Grün (Pape, l. c.).

Unterschwefelsaures Strontium $= SrS^2O^6 + 4H^2O$. $a:c = 1:1,5024$ Heeren. $\{0001\}\ oR$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ und $\varkappa\{01\bar{1}1\}-R$ in ungefähr gleicher Grösse. Doppelbrechung —. Drehung für Gelb mindestens $3^\circ,4$ (die Krystalle enthalten nach Bodländer, s. Zeitschr. f. Kryst. 9, 309, stets entgegengesetzt drehende Partien und ergeben daher sehr verschiedene Werthe der Drehung; die angegebene Zahl ist die höchste von dem genannten Beobachter gefundene, welche aber möglicher Weise noch zu niedrig ist, da die untersuchte Platte ebenfalls noch umgekehrt drehende Theile enthalten haben kann.

*) Es muss bemerkt werden, dass bei diesem und dem folgenden Salze von Baumhauer Aetzfiguren beobachtet wurden, welche von Skalenoëderflächen gebildet waren, also insofern nicht mit der trapezoëdrischen Tetartoëdrie im Einklang stehen, als beim Quarz die rechten und linken Hälften der Skalenoëder einander auch in den Aetzfiguren ausschliessen.

Benzil = $C^{14}H^{10}O^{2}$. $a : c = 1 : 1,6288$ Des Cloizeaux. Vorherrschend $\{10\bar{1}0\}\infty R$, an den Enden $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ (Polkanten 99° 46′) oder: $\{0001\}oR$, untergeordnet: $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $\varkappa\{01\bar{1}1\} - R$, $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$. Drehung 25°,0 für Natriumlinie. Doppelbrechung +; Brechungsexponenten:

$$\omega = 1,6588. \quad \varepsilon = 1,6784$$

für die Linie D. (Des Cloizeaux, Compt. rend. de l'Acad. 68. Bd. 310. 1869.)

Matico-Stearopten = $C^{10}H^{16}O$. $a : c = 1 : 0,3160$ Hintze. Gewöhnlich nur $\{10\bar{1}0\}\infty R$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, seltener die trigonale Pyramide $\varkappa\tau\{22\bar{4}1\}\frac{4P2}{4}r$ und das Trapezoëder $\varkappa\tau\{32\bar{5}1\}\frac{R5}{2}r$ (an rechts drehenden Krystallen). Doppelbrechung schwach und negativ. Brechungsexponenten:

	ω	ε
Lithiumlinie	1,5415	1,5404
Natriumlinie	1,5447	1,5436
Thalliumlinie	1,5488	1,5478.

Für dieselben drei homogenen Farben beträgt die Drehung;

$Li = 1° 41'$
$Na = 2 \quad 4$
$Tl = 2 \quad 28$

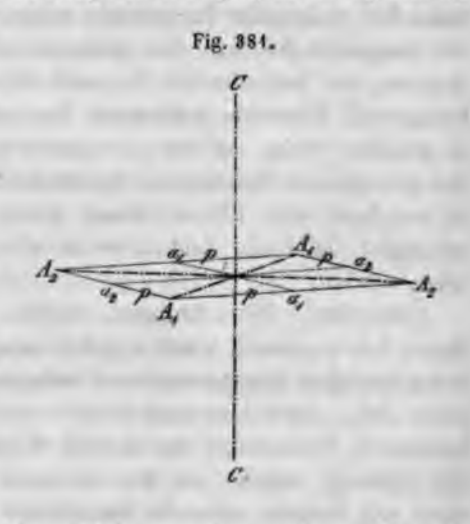
(Hintze, Tschermak's mineralog. Mitth. 1874, 227).

III. Das tetragonale*) Krystallsystem.

§. 80. **Grundform, Ableitung und Bezeichnung der tetragonalen Formen.** Das tetragonale System ist die Gesammtheit aller Formen, welche ausser einer Haupt-Symmetrieebene noch vier andere, senkrecht dazu und einander unter 45° durchschneidend, besitzen. Für die krystallographische Betrachtung werden die Formen, ebenso wie die hexagonalen, stets so gestellt, dass die Haupt-Symmetrieebene horizontal, die Hauptaxe folglich vertical steht. Die tetragonalen Krystallgestalten sind derart beschaffen, dass sie nach einer Drehung von 90° um die Hauptaxe sich selbst wieder genau congruent sind. Seien in Fig. 381 die Geraden A_1, a_1, A_2, a_2 die Durchschnitte der vier Symmetrieebenen mit der Haupt-Symmetrieebene, so heisst jener Satz: die Richtungen A_1 und A_2 können beliebig mit einander vertauscht werden, ebenso a_1 und a_2, ohne die Formen zu ändern. Es sind demnach A_1 und A_2 gleichwerthige Richtungen, ebenso a_1 und a_2.

Es wird daher eine Form zu den krystallonomisch möglichen gehören, deren Flächen je zwei dieser gleichwerthigen Richtungen in gleichem Abstande vom Mittelpunkte durchschneiden, deren Durchschnitte mit der Haupt-Symmetrieebene also die Geraden p Fig. 381 sind. Es wird sich der Einfachheit wegen empfehlen, eine solche Form zur Grundform, und zu Axenebenen die Haupt-Symmetrieebene und zwei einander unter 90° schneidende Symmetrieebenen, also zu Axen die Hauptaxe und entweder die beiden Linien A oder die beiden a, zu wählen. Nehmen wir zu diesem Zwecke A_1, A_2**) und die Hauptaxe, und nennen wir die ersteren die beiden

Fig. 381.

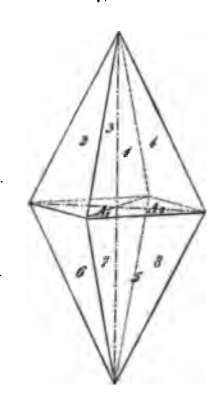


*) Vielfach ist auch der Name »quadratisches System« im Gebrauch.

**) Die Formen sollen stets so gestellt werden, dass A_1 horizontal auf den Beobachter zu, A_2 horizontal quer, und die Hauptaxe vertical läuft.

Nebenaxen, so durchschneidet die Fläche 1 (s. Fig. 382) der Grundform, welche in dem Oktanten des Raumes, zwischen A_1 und A_2 oberhalb, liegt, die beiden Nebenaxen in gleichem Abstande, die Hauptaxe in einer vorläufig noch unbekannten Entfernung. Da diejenige Ebene, welche die Haupt-Symmetrieebene in A_1 vertical schneidet (kurz: die Ebene A_1), eine Symmetrieebene ist, so muss jene Grundform ausser dieser ersten Fläche noch eine zweite 2 besitzen, welche zu jener in Bezug auf A_1 symmetrisch liegt; da die verticale Ebene durch A_2 ebenfalls eine Symmetrieebene der vollständigen Form ist, so müssen zu derselben noch zwei Flächen 3 und 4 gehören, welche in Bezug auf A_2 symmetrisch zu 1 und 2 liegen; endlich müssen noch, symmetrisch in Bezug auf die Haupt-Symmetrieebene zu den genannten, vier untere Flächen 5, 6, 7, 8 vorhanden sein. Die vollständige einfache Krystallform besitzt also 8 Flächen, es ist eine tetragonale Pyramide, Fig. 382, deren sämmtliche Flächen gleiche Neigung gegen die Hauptaxe besitzen.

Fig. 382.



Da die tetragonale Pyramide ebenso, wie die hexagonale, einem einaxigen Krystall angehört, so muss die Neigung ihrer Flächen gegen die Hauptaxe in gleicher Weise mit der Temperatur veränderlich sein, d. h. die Pyramide muss bei steigender Temperatur spitzer oder stumpfer werden, je nachdem die Hauptaxe die Axe der grössten oder der kleinsten thermischen Ausdehnung des betreffenden Krystalls ist. Wenn wir die S. 314 u. f. für die hexagonale Pyramide gebrauchte Bezeichnung des Parameters der Hauptaxe in gleicher Weise auf die tetragonale Form anwenden, so ergiebt sich aus der gemessenen Neigung der Pyramidenflächen zur Hauptaxe das Verhältniss, in welchem eine Fläche dieser Form die Haupt- und eine Nebenaxe schneidet, oder die Zahl c, wenn die Parameter der Nebenaxen $= 1$ gesetzt werden.

Dieselben Betrachtungen, welche S. 314—315 über die Bedeutung dieser Zahl angestellt wurden, gelten wegen der physikalischen Uebereinstimmung zwischen hexagonalen und tetragonalen Krystallen auch für letztere, es muss also c auch hier eine irrationale Zahl sein. Ist dieselbe für eine bestimmte Temperatur durch eine Winkelmessung bestimmt, so sind damit alle Formen, welche an dem Krystall überhaupt möglich sind, gegeben, denn wir kennen nunmehr sämmtliche Elemente (Axenwinkel: 90^0, 90^0, 90^0; Parameterverhältniss der Grundform: $1 : 1 : c$), es sind demnach nur solche Formen krystallonomisch möglich, deren Indices rationale Zahlen sind.

Nachdem für die tetragonalen Formen die Haupt-Symmetrieebene und zwei gleichwerthige Symmetrieebenen als Axenebenen, eine tetragonale Pyramide als Grundform gewählt worden sind, kann zur Bezeichnung der

Formen durch die Indices übergegangen werden. Die 8 Flächen der Grundform Fig. 382 haben offenbar sämmtlich gleiche Indices, nämlich

$$(1\,1\,1)\quad(1\,\bar{1}\,1)\quad(\bar{1}\,\bar{1}\,1)\quad(\bar{1}\,1\,1)$$
$$(1\,1\,\bar{1})\quad(1\,\bar{1}\,\bar{1})\quad(\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1})\quad(\bar{1}\,1\,\bar{1}).$$

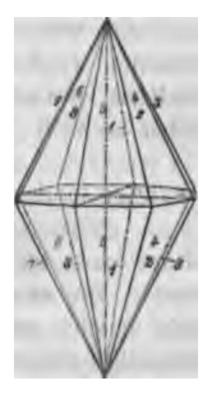
Diese 8 Symbole sind aber zugleich alle möglichen, aus denselben Indices zusammengesetzten; es stellt also auch in diesem System die Gesammtheit aller möglicher Flächen mit denselben Indices eine einfache Krystallform von tetragonaler Symmetrie dar.

Der allgemeinste Ausdruck für eine beliebige Fläche des tetragonalen Krystallsystems ist das Symbol (hkl); die bereits betrachtete tetragonale Grundform bildet davon den speciellen Fall $h = k = l = 1$. In dem allgemeinen Symbol (hkl) beziehen sich h und k auf die beiden gleichwerthigen Nebenaxen, beide Werthe sind also beliebig vertauschbar, nicht so die dritte Zahl l, welche sich auf die Hauptaxe bezieht. Daraus ergeben sich folgende 16 Flächen mit den Indices h, k, l als möglich:

$$(h\,k\,l)\quad(k\,h\,l)\quad(\bar{k}\,h\,l)\quad(\bar{h}\,k\,l)$$
$$(\bar{h}\,\bar{k}\,l)\quad(\bar{k}\,\bar{h}\,l)\quad(k\,\bar{h}\,l)\quad(h\,\bar{k}\,l)$$
$$(h\,k\,\bar{l})\quad(k\,h\,\bar{l})\quad(\bar{k}\,h\,\bar{l})\quad(\bar{h}\,k\,\bar{l})$$
$$(\bar{h}\,\bar{k}\,\bar{l})\quad(\bar{k}\,\bar{h}\,\bar{l})\quad(k\,\bar{h}\,\bar{l})\quad(h\,\bar{k}\,\bar{l})$$

In Fig. 383 sind diese sämmtlichen Flächen für den speciellen Fall $\{313\}$, bezogen auf die Grundform Fig. 382, in gleicher Centraldistanz gezeichnet und bilden, wie man sieht, eine geschlossene Form, welche das vollkommene Analogon der auf gleiche Art entwickelten dihexagonalen Pyramide des vorigen Systems darstellt, demnach ditetragonale Pyramide zu benennen ist. Diese Gestalt bildet den allgemeinsten Repräsentanten der tetragonalen Formen, aus welchem alle übrigen als specielle Fälle (dadurch, dass die Indices besondere Werthe, z. B. 0 oder 1, annehmen) sich ableiten. Setzen wir etwa $h = k$, so liefert selbstverständlich die Vertauschung von h und k keine neue Fläche; es befindet sich also in jedem Oktanten des Raumes nur eine mögliche Fläche, statt deren zwei, wie im allgemeinen Fall. Diese eine durchschneidet die beiden Nebenaxen in gleichem Abstande, sie bildet also mit den 7 anderen zugehörigen eine tetragonale Pyramide, in dem besonderen Falle, dass $h = k = l$, die zur Grundform gewählte Pyramide. Setzt man einen der beiden Indices h oder $k = 0$, so liefern die Symbole zweier benachbarter Flächen, z. B.

Fig. 383.

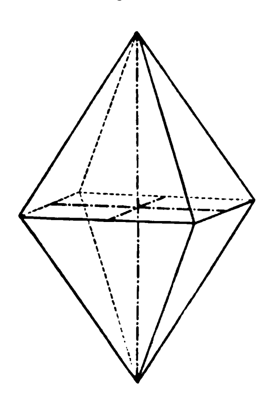


$$(h\,0\,l)\ \text{und}\ (h\,\bar{0}\,l)$$

nur eine einzige Fläche, weil $0 = -0$, und ebenso alle folgenden gleichartig benachbarten Flächenpaare der ditetragonalen Pyramide; es giebt also nur 8 Flächen mit den Indices h, 0, l, deren jede einer Nebenaxe parallel

ist und welche daher eine tetragonale Pyramide bilden, die sich durch ihre Stellung von den zuerst besprochenen, z. B. von der Grundform, unterscheidet, s. Fig. 384. Ihr horizontaler Querschnitt ist ebenfalls ein Quadrat, dessen Seiten indess den Nebenaxen parallel sind, welches also gegen die Querschnittsfigur der ersten Art von Pyramiden um 45° gedreht erscheint. Diese beiden Arten von Pyramiden unterscheidet man ebenso, wie im hexagonalen System, als solche erster und zweiter Ordnung. Zu den so resultirenden drei Arten von Formen, den ditetragonalen Pyramiden, den tetragonalen Pyramiden erster und denen zweiter Ordnung, erhalten wir nun noch drei weitere, wenn wir den Index der Hauptaxe $l = 0$ setzen. Diese Formen gehen also der Hauptaxe parallel. Endlich giebt es nur noch einen speciellen Fall, nämlich den, dass $h = k = 0$; dies liefert eine Fläche, welche beiden Nebenaxen parallel ist.

Fig. 384.



Es giebt also auch in diesem System sieben verschiedene Arten von Formen, welche genau den sieben Arten im hexagonalen System entsprechen.

Um zu der Naumann'schen Bezeichnung zu gelangen, welche auf dem Verhältniss der Parameter (als Vielfachem des Parameterverhältnisses der Grundform) beruht, denken wir uns diese aufgetragen auf die beiden gleichwerthigen Nebenaxen a und auf die Hauptaxe c. Der allgemeinste Fall ist dann offenbar, dass die Nebenaxen in verschiedenen Abständen, welche sich wie $n : 1$ verhalten (wobei n eine rationale Zahl, nämlich $h : k$), geschnitten werden, und dass die Hauptaxe den $m$fachen Parameter der Grundform besitzt (m selbstverständlich ebenfalls rational, denn es ist offenbar $= h : l$). Alsdann ist das Parameterverhältniss einer solchen Fläche

$$= a : na : mc,$$

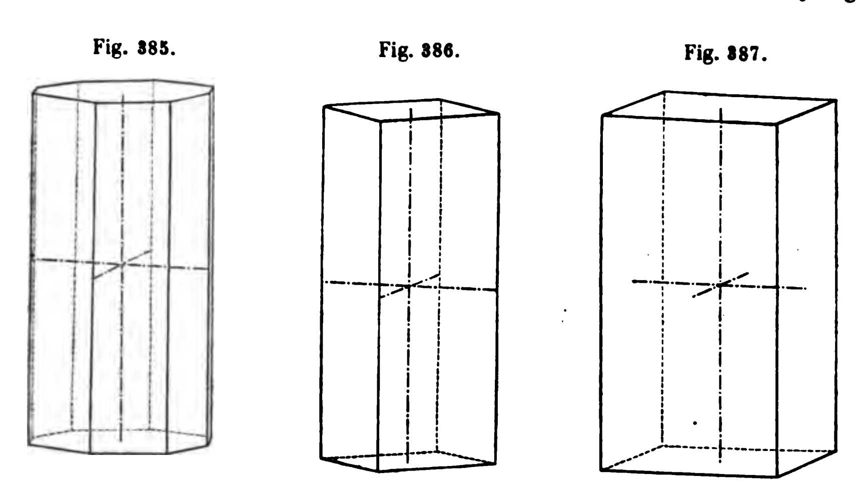
zu welcher in demselben Oktanten noch eine zweite Fläche

$$= na : a : mc$$

gehören muss, welche durch Vertauschung der gleichwerthigen Nebenaxen entsteht. Die analogen Flächenpaare müssen wegen der tetragonalen Symmetrie in allen anderen sieben Oktanten auftreten, und so entsteht: 1) die vollständige ditetragonale Pyramide (Fig. 383) als Gesammtheit aller möglicher Flächen mit dem Parameterverhältniss $a : na : mc$. 2) Setzen wir $n = 1$, also die Nebenaxen gleich, so kann in jedem Oktanten nur eine Fläche existiren, da die Vertauschung der beiden Nebenaxen nun keine neue Fläche mehr liefert; es resultirt eine tetragonale Pyramide erster Ordnung. 3) Lassen wir n den speciellen Werth ∞ annehmen, so durchschneidet die Fläche $a : \infty a : mc$ die Haupt-Symmetrieebene in einer Geraden, welche offenbar der einen Nebenaxe parallel ist; diese Fläche fällt

also zusammen mit der benachbarten, welche das Parameterverhältniss $a : - \infty a : mc$ besitzt, d.h. für diesen speciellen Fall haben je zwei benachbarte Flächen der ditetragonalen Pyramide Fig. 383, wie 2 mit 3, 8 mit 1 u. s. f. dieselbe Lage im Raum; also ist die entstehende Pyramide nur eine tetragonale, unterscheidet sich aber von der vorigen durch ihre Stellung und heisst Pyramide zweiter Ordnung. 4) Die Hauptaxe kann unendlich gross werden, d. h. $m = \infty$, während die Nebenaxen verschieden sind; dann resultiren acht der Hauptaxe parallele Flächen, das ditetragonale Prisma (Fig. 385) mit dem Parameterverhältniss $a : n a : \infty c$. 5) Das Gleiche kann der Fall sein bei gleichen Nebenaxen, dann liefert das Parameterverhältniss $a : a : \infty c$ nur vier, der Hauptaxe parallele Flächen, deren Durchschnitt durch die Haupt-Symmetrieebene zusammenfällt mit demjenigen

Fig. 385. Fig. 386. Fig. 387.



der tetragonalen Pyramide erster Ordnung mit derselben Fläche. Diese Form ist das tetragonale Prisma erster Ordnung, Fig. 386. 6) Es können bei unendlich grosser Hauptaxe die Nebenaxen im Verhältniss $1 : \infty$ stehen; dann ergeben sich ebenfalls vier der Hauptaxe parallele Flächen, welche aber die Nebenaxen nicht in gleichem Abstande schneiden, sondern paarweise der einen derselben parallel sind, daher ihre Durchschnittsfigur mit der Hauptsymmetrie gleich ist derjenigen der Pyramide zweiter Ordnung. Das Prisma mit dem Parameterverhältniss $a : \infty a : \infty c$ wird deshalb Prisma zweiter Ordnung, Fig. 387, genannt. 7) Endlich kann der Coëfficient beider Nebenaxen $= \infty$ werden; das Axenverhältniss $\infty a : \infty a : c$ liefert nur ein Paar paralleler Flächen, die Basis genannt, welche zugleich der Haupt-Symmetrieebene parallel ist, während die Flächen der beiden tetragonalen Prismen den vier dazu senkrechten Symmetrieebenen entsprechen. So giebt uns die Herleitung der möglichen Arten von Formen mit tetragonaler Symmetrie aus den Parameterverhältnissen ebenso sieben Arten, wie es die Ableitung aus den Indices gethan hat.

Da die beiden gleichwerthigen Nebenaxen sich zu einander ganz ebenso verhalten, wie die beiden, deren Winkel halbirenden Symmetrieaxen, die sogen. Zwischenaxen, wir also S. 391 ebenso gut die Richtungen a_1 und a_2 (statt A_1 und A_2) hätten zu Nebenaxen nehmen können, so folgt, dass man die beiden Klassen von tetragonalen Pyramiden, die erste und zweite Ordnung, beliebig mit einander vertauschen, also auch eine Pyramide zweiter Ordnung zur Grundform wählen kann; alsdann werden selbstverständlich alle Pyramiden, sowie das Prisma derselben Ordnung zu solchen erster, die bisherigen Pyramiden und das Prisma erster Ordnung nunmehr zweiter.

Genau dieselben Betrachtungen, welche wir im §. 66 anstellten, können wir hier, auf die tetragonalen Formen angewendet, wiederholen. Wir beobachten in gleicher Weise an einem oder an verschiedenen Krystallen einer tetragonal krystallisirenden Substanz verschiedene Pyramiden gleicher Ordnung, welche aber, wenn wir sie auf gleich lange Nebenaxen reduciren, in einfachem rationalem Verhältniss der Hauptaxen zu einander stehen. Von diesen können wir eine beliebig zur primären Pyramide wählen, welche entweder durch Häufigkeit, durch vorherrschendes Auftreten, durch Spaltbarkeit, oder dadurch, dass sie besonders einfache Coëfficienten der abgeleiteten Pyramiden liefert, ausgezeichnet ist. Da diese Wahl eine conventionelle ist, so findet sich auch hier oft für eine und dieselbe Substanz das aus den Winkeln der Grundform berechnete Axenverhältniss $1 : c$ bei verschiedenen Autoren verschieden angegeben, wobei aber die Zahlen c derselben in einfachem rationalem Verhältniss stehen, ausser, wenn der Eine diejenige Reihe von Pyramiden als solche erster Ordnung bezeichnet hat, welche ein Anderer zur zweiten Ordnung wählte. In diesem Falle verhalten sich die Werthe von c bei beiden Autoren wie $1 : \sqrt{2}$*) oder wie ein rationales Vielfaches dieser Zahl.

Haben wir uns einmal für eine bestimmte Wahl der Grundform entschieden und deren Axenverhältniss bestimmt, so sind nunmehr durch die Kantenwinkel aller übriger tetragonaler Pyramiden desselben Körpers deren absolute Ableitungszahlen m, d. h. ihr Axenverhältniss $a : a : mc$, gegeben. Dasselbe ist alsdann auch der Fall mit den Ableitungscoëfficienten aller übriger Formen derselben Krystallreihe, z. B. den etwa noch vorkommenden ditetragonalen Pyramiden $a : na : mc$. Da es sich hierbei um die Bestimmung zweier, von einander unabhängiger Grössen, der Werthe von m und n handelt, müssen zwei von einander verschiedene Winkel gemessen werden.

Dass hier ebenso wenig, wie im hexagonalen Systeme, das Axenverhältniss eines Körpers bestimmt werden kann, wenn die Krystalle desselben nur prismatische Formen (tetragonale und ditetragonale Prismen) zeigen,

---

*) Bei einer tetragonalen Pyramide ist das Verhältniss einer Zwischenaxe zur Nebenaxe $= 1 : \sqrt{2}$, wie aus Fig. 381 unmittelbar ersichtlich.

dass vielmehr sowohl das tetragonale Prisma erster, als das zweiter Ordnung, sowie die verschiedenen ditetragonalen Prismen, für alle tetragonal krystallisirenden Körper identisch sind, bedarf kaum der Erwähnung.

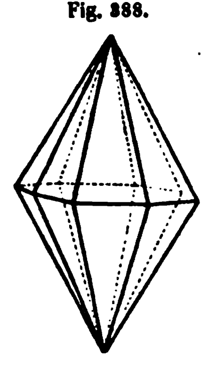
Haben wir dagegen vermittelst einer tetragonalen oder ditetragonalen Pyramide das Axenverhältniss $1 : c$ einer Substanz bestimmt, so ist damit nach dem Gesetz der Rationalität der Indices die Gesammtheit aller übriger möglicher Formen, d. h. die Krystallreihe der Substanz gegeben, in welche nach der Definition dieses Wortes nur diejenigen Formen gehören, die sich von der Grundform durch rationale Zahlen ableiten.

Was die Krystallreihen chemisch verschiedener Körper betrifft, so gelten für dieselben wörtlich die S. 322 über die hexagonalen Krystalle angestellten Betrachtungen, die uns zu dem nothwendigen Schlusse führen, dass dieselben in keiner bestimmten Beziehung zu einander stehen, und dass ebenso viele, scharf von einander durch Irrationalität ihres Verhältnisses getrennte Krystallreihen im tetragonalen System existiren, als es tetragonal krystallisirende Substanzen giebt.

Im Folgenden werden nun die Formen einer beliebigen tetragonal-holoëdrischen Krystallreihe und die Art ihrer Combinationen beschrieben, und alles hier Gesagte gilt natürlich für jede andere Krystallreihe desselben Systems, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann die Winkel der pyramidalen Gestalten andere, das Axenverhältniss der Grundform ein anderes ist.

§. 81. **Beschreibung der holoëdrischen tetragonalen Formen und ihrer Combinationen.** 1) Die ditetragonalen Pyramiden $\{hkl\}$, Fig. 388, durchschneiden die Axen in dem Verhältniss $a : na : mc$, also ist das, genau ebenso wie bei den dihexagonalen Pyramiden gebildete, Naumann'sche Zeichen $= mPn$.

Fig. 388.



Die ditetragonale Pyramide besitzt dreierlei Kanten, nämlich acht Basiskanten und je acht stumpfere und schärfere, mit einander abwechselnde Polkanten. Eine derartige Pyramide, aber mit 16 genau gleichen Polkanten ist krystallonomisch unmöglich, weil bei derselben die Ableitungszahl $h : k = n$ gleich tang $67\frac{1}{2}^0 = 2.4142\ldots$, also eine irrationale Zahl sein würde. Ist die Zahl n kleiner, als 2,4142, z.B. 2, so sind diejenigen Polkanten die stumpferen, welche vom Pol der Hauptaxe nach denen der Zwischenaxen herablaufen; in diesem Falle ähnelt die Pyramide um so mehr einer tetragonalen erster Ordnung, je weniger h von k verschieden ist; in dem Grenzfall, dass $h = k$, d.h. n seinen kleinsten Werth 1 annimmt, ist der Winkel der bezeichneten Polkanten $= 0$, d.h. je zwei in einer solchen Polkante an einander stossende Flächen, also die Flächen eines Oktanten, fallen in eine Ebene; es resultirt eine tetragonale Pyramide erster

Ordnung als untere Grenzgestalt jener Reihe von ditetragonalen. Ist dagegen n grösser, als 2,4142, z. B. 3, so sind die nach den Nebenaxen herablaufenden Polkanten die stumpferen, und zwar um so stumpfwinkeliger, je grösser $h : k$ ist. Für den Grenzfall $k = 0$, d. i. $n = \infty$, sind die Basiskanten der Pyramide den Nebenaxen parallel, also werden die oben bezeichneten Polkantenwinkel Null, d. h. zwei an solchen zusammenstossende, benachbarten Oktanten angehörige Flächen fallen in eine Ebene, es entsteht eine tetragonale Pyramide zweiter Ordnung als zweite Grenzgestalt derselben Reihe von ditetragonalen Pyramiden. Die sämmtlichen möglichen ditetragonalen Pyramiden, welche gleiche Ableitungszahl m, aber verschiedene n besitzen, bilden also eine Reihe, deren Endglieder einerseits die tetragonale Pyramide erster Ordnung, andererseits diejenige zweiter Ordnung, mit demselben m, sind. Da die Flächen aller Glieder dieser Reihe, ebenso wie die der beiden Grenzformen, die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss, $mc : 1$, schneiden, so müssen die einander entsprechenden Flächen sämmtlich derselben Geraden, welche jene beiden Axen in dem bezeichneten Verhältniss schneidet, parallel sein, also in einer Zone liegen, d. h. die Flächen der ditetragonalen Pyramiden liegen, mit parallelen Combinationskanten, zwischen je einer Fläche derjenigen tetragonalen Pyramide erster Ordnung und derjenigen zweiter Ordnung, mit welchen beiden sie gleiche Ableitungszahl m haben. Wenn zwei solcher ditetragonaler Pyramiden mit einander combinirt erscheinen, so schärft die eine die Polkanten der anderen zu.

Zwei ditetragonale Pyramiden mit gleichem n, aber verschiedenem m, treten so in Combination, dass die flachere als 8-flächige Zuspitzung der 4 + 4-kantigen Polecken der anderen erscheint, und die Combinationskanten beider horizontal laufen (vergl. die entsprechende hexagonale Combination S. 324).

Die ditetragonale Pyramide stellt, ebenso wie im hexagonalen System die dihexagonale, den allgemeinsten Fall einer tetragonalen Krystallgestalt dar, ist also der allgemeine Repräsentant aller anderen, welche gleichsam nur specielle Fälle desselben bilden.

2) Die tetragonale Pyramide erster Ordnung ist derjenige specielle Fall der ditetragonalen, in welchem $h = k$, n demnach den Werth 1 hat. Dieselbe ist also zu bezeichnen durch

$$\{h\,h\,l\} = mP.$$

Unter den verschiedenen Pyramiden einer Krystallreihe wird nach bereits bekannten Grundsätzen eine zur primären gewählt, diese erhält die Zeichen

$$\{1\,1\,1\} = P.$$

Alle abgeleiteten Pyramiden, welche stumpfer sind als diese, haben Symbole, in welchen l grösser als h, während das m des Naumann'schen Zeichens ein echter Bruch ist. Bei den spitzeren Pyramiden ist $h > l$ und folglich $m > 1$.

Eine tetragonale Pyramide besitzt acht (vier obere und vier untere) gleiche Polkanten, sowie vier davon verschiedene, unter einander gleiche, Basiskanten.

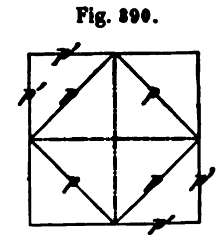
Da der Hauptquerschnitt aller Pyramiden erster Ordnung dasselbe rechtwinkelige Tetragon ist, so erscheinen je zwei derselben combinirt so, dass die stumpfere die Polecken der spitzeren vierflächig mit horizontalen Combinationskanten zuspitzt, oder diese die Basiskanten jener zuschärft, s. Fig. 389.

Fig. 389.

Eine ditetragonale Pyramide mit einer tetragonalen combinirt, erscheint als Zuschärfung von deren Polkanten, wenn beide gleiche Ableitungszahl *m* haben, als achtflächige Zuspitzung der Polecken, wenn erstere ein kleineres *m* besitzt.

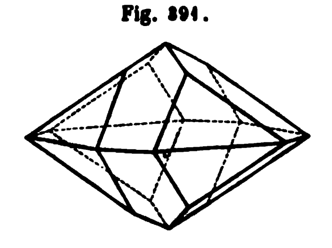
3) Die **tetragonale Pyramide zweiter Ordnung** $\{h0l\}$ ist derjenige specielle Fall der ditetragonalen Pyramide, in welchem $n = \infty$ ist. Ihr horizontaler Querschnitt hat dieselbe Form eines rechtwinkeligen Tetragons, wie der der Pyramide erster Ordnung, erscheint aber gegen diesen um 45° gedreht, s. Fig. 390. Das Parameterverhältniss dieser Art von Gestalten ist also $a : \infty a : mc$. Fig. 390 stellt den Hauptquerschnitt *p* einer Pyramide erster Ordnung und denjenigen *p'* der ihr zugehörigen zweiter Ordnung dar, d. h. zweier Pyramiden verschiedener Ordnung mit gleicher Ableitungszahl *m*.

Fig. 390.



Da eine Fläche der Pyramide zweiter Ordnung die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss schneidet, wie eine Polkante, also wie zwei in einer solchen zusammenstossende Flächen der zugehörigen Pyramide erster Ordnung, so liegt sie mit zwei solchen Flächen in einer Zone, d. h. sie stumpft die Polkante der Pyramide erster Ordnung gerade ab. Es stellt demnach Fig. 391 die Combination einer Pyramide erster Ordnung mit der ihr zugehörigen zweiter Ordnung dar. Dieselben sind nach Naumann zu bezeichnen mit *mP* und $mP\infty$ (letzteres das allgemeine Zeichen der Pyramiden zweiter Ordnung); wenn $m = 1$, d. h. erstere zur primären $= \{111\}$ genommen worden ist, erhält diejenige, welche ihre Polkanten abstumpft, das Zeichen $\{101\} = P\infty$, und wird die **primäre Pyramide zweiter Ordnung** genannt. Dieselbe ist stumpfer, d. h. hat schärfere Basis- und stumpfere Polkanten, als die zugehörige erster Ordnung.

Fig. 391.



In den Combinationen zweier Pyramiden verschiedener Ordnung, welche nicht einander zugehörige sind, erscheint diejenige zweiter Ordnung, wenn sie einen kleineren Ableitungscoëfficienten m hat, als die der ersten Ordnung, an dieser als vierflächige Zuspitzung der Polecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gerade aufgesetzt, Fig. 392. Ist dagegen m grösser, so erscheint jene als Zuschärfung der Basisecken der Pyramiden erster Ordnung, die Zuschärfungsflächen auf die Polkanten aufgesetzt. In dem in Fig. 393 dargestellten speciellen Falle, dass die Combinationskanten einer Fläche der letzteren mit zwei Flächen der ersteren einander parallel sind, ist das m der Pyramide zweiter Ordnung doppelt so gross, als das der ersten, also beispielsweise ihre Zeichen $\{114\}P$ und $\{201\}2P\infty$, wie leicht aus den Indices herzuleiten ist.

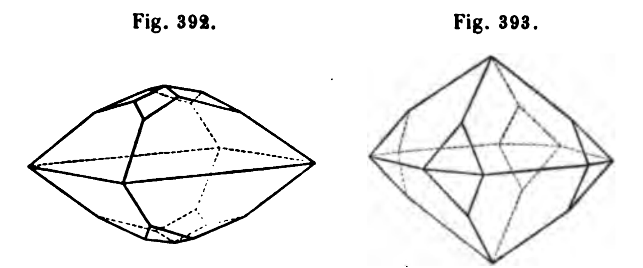


Fig. 392. Fig. 393.

Die Combinationen der Pyramiden zweiter Ordnung mit ditetragonalen sind analog denen der Pyramiden erster Ordnung, nur mit den Unterschieden, welche in der Verschiedenheit der Stellung von beiderlei Formen begründet sind.

4) Das ditetragonale Prisma $\{hk0\}$ ist diejenige ditetragonale Pyramide, deren Ableitungszahl $m = \infty$ ist; es besitzt denselben horizontalen Querschnitt, wie diejenigen ditetragonalen Pyramiden, welche mit jenem gleiches n haben; seine Flächen sind aber sämmtlich der Hauptaxe parallel, also vermag diese Form für sich allein den Raum nicht zu umschliessen. Fig. 385 stellt dieselbe in Combination mit der Basis dar. Ihr Naumann'sches Zeichen ergiebt sich nunmehr ganz von selbst als: ∞Pn.

Das ditetragonale Prisma hat acht Kanten, von denen vier schärfer und die vier alternirenden stumpfer sind. Ein ditetragonales Prisma mit acht gleichen Kanten ist aus demselben Grunde krystallonomisch unmöglich, wie eine gleichkantige ditetragonale Pyramide.

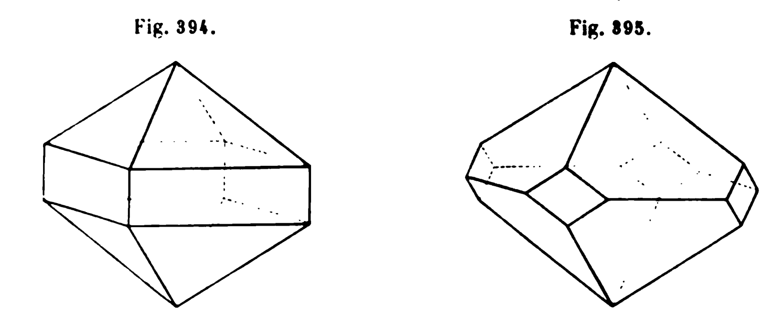
Je nachdem der Zahlenwerth von n näher an 1 liegt oder sehr gross ist, ähnelt das ditetragonale Prisma mehr dem einen oder dem anderen der beiden folgenden Formen, dem Prisma erster oder dem zweiter Ordnung. Seine Flächen liegen zwischen den Flächen dieser beiden letzterwähnten Formen, und sie bilden Zuschärfungen der Kanten sowohl des einen, wie des anderen.

Die ditetragonalen Pyramiden mit gleichem n sind um so spitzer, sie nähern sich um so mehr der verticalen Stellung der Flächen, je grösser m ist; das Endglied einer solchen Reihe ist das ditetragonale Prisma mit demselben Werth von n; dieses ist zugleich identisch für alle tetrago-

nalen Substanzen, weil seine Winkel nicht von dem Verhältniss 1 : c, sondern nur von der rationalen Zahl n, welche bei allen jenen Körpern verwirklicht sein kann, abhängt. Ein ditetragonales Prisma stumpft die Basiskanten der ditetragonalen Pyramiden, welche dasselbe n haben, gerade ab.

5) Das tetragonale Prisma erster Ordnung {110} ist die ditetragonale Pyramide mit den besonderen Werthen $l = 0$, d. h. $m = \infty$, und $h = k$, d. h. $n = 1$, oder die tetragonale Pyramide erster Ordnung, deren m den Grenzwerth ∞ angenommen hat, daher von Naumann ∞P bezeichnet. Es ist also eine Pyramide erster Ordnung mit verticalen, der Hauptaxe parallelen Flächen, welche Form für sich den Raum nicht umschliesst. Diese Gestalt ist in Fig. 386 in Combination mit der Basis dargestellt. Da ihr Parameterverhältniss 1 : 1 : ∞ gar keiner Variation mehr fähig ist, so giebt es nur ein tetragonales Prisma erster Ordnung, dessen Kantenwinkel 90°, identisch für alle tetragonal krystallisirenden Körper.

Dasselbe erscheint in Combinationen an allen tetragonalen Pyramiden derselben Ordnung als gerade Abstumpfung der Basiskanten (Fig. 394),


Fig. 394. Fig. 395.

an denen der anderen Ordnung als gerade Abstumpfung der Basisecken Fig. 395).

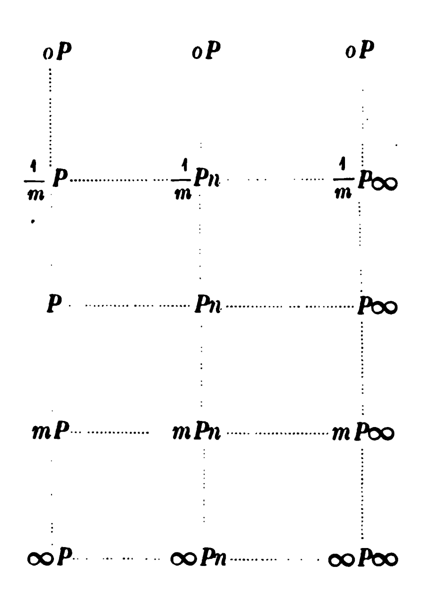
6) Das tetragonale Prisma zweiter Ordnung {100} $= \infty P\infty$ ist die Grenzform der tetragonalen Pyramiden zweiter Ordnung für den Fall, dass $m = \infty$, es kann also auch nur eine einzige solche Gestalt geben, welche sich von der vorigen nur durch ihre Stellung (sie erscheint um 45° gegen jene gedreht) unterscheidet. Die Figg. 394 und 395 können auch als Combinationen dieses Prismas mit einer Pyramide zweiter Ordnung, resp. erster Ordnung, dienen, wenn man die Nebenaxen mit den Zwischenaxen vertauscht, d. h. jene Gestalten sich um die Hauptaxe, und zwar um 45°, gedreht denkt.

7) Die tetragonale Basis {001}, die Haupt-Symmetrieebene selbst, ist die untere Grenzform aller tetragonaler Pyramiden, welche um so stumpfer sind, sich in der Lage ihrer Flächen um so mehr derselben nähern, als die Ableitungszahl m sich der Null nähert. Ist $m = 0$, so sind die Polkantenwinkel = 0°, die Flächen der Pyramide fallen in eine einzige

Horizontalebene zusammen. Daher bezeichnet Naumann auch in diesem System die Basis mit oP.

Diese Form, deren es natürlich auch nur eine einzige giebt, kann noch weniger für sich allein auftreten, als die Prismen, da sie den Raum nur in einer Richtung, von oben nach unten, abschliesst. Die Gestalt ihres Umrisses in den Combinationen ist entweder diejenige eines rechtwinkeligen Tetragons oder eines gleichwinkeligen Achtecks (zwei um 45° gedrehte Rechtecke), oder eines Ditetragons mit vier schärferen und vier stumpferen Winkeln.

Den Zusammenhang aller dieser soeben beschriebenen holoëdrischen Gestalten einer tetragonalen Krystallreihe kann man am besten in nachfolgendem Schema, welches vollkommen analog dem des hexagonalen Systems S. 330 ist, übersehen:



Die vorderste verticale Reihe ist diejenige der Pyramiden erster Ordnung, welche sämmtlich zwischen der Basis und dem Prisma erster Ordnung liegen; wird m stets grösser als 1 angenommen, so ist das Zeichen der flacheren, zwischen der primären und der Basis liegenden, $\frac{1}{m}P$, derjenigen, welche spitzer sind als die Grundform, mP. Ganz analog stellt die letzte Verticalreihe alle Pyramiden zweiter Ordnung dar. Dazwischen liegen die Verticalreihen der ditetragonalen Pyramiden, von denen nur die allgemeine Reihe mit der unbestimmten Zahl n als Repräsentant der übrigen aufgeführt ist. Jede ditetragonale Pyramide ist nun zugleich ein Glied einer Horizontalreihe, welche sämmtliche ditetragonale Pyramiden mit gleichem m, und als Endglieder die erste und zweite Pyramide mit demselben m umfasst. Ebenso

wird die letzte Horizontalreihe von den ditetragonalen Prismen, sämmtlich zwischen dem ersten und dem zweiten Prisma liegend, gebildet.

Sowohl die Flächen der in einer Verticalreihe stehenden, als der in Horizontalreihen vereinigten Krystallformen bilden mit den entsprechenden Flächen aller Formen derselben Reihe je eine Zone, d. h. schneiden einander in parallelen Kanten.

§. 82. **Projection und Berechnung der tetragonalen Formen.** Wie im hexagonalen System, so werden auch im tetragonalen die Formen stets auf die Basis als Ebene des Grundkreises projicirt, um einen Ueberblick über die Symmetrie der Zonenverhältnisse zu erhalten. Es sind daher (s. Fig. 396 folg. S.) der Pol von {001} in die Mitte des Grundkreises und die Pole der beiden tetragonalen Prismen mit 90° resp. 45° Abstand auf dem Umfange desselben einzutragen. Der Durchmesser 001 : 110 enthält die Pole der Pyramiden 1. Ordnung, 001 : 100 diejenigen der Pyramiden 2. Ordnung, zu deren Projicirung also nur die Kenntniss ihrer Neigung zur Hauptaxe nöthig ist. Seien 111 u. s. f. die aus dem erwähnten Winkel in bekannter Weise zu construirenden Pole der primären Pyramide 1. Ordnung, so giebt die Zone zweier derselben, z. B. 111 und $1\bar{1}1$, in welcher zugleich die Prismenflächen 010 und $0\bar{1}0$ liegen, den Pol 101 und ebenso die übrigen der zugehörigen Pyramide 2. Ordnung, welche die Polkante jener abstumpft. Ist der Basiskantenwinkel der letzteren gemessen, so liefert dieser direct das Parameterverhältniss c, denn dieses ist offenbar gleich der tang des Winkels 001 : 101, d. h. des halben Supplementes vom Winkel der Basiskante der Form {101}.

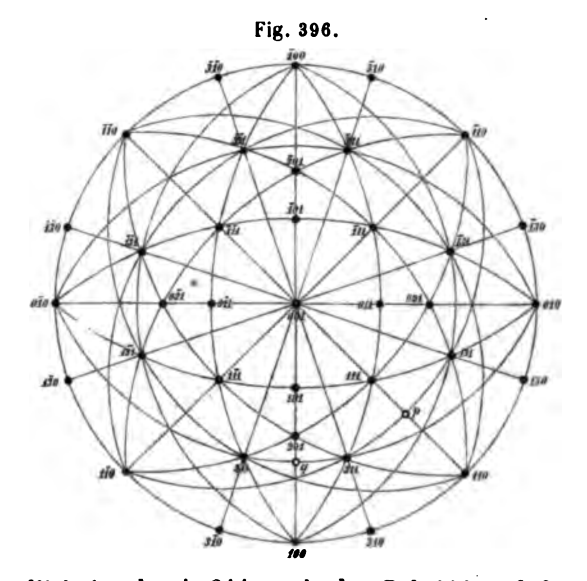
Handelt es sich um Berechnung des Axenverhältnisses aus der Pyramide 1. Ordnung, so muss dazu entweder der Winkel ihrer Polkanten oder ihrer Basiskanten gemessen sein. Im ersteren Falle ist der Bogen 111 : 101 (allgemein $hhl : h0l$) $= \alpha$ als Hälfte des gemessenen Winkels gegeben und damit 101 (resp. $h0l$): 001 $= \beta$ bestimmt, da $\sin\beta = \tang \alpha \cdot \cotang 45^0$ d. i. tang α, und das gesuchte Axenverhältniss $c = \tang\beta$. Hat man die Basiskante gemessen, so folgt daraus unmittelbar 111 (allgemein : hhl) : 001 $= \gamma$ und das Axenverhältniss $c = \tang\beta = \tang\gamma \cdot \cos 45^0$. Dasselbe rechtwinkelige Dreieck 001, 111, 101 benutzt man natürlich ebenfalls, wenn umgekehrt aus dem Axenverhältniss, d. i. aus β, die beiden anderen Seiten desselben, d. h. die Winkel der Pol- und der Basiskante der Pyramide berechnet werden sollen.

Da {111} die Polkanten von {201} abgestumpft, in deren Zone zugleich das Prisma 1. Ordnung liegt, so sind durch die Pole der ersten und letzten Form diejenigen von {201} gegeben, z. B. der Pol 201 als Durchschnittspunkt der Zonen [$1\bar{1}0$, 111] mit [001, 100] u. s. f.

In der Polkantenzone einer Pyramide, z. B. zwischen 111 und $\bar{1}11$, liegen nun sämmtliche ditetragonale Pyramiden, welche die Polkanten der ersteren zuschärfen, in derselben Zone, aber zwischen 111 und 100, eine Reihe spitzerer ditetragonaler Pyramiden, welche in den Combinationen

als Abstumpfungen der Kanten der Pyramide 1. Ordnung mit dem Prisma 2. Ordnung erscheinen (s. *d* in Fig. 401); eine dieser Formen liegt zugleich in der Zone 201 : 110, wodurch sich unmittelbar ihr Zeichen als {311} ergiebt. Trägt man die Pole dreier benachbarter Flächen dieser Form in der Projection ein (s. Fig. 396), so ist durch je zwei eine Polkantenzone der ditetragonalen Pyramide bestimmt und der betreffende Zonenkreis mit Hülfe der in dieselbe Zone fallenden Prismenflächen leicht zu construiren. Einer dieser Kreise, z. B. 311 : 131, schneidet den Durchmesser 001 : 110 in einem Punkte *p*, dem Pol derjenigen Pyramide 1. Ordnung, welche die nach den Zwischenaxen herablaufenden Polkanten der ditetragonalen Pyramide abstumpft, der Kreisbogen 311 : $3\bar{1}1$ dagegen bestimmt den Pol *q* derjenigen Pyramide 2. Ordnung, welche die anderen Polkanten der ditetragonalen

Fig. 396.



abstumpft. Endlich ist durch 311 auch der Pol 310 auf dem Grundkreise bestimmt. Dadurch sind, wie in dem analogen Falle des hexagonalen Systems, die sphärischen Dreiecke gegeben, durch welche die Winkel jeder beliebigen ditetragonalen Pyramide aus ihrem Zeichen berechnet werden können, wie an dem Beispiele der Form {311} gezeigt werden soll.

Aus dem Symbol {311} ergiebt sich $p = 221$ und $q = 301$, und aus dem Axenverhältniss der Substanz sind alsdann leicht die beiden Bögen 001 : 221 und 001 : 301 zu berechnen. Der Bogen 100 : 310, dessen cotg $= 3$, ist zugleich der Winkel der beiden Zonenkreise 001 : 100 und 001 : 310. Damit sind in dem rechtwinkeligen Dreieck 001, *q*, 311 der Winkel an 001 und die Seite 001 : *q* gegeben, aus denen der halbe Polkantenwinkel 311 : *q* einfach abzuleiten ist. Die Hälfte des anderen Polkantenwinkels 311 : *p* findet man durch das ebenfalls rechtwinkelige Dreieck 001, *p*, 311, dessen Winkel an 001 die Differenz des entsprechenden Winkels im vorigen Dreieck von 45° ist, und in welchem man den Bogen 001 : *p* kennt. Der

beiden Dreiecken angehörige und daher in einem derselben mit zu berechnende Bogen 001 : 311 liefert unmittelbar die Basiskante von {311}.

Soll dagegen aus den beobachteten Winkeln einer ditetragonalen Pyramide deren Parameterverhältniss und somit das Zeichen derselben berechnet werden, so benutzt man die gleichen Dreiecke umgekehrt. Sei 311 : $q = \alpha$ und 311 : $p = \alpha'$ gemessen, so gilt für die diesen Bögen gegenüberliegenden Winkel an 001 die Gleichung:

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}$$

und da $A' = 45^0 - A$, so ist

$$\operatorname{cotang} A = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha \cdot \sin 45^0} + 1$$

Der nach dieser Gleichung aus den Messungen hergeleitete Werth von cotang A ist gleich dem Verhältniss der Indices $h : k$ des zugehörigen ditetragonalen Prisma, also auch der ditetragonalen Pyramide selbst. Das Verhältniss $h : l$ derselben folgt aus dem Zeichen der Pyramide q, welche mit ihr dieses Verhältniss gemeinsam haben muss. Man hat daher nur nöthig, mit Hülfe des Winkels A und der Seite q : 311 den Bogen 001 : q zu berechnen und daraus das Symbol von q herzuleiten. Ist statt der Polkante 311 : p die Basiskante der ditetragonalen Pyramide gemessen worden, so giebt deren Hälfte, von 90⁰ subtrahirt, die Seite 311 : 001 in dem rechtwinkeligen Dreieck 001, 311, q, in welchem die andere Polkante, d. h. 311 : q, bekannt ist; es können daher die Seiten 001 : q und der Winkel an 001 berechnet werden, welche direct zum gesuchten Zeichen der ditetragonalen Pyramide führen.

Liegt zur Bestimmung der letzteren statt zweier nur eine Winkelmessung vor, aber in einer bekannten Zone, z. B. in [111, 100], so hat man zuerst in dem rechtwinkeligen Dreieck 111, 110, 100 den Winkel an 111 zu berechnen. Derselbe gehört zugleich dem rechtwinkeligen Dreieck 111, 311, p an; ist also die Neigung zwischen den Flächen (111) und (311) gemessen, so folgt daraus der Bogen 111 : p, d. h. das Zeichen von p und damit eine zweite Zone zur Bestimmung der Indices der ditetragonalen Pyramide.

§. 83. **Beispiele holoëdrisch-tetragonal krystallisirender Substanzen.** Wie im hexagonalen System, existirt auch im tetragonalen eine Anzahl Körper, für welche es zweifelhaft ist, ob dieselben der holoëdrischen oder einer hemiëdrischen Abtheilung angehören, da an deren Krystallen nur Pyramiden einer Ordnung oder wenigstens noch keine ditetragonalen beobachtet worden sind, welche durch ihr vollzähliges Auftreten den Beweis für die Holoëdrie liefern würden. Die betreffenden Substanzen, soweit sie wichtige Beispiele des Systems darstellen, sind im Folgenden unter den holoëdrisch krystallisirenden mit aufgezählt, mit Ausnahme der circularpolarisirenden, welche man mit grosser Wahrscheinlichkeit einer Hemiëdrie, der trapezoëdrischen, zuzuzählen hat (vergl. S. 370).

Hemimorphie kann bei tetragonalen Krystallen, wie bei den hexagonalen, vorhanden sein nach der Hauptaxe (s. Jodsuccinimid).

Zwillingsbildung kann bei holoëdrisch tetragonalen Krystallen stattfinden nach allen krystallographischen Ebenen ausser denen des 1. und 2. Prisma und der Basis; der einfachste Fall ist offenbar derjenige, bei welchem eine tetragonale Pyramide die Zwillingsebene bildet.

Bor = *B*. $a : c = 1 : 0{,}576$ Sella. Die von Wöhler und Deville durch Schmelzen von Borsäure mit Aluminium im Kohlentiegel erhaltenen diamantharten Krystalle zeigen $o = \{111\}$, $2o = \{221\}$, $o' = \{101\}$, $m = \{110\}$, $m' = \{100\}$, Fig. 397.

Fig. 397.

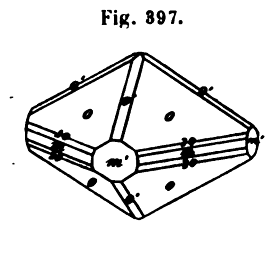
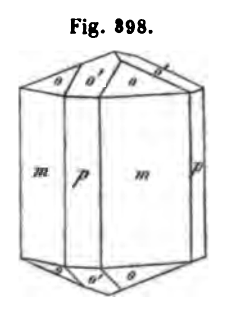


Fig. 398.



Zinn = *Sn*. $a : c = 1 : 0{,}3857$ (Miller, Poggend. Ann. 58, 660). Die galvanisch ausgeschiedenen Krystalle dieses Metalles sind entweder nadelförmige Combinationen: $m = \{110\}$, $p = \{100\}$, $o = \{001\}$, $o' = \{101\}$, Fig. 398, oder nur die flache Pyramide o; im letzteren Falle häufig Zwillinge nach einer Fläche derselben Form.

Fig. 399.

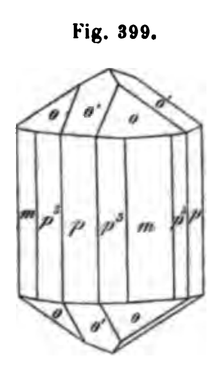
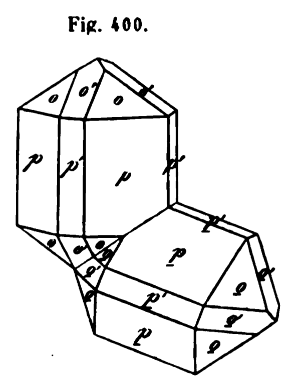


Fig. 400.



Zinndioxyd = SnO^2 (natürl. Zinnerz). $a : c = 1 : 0{,}6724$ Miller. Combination: $m = \{110\}$, $p = \{100\}$, $p^3 = \{310\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{101\}$, Fig. 399. Doppelbrechung +, schwach. Sehr häufig Zwillinge nach $\{101\}$, Fig. 400, bei denen vorn und hinten die Flächenpaare von $p' = \{100\}$ in eine Ebene fallen, da sie normal zur Zwillingsebene sind. Da eine tetragonale Pyramide aus vier Paaren paralleler Flächen besteht, so kann an einem Krystall nicht blos nach einem derselben, sondern auch noch, symmetrisch in Bezug auf das zweite, dritte und vierte Paar, je ein Krystall angewachsen sein, und so ein Fünflingskrystall entstehen, der bei vollständiger Durchwachsung aller Einzelkrystalle gleichsam die tetragonale Symmetrie wieder herstellt, welche im Zwilling gestört ist.

Titandioxyd = TiO^2 (Rutil). $a : c = 1 : 0{,}6442$ Miller. Dieselbe

Combination wie die vorige **Substanz**, Fig. 399. **Brechungsexponenten** nach Baerwald:

	ω	ε
Li-Licht	2,5671	2,8415
Na-Licht	2,6158	2,9029
Tl-Licht	2,6725	2,9817

Zirkon = $ZrSiO^4$. $a : c = 1 : 0{,}6404$ Haidinger. Combination: $m = \{110\}$, $p = \{100\}$, $o = \{111\}$, $3o = \{331\}$, $d = \{311\}$*), Fig. 401. Brechungsexponenten: $\omega = 1{,}92$, $\varepsilon = 1{,}97$ Sénarmont.

Fig. 401.

Fig. 402.

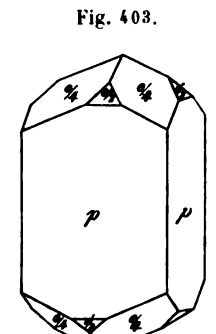
Quecksilberchlorür = Hg^2Cl^2 (nat. Quecksilberhornerz). $a : c = 1 : 1{,}7414$ Miller. Die Krystalle sind prismatische Combinationen von $p = \{100\}$ und $o = \{111\}$, Fig. 402. Doppelbrechung positiv: $\omega = 1{,}96$, $\varepsilon = 2{,}60$ f. Roth (Des Cloizeaux, Ann. d. min. XI, 300).

Quecksilberjodid = HgJ^2. $a : c = 1 : 1{,}9955$ (Mitscherlich, Pogg. Ann. 28, 116). Kleine dunkelrothe spitze Pyramiden $\{111\}$ mit $\{001\}$, selten $\{114\}$. Spaltbar nach $\{001\}$ vollkommen. Doppelbrechung negativ (Des Cloizeaux, a. a. O. 307). Die Krystalle dieses Körpers bieten ein bemerkenswerthes Beispiel für die bereits S. 138f. allgemein besprochenen Erscheinungen der inneren Spannung und dadurch bewirkter Veränderung der optischen Erscheinungen. Während die aus einer Auflösung in Jodkalium erhaltenen Krystalle gewöhnlich ohne alle Störung ihrer Structur sind, erscheinen die aus gewissen organischen Lösungsmitteln auskrystallisirten, wenn man dünne Spaltungsplatten nach der Basis im parallelen polarisirten Licht bei gekreuzten Nicols betrachtet, nur stellenweise dunkel, häufig nur die Mitte der Platte, während der grösste Theil beim Drehen hell und dunkel wird, und zwar derart, dass die Substanz gespannt erscheint parallel den Diagonalen der Basis (den Nebenaxen). Im convergenten Lichte erscheinen denn auch die ersteren Partien einaxig, die letzteren zweiaxig mit wechselndem Axenwinkel, wobei die Axenebene stets einer der beiden Nebenaxen parallel ist. Sehr häufig sind die dünnsten Spaltungsplatten noch aus mehreren über einander liegenden Schichten zusammengesetzt, in welchen die Spannungsrichtungen, also auch die Axenebenen, gekreuzt sind. Es entstehen dann, um so regelmässiger, je mehr solcher Schichten mit einander abwechseln, die

*) d ist bestimmt durch die beiden Zonen $[3o, 3o]$ und $[o, p]$. Vergl. S. 404.

farbigen Hyperbeln Fig. 96, welche sich mit der Platte drehen und welche man stets erhält, wenn man dünne Platten einer zweiaxigen Substanz, z. B. Glimmertafeln, kreuzweise auf einander schichtet.

Fig. 403.



Quecksilbercyanid $= HgCy^2$. $a : c = 1 : 1,8384$ de la Provostaye. Combination: $^o/_1 = \{111\}$, $^{o'}/_2 = \{102\}$, $p = \{100\}$, s. Fig. 403. Doppelbrechung negativ. (Des Cloizeaux, a. a. O. 307).

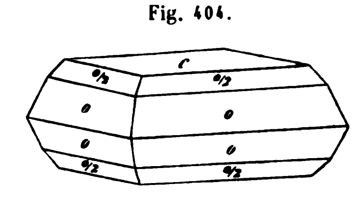
Magnesiumplatincyanür $= MgPtCy^4 + 7H^2O$. $a : c = 1 : 0,5863$ Haidinger. Dicke kurze Prismen $\{100\}$, am Ende $\{001\}$ und untergeordnet $\{111\}$. Brechungsexponenten nach Grailich: $n = 1,5472$ (Linie B), 1,5485 (L. C), 1,5532 (L. D); die beiden Strahlen ω und ε waren nicht deutlich getrennt. Doppelbrechung positiv. Carminroth mit schwachem Pleochroismus (ord. Strahl mehr bläulich); auf $\{100\}$ grüne, auf $\{001\}$ und $\{111\}$ lasurblaue metallische Oberflächenfarbe (s. S. 155).

Kaliumkupferchlorid $= K^2CuCl^4 + 2H^2O$. $a : c = 1 : 0,7531$ Rammelsberg. Combinationen $\{111\}$, $\{100\}$, einem regulären Dodekaëder ähnlich. Brechungsexponenten nach Grailich:

		ω	ε
Linie	B	1,6311	1,6070
-	D	1,6365	1,6148
-	E	1,6468	1,6227

Deutl. Pleochroïsmus (ω grün, ε himmelblau).

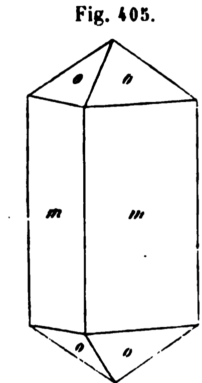
Fig. 404.



Schwefelsaures Nickel $= NiSO^4 + 6H^2O$. $a : c = 1 : 1,9061$ Mitscherlich, Poggend. Ann. 11, 323). $o = \{111\}$, $^o/_2 = \{112\}$, $c = \{001\}$ Fig. 404. Spaltbarkeit nach $\{001\}$. Doppelbrechung —, Brechungsexponenten nach Topsøe und Christiansen:

		ω	ε
Linie	C	1,5078	1,4844
-	D	1,5109	1,4873
-	F	1,5173	1,4930

Fig. 405.



Saures Kaliumphosphat $= KH^2PO^4$. $a : c = 1 : 0,6640$ (Mitscherlich, Ann. de chim. et phys. 19, 364). Combination: $o = \{111\}$, $m = \{110\}$, Fig. 405. Doppelbrechung —; Brechungsexponenten nach Topsøe.

		ω	ε
Linie	C	1,5064	1,4664
-	D	1,5095	1,4684
-	F	1,5154	1,4734

Saures Ammoniumphosphat = $(NH^4)H^2PO^4$. $a : c = 1 : 0,7124$ (Mitscherlich, a. a. O. 373). Dieselbe Combination, wie das vorige Salz. Doppelbr. —: $\omega = 1,5112$ (C), 1,5246 (D), $\varepsilon = 1,4768$ (C), 1,4792 (D) Topsøe.

Leucit = $(K, Na)^2 Al^2 [SiO^3]^4$. $a : c = 1 : 0,5264$ (vom Rath, Mon. Ber. d. Berl. Akad. 1873). Combination: $o = \{111\}$, $d = \{421\}$ in gleicher Ausdehnung, deshalb dem regulären Ikositetraëder {211} täuschend ähnlich, Fig. 406. Meist complicirte Durchwachsungszwillinge nach {201}. Sehr schwache Doppelbrechung +, $\omega = 1,508$, $\varepsilon = 1,509$. (Des Cloizeaux, Man. de min. II, XXXIV.)

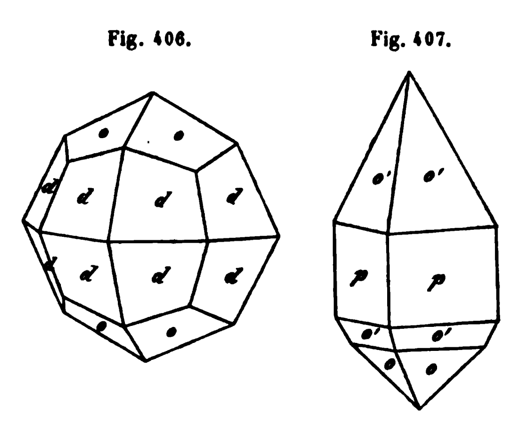


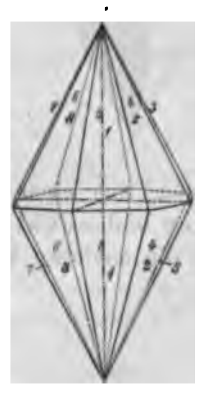
Fig. 406. Fig. 407.

Jodsuccinimid = $C^4H^4O^2NJ$. $a : c = 1 : 0,8733$ Groth. Hemimorphe Combination Fig. 407: $p = \{110\}$, oberer Pol: $o' = \{221\}$, unterer Pol: $o = \{111\}$, untergeordnet {221}. Spaltbarkeit nach {111} ziemlich deutlich. Doppelbrechung —.

§. 84. **Die sphenoidische Hemiëdrie.** Die Entwickelung der möglichen Arten der Hemiëdrie wird, wie bisher, an dem allgemeinen Repräsentanten aller Formen des Systems, an der ditetragonalen Pyramide, auszuführen und werden damit alsdann die entsprechenden hemiëdrischen Hälften der anderen Gestalten gegeben sein.

Denken wir uns die genannte Form von denjenigen zwei senkrechten Symmetrieebenen, in welchen die Nebenaxen liegen, in 4 Viertel getheilt, so liegen in jedem solchen Quadranten vier Flächen der ditetragonalen Pyramide, zwei obere und zwei untere, z. B. 1, 2 oben und unten, Fig. 408. Wir werden nur dann eine hemiëdrische Form erhalten, wenn wir die Hälfte aller Flächen so auswählen, dass in jedem Quadranten zwei Flächen in gleicher Weise genommen werden. Jede andere Auswahl der Flächen liefert, ganz ebenso, wie wir S. 338 im hexagonalen Systeme sahen, Formen, welche nicht den Bedingungen der Hemiëdrie genügen. Die Auswahl von zwei Flächen unter jenen vier ist auch hier nur auf dreierlei Art möglich, nämlich: *a*) zweier neben einander gelegener, z. B. 1, 2 oben, 3, 4 unten u. s. f., was einer Theilung der dihexagonalen Pyramide durch die Ebenen des Prisma 2. Ordnung und der Basis entsprechen würde; *b*) je zweier in einer

Fig. 408.



Basiskante zusammentreffender, z. B. 2 oben und unten, 4 oben und unten etc., entsprechend einer Theilung nach den vier senkrechten Symmetrieebenen; *c*) je zweier kreuzweise gelegener, z. B. 1 unten, 2 oben, 3 unten, 4 oben u. s. f., wie es der Theilung nach allen Symmetrieebenen entspricht. Hierdurch entstehen drei verschiedene Arten von Hemiëdrie, welche ganz genau den drei, auf dieselbe Art abgeleiteten Hemiëdrien des hexagonalen Systems entsprechen. Von diesen soll zunächst diejenige (*a*) betrachtet werden, welche das Analogon der rhomboëdrischen Hemiëdrie bildet und in welcher die Formen nach den durch die Haupt- und die beiden Nebenaxen gehenden drei Ebenen in acht Oktanten getheilt wird. Vier dieser Oktanten enthalten also folgende Flächen der ditetragonalen Pyramide:

1, 2 oben, 3, 4 unten, 5, 6 oben, 7, 8 unten.

Die zu diesen nach den zerlegenden Ebenen symmetrischen Flächen der andern Hälfte sind:

1, 2 unten, 3, 4 oben, 5, 6 unten, 7, 8 oben.

1) Die ditetragonale Pyramide liefert nach dem Gesetz dieser Hemiëdrie, durch Beibehaltung der Paare neben einander liegender Flächen in allen alternirenden Oktanten und Verschwindenlassen der anderen, Fig. 409, je zwei Hälften, welche die Gestalt Fig. 410 besitzen, und zwar bilden die weiss gelassenen Flächen diese Form genau in der Stellung, wie sie die Figur zeigt, während die andere Hälfte derselben eine genau gleiche, aber um 90° gedrehte Gestalt liefert. Eine solche Krystallform heisst, weil bei gleicher Centraldistanz ihre Flächen die Gestalt ungleichseitiger Dreiecke (Skalene) haben, tetragonales Skalenoëder, und unterscheidet man die beiden, aus einer ditetragonalen Pyramide entstehenden Formen als positives und negatives Skalenoëder, welche genau so bezeichnet werden, wie die analogen Formen des hexagonalen Systems

Fig. 409. Fig. 410.

$$\varkappa\{hkl\}^{*)} = +\frac{mPn}{2}$$

$$\text{und } \varkappa\{h\bar{k}l\} = -\frac{mPn}{2}.$$

*) Die vorliegende Hemiëdrie ist eine »geneigtflächige« und entspricht, da zu ihrer Herleitung die holoëdrischen Formen nach drei auf einander senkrechten Symmetrieebenen zerlegt werden müssen, der tetraëdrischen Hemiëdrie im regulären System, daher die Bezeichnung durch $\varkappa$. Die Analogie mit der tetraëdrischen Hemiëdrie tritt am meisten hervor bei den Hälftflächnern der Pyramiden 1. Ordn., welche unter Umständen sogar genau dieselbe geometrische Form haben können, wie das reguläre Tetraëder (s. S. 412.)

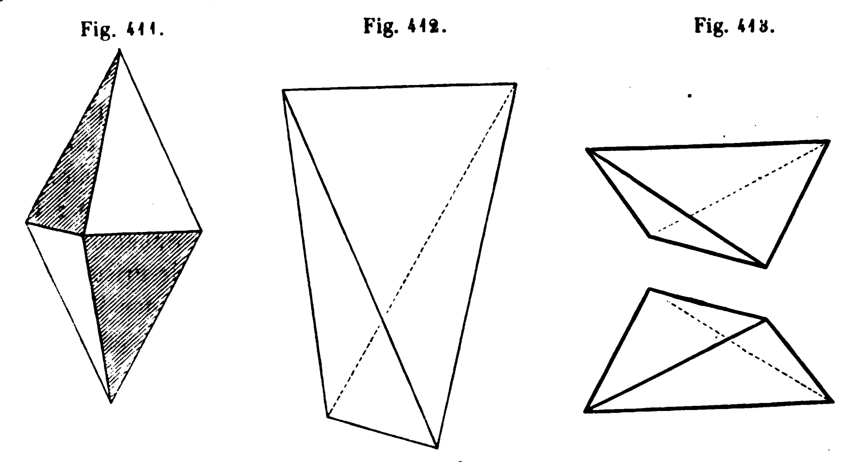
Selbstverständlich ist es an und für sich beliebig, welche der beiden Hälftformen man in einem speciellen Falle positive, welche negative nennt, und geschieht die Wahl nach denselben Grundsätzen, wie die einer Grundform, also die etwa regelmässig vorherrschende Hälfte ist als positive zu bezeichnen. Ist eine solche Wahl an einem Krystall einmal getroffen, so ist damit natürlich das Vorzeichen, + oder —, für alle anderen, daran auftretenden Formen gegeben.

Ein tetragonales Skalenoëder besteht aus zwei oberen und zwei, in alternirender Stellung dazu befindlichen unteren Flächenpaaren, deren Flächen sich je in einer stumpferen Polkante, deren Winkel gleich demjenigen der entsprechenden Polkante an der ditetragonalen Pyramide ist, schneiden. Ausser diesen vier stumpferen Polkanten besitzt das Skalenoëder noch vier schärfere, mit jenen abwechselnd, und ebenso viel einander gleiche Mittelkanten. Die Polecken desselben sind also 2+2kantige, die Seitenecken 2+1+1kantige.

Combinationen mehrerer Skalenoëder mit einander sind sehr mannigfachen Ansehens je nach dem Verhältniss der Zahlen *m* und *n* des einen zu denen des anderen, und je nach dem Vorzeichen. Wie aus den Beispielen zu ersehen, kommen jedoch gewöhnlich nur Combinationen eines solchen mit einfacheren Formen vor.

2) Die tetragonale Pyramide erster Ordnung, derselben Hemiëdrie unterworfen (Fig. 411), liefert eine Form, welche nur aus vier, zwei oberen und zwei alternirend gestellten unteren Flächen besteht. Diese Form (Fig. 412) heisst Sphenoid*), die Umrissfigur ihrer vier Flächen bei gleicher Centraldistanz ist die gleichschenkeliger Dreiecke. Ein Sphenoid

Fig. 411. Fig. 412. Fig. 413.



besitzt nur zwei, horizontal laufende, einander gleiche Polkanten, dagegen vier davon verschiedene, unter einander aber gleiche Mittelkanten. Bei dem in Fig. 412 dargestellten Sphenoid sind die Polkanten schärfer, als die Mittelkanten, bei den Fig. 413 dargestellten (+ und —) dagegen sind die Polkanten

*) Nach dieser Form ist die vorliegende Hemiëdrie benannt, ebenso wie die analoge hexagonale nach der entsprechenden Form des Rhomboëders.

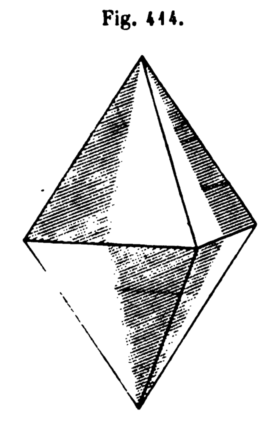
die stumpferen; erstere Form zeigt besonders die Aehnlichkeit mit einem Keil (Sphen), welcher derselben den Namen verliehen hat. Darnach unterscheidet man die Sphenoide als spitze und stumpfe, und ist ein solches natürlich um so spitzer oder stumpfer, je mehr dies der Fall ist mit der tetragonalen Pyramide, von der dasselbe sich ableitet. Ein Sphenoid, welches genau zwischen den spitzen und stumpfen mitten inne stände, d. h. dessen Polkanten gleich den Mittelkanten wären, würde die Form des regulären Tetraëders haben. Ein Sphenoid, welches diesem sehr nahe kommt, ist krystallonomisch bei jeder tetragonal krystallisirenden Substanz dieser Hemiëdrie möglich. Da nun dessen Polkanten beim Erwärmen schärfer werden, die Mittelkanten stumpfer, wenn die Hauptaxe die Richtung der grössten Ausdehnung durch die Wärme ist, dagegen beide sich in umgekehrtem Sinne ändern, wenn der Krystall sich parallel der Hauptaxe am wenigsten ausdehnt, so wird es eine Temperatur geben, bei welcher jenes Sphenoid sogar genau gleiche Pol- und Mittelkanten besitzt. Dass es deshalb noch keineswegs als ein reguläres Tetraëder betrachtet werden darf, lehren dieselben Betrachtungen, welche über den scheinbaren Uebergang der entsprechenden hexagonalen Form, des Rhomboëders, in einen regulären Würfel, S. 341, angestellt worden sind.

Die beiden, aus einer tetragonalen Pyramide entstehenden Sphenoide werden als positives und negatives unterschieden; dieselben haben genau gleiche Gestalt, nur ist das eine gegen das andere um 90° gedreht. Combinirt erscheinen beide so, dass eines die Ecken des anderen abstumpft, s. die Combination des Kupferkies Fig. 418. Sie werden folgendermassen bezeichnet:

$$\varkappa\{hhl\} = +\frac{mP}{2} \quad \text{und} \quad \varkappa\{h\bar{h}l\} = -\frac{mP}{2}$$

Erscheinen zwei verschiedene Sphenoide von entgegengesetztem Vorzeichen mit einander combinirt, so stumpft ebenfalls das eine die Ecken des anderen ab, aber mit anderer Neigung der Abstumpfungsflächen gegen die Hauptaxe, s. Fig. 420 Kupferkies. Eine Abstumpfung der Ecken eines Sphenoides mit verticalen Flächen ist das tetragonale Prisma erster Ordnung; die gerade Abstumpfung der Mittelkanten das Prisma zweiter Ordnung; die gerade Abstumpfung der Polkanten die Basis.

Fig. 414.



3) Die tetragonale Pyramide zweiter Ordnung, nach demselben Gesetze hemiëdrisch werdend, Fig. 414, liefert eine der holoëdrischen vollkommen gleiche Form, weil jede Fläche derselben zwei derjenigen ditetragonalen Pyramide, deren $n = \infty$ ist, repräsentirt, von denen jedesmal eine der hemiëdrischen Form angehört. Ganz in derselben Art bleibt auch in der entsprechenden

Hemiëdrie des hexagonalen Systems, der rhomboëdrischen, die Pyramide zweiter Ordnung scheinbar ungeändert (s. S. 345).

4) Das ditetragonale Prisma hat seine Flächen gleichzeitig in den benachbarten oberen und unteren Oktanten liegen; wenn also dieselben auch in den abwechselnden fortfallen (Fig. 415), so ist doch die hemiëdrische Form aus ebenso viel Flächen gebildet, als die holoëdrische, sie ist aber nicht diejenige ditetragonale Pyramide, sondern dasjenige Skalenoëder, dessen $m = \infty$ ist, besteht also aus zwei dem oberen Pol der Hauptaxe und zwei dem unteren angehörigen Flächenpaaren. Würden diese beiden Pole durch Hemimorphie in der Ausbildung von einander unabhängig, so würden die Flächen 1, 2, 5, 6 ein rhombisches Prisma, die übrigen ein zweites von derselben Gestalt bilden, welche beide Formen in Bezug auf ihr Auftreten am Krystall sich als von einander unabhängige erweisen würden.

5) Das tetragonale Prisma erster Ordnung unterscheidet sich sphenoidisch-hemiëdrisch (Fig. 416) ebenso wenig vom holoëdrischen, wie das hexagonale in der rhomboëdrischen Hemiëdrie. Dasselbe ist jedoch hier nicht aufzufassen als eine tetragonale Pyramide, deren $m = \infty$, sondern als ein Sphenoid, dessen m diesen Grenzwerth erreicht, als das Endglied der Reihe von Sphenoiden mit wachsendem m. Tritt also zu dieser Hemiëdrie noch Hemimorphie nach der Hauptaxe, so verwandelt sich dieses Prisma in zwei von einander unabhängige Paare paralleler Flächen.

6) Das tetragonale Prisma zweiter Ordnung, derselben Hemiëdrie unterworfen (Fig. 417), liefert natürlich ebenfalls eine der holo-

Fig. 415.

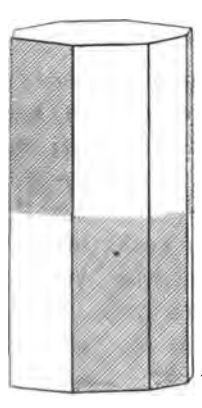


Fig. 416.

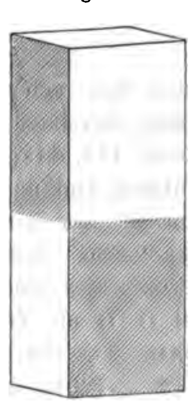
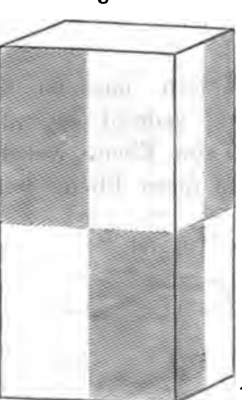


Fig. 417.



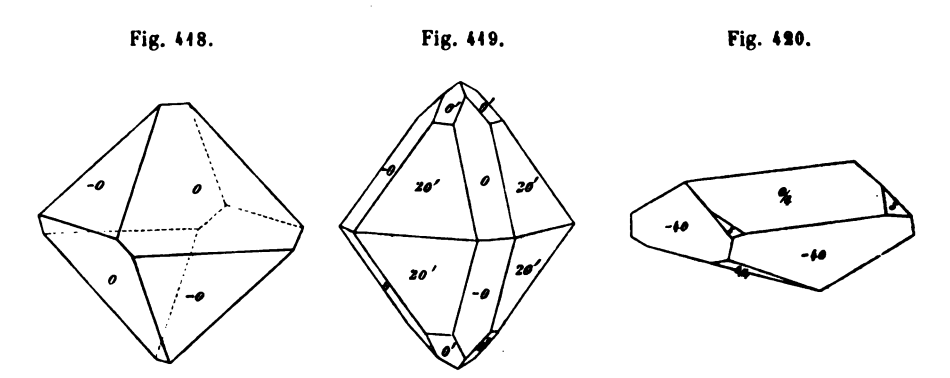
ëdrischen gleiche Form, die Pyramide zweiter Ordnung, deren $m = \infty$. Da ihre Flächen sämmtlich sowohl dem oberen, wie dem unteren Pol der Hauptaxe angehören, so kann diese Form durch Hemimorphie nicht verändert werden.

7) Die Basis ist dasselbe Flächenpaar, wie die holoëdrische; sie ist als das Grenzglied der Reihe der flachen Sphenoide, dessen m nämlich $= 0$ ist, zu betrachten.

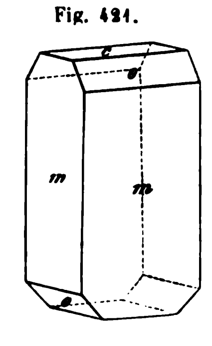
Da die sphenoidisch-hemiëdrischen Krystalle keine Symmetrie nach {100} und {001}, als zerlegenden Ebenen, besitzen, so können die Flächen dieser Formen als Zwillingsebenen symmetrischer Verwachsungen fungiren.

Beispiele. Folgende Substanzen krystallisiren sphenoidisch-hemiëdrisch:

Kupferkies $CuFeS^2$. $a : c = 1 : 0,9856$ Haidinger. Häufigste Combination: $o = \varkappa\{111\}$, $-o = \varkappa\{1\bar{1}1\}$, Fig. 418 (einem regulären Oktaëder sehr ähnlich), durch die Oberflächenbeschaffenheit der beiden Sphenoide (das eine glänzend, das andere matt) leicht als hemiëdrisch zu erkennen. Diese Combination erscheint gewöhnlich in Zwillingen vom Ansehen derer des Spinell (Fig. 182), bei denen aber, wie bei den Zwillingen der Zinkblende (Fig. 203), an der Zwillingsgrenze o und $-o$ alterniren, daher keine Symmetrie nach {111} stattfindet. Man kann dieses Gesetz so



definiren, dass ein Krystall gegen den andern 180° um die Normale zu {111} gedreht ist, oder dass beide Krystalle symmetrisch sind in Bezug auf eine Ebene, welche in der Zone $[11\bar{1}, 111]$ normal zu (111) liegt; während diese Ebene bei der regulären Zinkblende einer Fläche der Form {211} entspricht, ist dieselbe im vorliegenden Falle keine Krystallfläche. Ausser diesen Zwillingen kommen am Kupferkies auch symmetrische Verwachsungen mit (101) als Zwillingsebene vor. Weitere Combinationen: Fig. 419: $o = \varkappa\{111\}$, $-o = \varkappa\{1\bar{1}1\}$, $o' = \{101\}$, $2o' = \{201\}$, und Fig. 420: $^o/_4 = \varkappa\{114\}$, $-4o = \varkappa\{4\bar{4}1\}$, $s = \varkappa\{6.3.16\}$.



Harnstoff $= CH^4N^2O$. $a : c = 1 : 0,8345$ Schabus. Combination Fig. 421: $o = \varkappa\{111\}$, $m = \{110\}$, $c = \{001\}$. Spaltbarkeit {110} vollkommen, {001} unvollkommen. Doppelbrechung +, stark.

§. 85. **Die pyramidale Hemiëdrie.** Die zweite mögliche Art der Hemiëdrie des tetragonalen Systems entsteht nach S. 409 dadurch, dass die

Formen nach den vier in der Hauptaxe einander schneidenden Symmetrieebenen in acht gleiche Theile zerlegt werden, und die eine Hälfte derselben, z. B. die Flächen 2 oben und unten, 4 oben und unten u. s. f. der ditetragonalen Pyramide Fig. 408, zu einer hemiëdrischen Form vereinigt wird. Diese kann demnach nur nach der Basis Symmetrie zeigen.

1) Die ditetragonale Pyramide liefert, wenn man nach diesem Gesetze die Hälfte der Flächen auswählt (Fig. 422), eine tetragonale Pyramide dritter Ordnung oder der Zwischenstellung, ganz entsprechend der hexagonalen Pyramide dritter Ordnung, welche sich auf dieselbe Art aus der dihexagonalen ableitet. Stellt in Fig. 423 $p^1p^1p^1p^1$ den horizontalen Querschnitt der Pyramide erster Ordnung, also die Richtung der Basiskanten derselben, $p^2p^2p^2p^2$ die der Basiskanten der Pyramide zweiter Ordnung dar, so ist $p^3p^3p^3p^3$ der Querschnitt der einen Pyramide der dritten Ordnung. Diese Formen werden ebenso, wie die entsprechenden des hexagonalen Systems, bezeichnet:

Fig. 422.

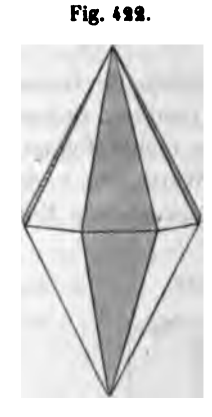
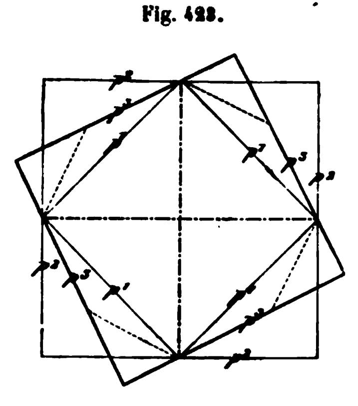


Fig. 423.

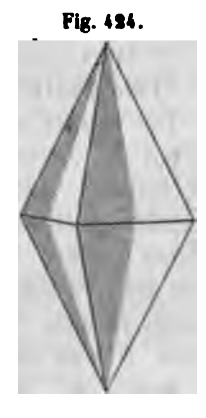


$$\pi\{khl\} = +\left[\frac{mPn}{2}\right] \text{ und } \pi\{hkl\} = -\left[\frac{mPn}{2}\right]$$

Ihre Combinationen mit anderen Formen werden bei den Beispielen betrachtet werden.

2) Die tetragonale Pyramide erster Ordnung, in gleicher Weise hemiëdrisch werdend, Fig. 424, bleibt scheinbar völlig ungeändert, und die Verschiedenheit einer derartigen hemiëdrischen Pyramide von der geometrisch ihr gleichenden holoëdrischen ist nur in Combinationen ersichtlich. Während z.B. die Kanten der letzteren von einer ditetragonalen Pyramide zugeschärft sein können, würden an der hemiëdrischen entweder nur die an der weissen oder nur die an der schwarzen Seite der Kanten gelegenen Zuschärfungsflächen (als Pyramide dritter Ordnung) auftreten und somit gleichsam die Ungleichwerthigkeit der beiden Hälften jeder Fläche der scheinbar holoëdrischen Form documentiren.

Fig. 424.



3) Die **tetragonale Pyramide zweiter Ordnung**, dem Gesetze der pyramidalen Hemiëdrie unterworfen, Fig. 425, behält ebenfalls ihre volle Flächenzahl bei.

Fig. 425.

4) Das **ditetragonale Prisma** dagegen wird, wie Fig. 426 zeigt, durch diese Hemiëdrie zerlegt in zwei **tetragonale Prismen dritter Ordnung**

$$\pi\{kh0\} = + \left[\frac{\infty P n}{2}\right] \quad \text{und} \quad \pi\{hk0\} = - \left[\frac{\infty P n}{2}\right]$$

Dieselben stellen die Grenzformen der beiden Reihen von Pyramiden dritter Ordnung vor; das eine ist diejenige rechte Pyramide dritter Ordnung mit demselben Werth von n, deren $m = \infty$ ist, die andere die entsprechende linke.

Fig. 426.

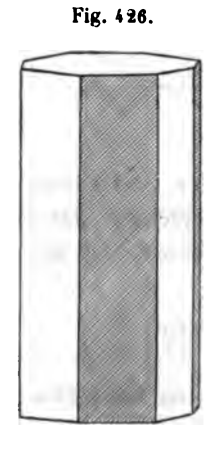


Fig. 427.

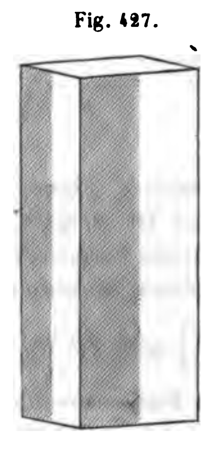
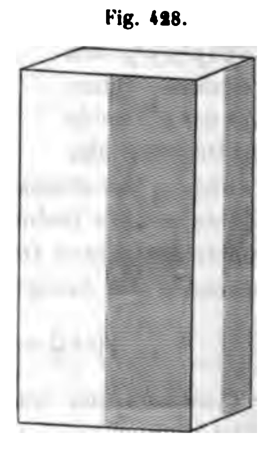


Fig. 428.



5) Das **tetragonale Prisma erster Ordnung** Fig. 427,
6) das **tetragonale Prisma zweiter Ordnung** Fig. 428, und
7) die **Basis** erfahren durch diese Hemiëdrie keine Aenderung.

Die Formen dieser Abtheilung unterscheiden sich demnach nur in Bezug auf die ditetragonalen Pyramiden und Prismen, welche als Pyramiden und Prismen dritter Ordnung erscheinen, von den holoëdrischen; diese Hemiëdrie entspricht also in jeder Beziehung der gleichbenannten im hexagonalen System. Ihre Formen können, da sie nur nach der Basis symmetrisch sind, Zwillingsbildung zeigen nach dem 1., wie nach dem 2. tetragonalen Prisma, welche Fälle beide zu dem gleichen Verwachsungsgesetz führen, wie an den Scheelitzwillingen gezeigt werden soll.

Beispiele. An folgenden Körpern hat man bisher erkannt, dass sie pyramidal-hemiëdrisch krystallisiren:

Wolframsaurer Kalk (Scheelit) = $CaWO^4$. $a : c = 1 : 1{,}5359$ Dauber. Häufige Combination Fig. 429: $o = \{111\}$, $e = \{101\}$, $s = \pi\{131\}$, $h = \pi\{313\}$, und zwar von den beiden Pyramiden dritter Ordnung die eine an der einen, die andere an der anderen Seite. Nicht selten Zwillinge nach einer Fläche eines tetragonalen Prisma (Fig. 430, von derselben Form, wie Fig. 429, vertical von oben gesehen), zu einander symmetrisch stehend in Bezug auf eine Fläche $\{010\}$, welche die Basiskante der Pyramide e abstumpfen würde; dieselben sind auch zu einander symmetrisch in Bezug auf das Prisma $\{110\}$, die Abstumpfung der Basiskanten von o $= \{111\}$. Zwei Krystalle in dieser relativen Stellung erscheinen nun vollständig durch einander gewachsen, wie es Fig. 431 darstellt (ebenfalls von oben gesehen), so dass von den acht Achteln des Zwillings je vier abwechselnde dem einen, vier dem andern Krystall ange-

Fig. 429.

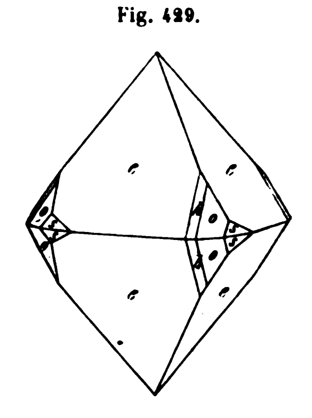


Fig. 430.

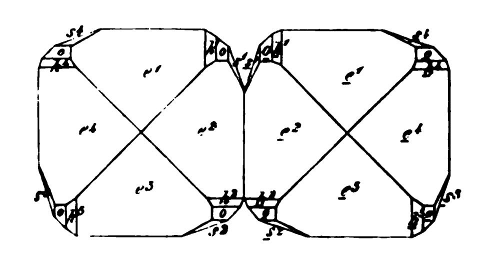
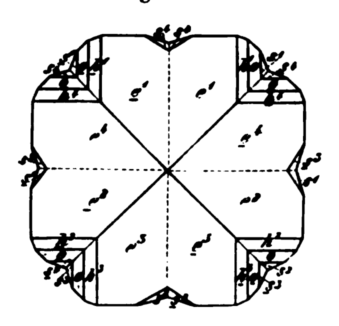


Fig. 431.



hören, wie es die übereinstimmende Numerirung der Flächen e, h, o und s in beiden Figuren zeigt. Da von den Flächen e je eine des einen Krystalls mit einer des andern in eine Ebene fällt, so erscheint das Ganze wie eine einfache tetragonale Pyramide von der Form $\{101\}$, aber mit einspringenden Winkeln an den vier Basisecken und den Mitten der Basiskanten. Durch die Zwillingsbildung ist gleichsam die holoëdrische Symmetrie wieder hergestellt. Bei einer nicht ganz vollständigen Durchdringung der Krystalle können die einspringenden Ecken theilweise fehlen, oder sie können durch grössere Ausdehnung von o und e zum Verschwinden gebracht werden, in welchem Falle dann der Krystall wie ein einfacher mit holoëdrisch ausgebildetem h erscheinen würde und von einem solchen wegen des Parallelismus der Hauptaxe in beiden Krystallen nicht zu unterscheiden wäre. Spaltbarkeit $\{111\}$ und $\{001\}$ unvollkommen. Doppelbrechung +,

$\omega = 1{,}918$, $\varepsilon = 1{,}934$ Roth.

Wolframsaures Blei (nat. Scheelbleispath) = $PbWO^4$. $a : c = 1 : 1,567$ Lévy. Combination Fig. 432: $o = \{111\}$, $p = \pi\{430\}$ als Prisma dritter Ordnung. Spaltbarkeit $\{111\}$ unvollkommen.

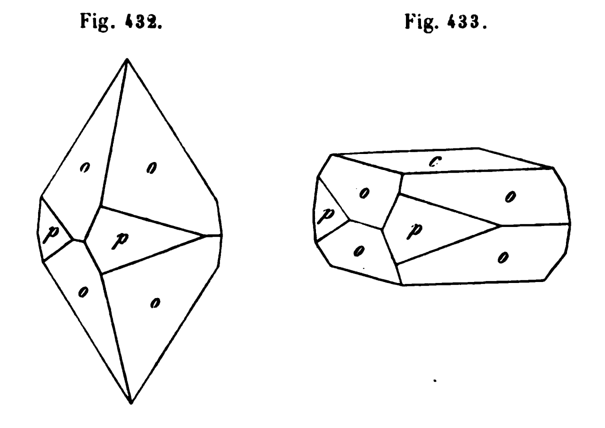


Fig. 432. Fig. 433.

Molybdänsaures Blei (Wulfenit) = $PbMoO^4$. $a : c = 1 : 1,574$ Dauber. Combination Fig. 433: $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $p = \pi\{430\}$. Spaltbarkeit $\{111\}$. Doppelbrechung —, $\omega = 2,402$, $\varepsilon = 2,304$ Roth. (Des Cloizeaux, Ann. d. min. XIV.).

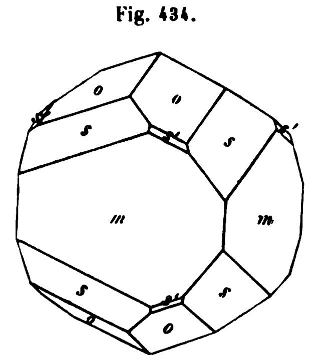


Fig. 434.

Erythroglucin = $C^4H^{10}O^4$ (Erythrit, Phycit). $a : c = 1 : 0,3762$ Schabus. Combination Fig. 434: $o = \{111\}$, $m = \{100\}$, $s = \pi\{131\}$, $s' = \pi\{311\}$. Von diesen beiden, zusammen die ditetragonale Pyramide $\{311\}$ bildenden Pyramiden dritter Ordnung ist entweder nur s vorhanden, oder s' mit ganz kleinen Flächen, wie es die Figur zeigt. Doppelbrechung —, stark.

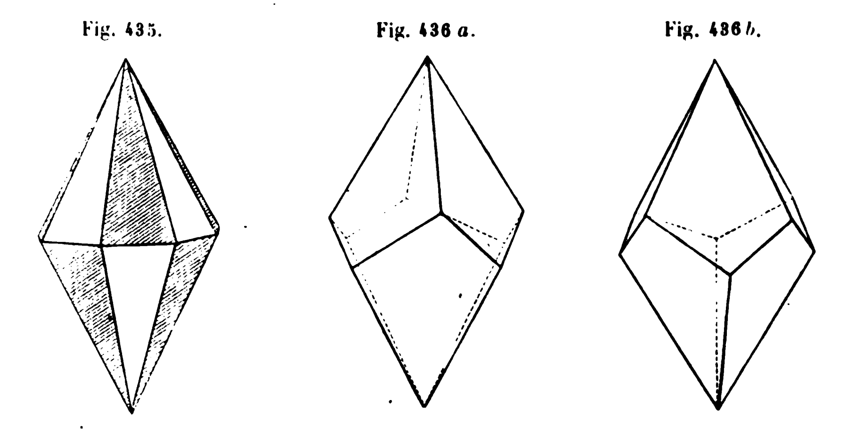
Roth	$\omega = 1,5419$	$\varepsilon = 1,5184$.
Gelb	1,5444	1,5210.
Blau	1,5495	1,5266.

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 12.)

§ 86. **Die trapezoëdrische Hemiëdrie.** Bei der dritten und letzten der möglichen Hemiëdrien findet die Zerlegung statt nach allen Symmetrieebenen (vergl. S. 410).

1) Die trapezoëdrisch-hemiëdrischen Formen der ditetragonalen Pyramiden entstehen demnach durch Auswahl von acht alternirend oben und unten gelegenen Flächen, Fig. 435. Aus jeder derselben resultiren demnach zwei Hemiëder, aus den weiss gelassenen Flächen die in Fig. 436*a*, aus den schwarz bezeichneten die in Fig. 436*b* dargestellte Gestalt, welche nach der Trapezform, die deren Flächen bei gleicher Centraldistanz besitzen, tetragonale Trapezoëder heissen. Die beiden aus einer ditetragonalen Pyramide entstehenden Trapezoëder sind enantiomorph, sie können durch keine Drehung zur Deckung gebracht werden. Denken wir uns zwei senkrechte Ebenen durch die Nebenaxen gelegt und dadurch die ditetragonale Pyramide in vier Quadranten getheilt, so entsteht eine hemiëdrische Form (Fig. 436*a*) dadurch,

dass die rechte obere und linke untere Fläche jedes Quadranten bleibt, die beiden anderen verschwinden; diese Form wird das rechte

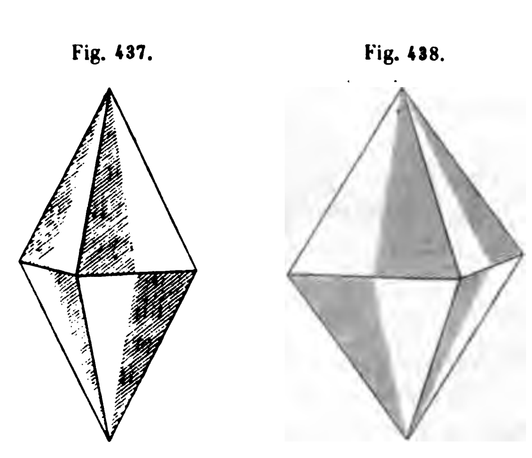

Fig. 435. Fig. 436 *a*. Fig. 436 *b*.

Trapezoëder genannt, die entgegengesetzte, in welcher also die linke obere Fläche jenes Quadranten auftritt, das linke; bezeichnet werden dieselben mit $\tau\{khl\}$ und $\tau\{hkl\}$

$$= \frac{mPn}{2}\,r \text{ und } \frac{mPn}{2}\,l$$

Die Trapezoëder besitzen je acht gleiche Polkanten und ebenso viel Mittelkanten, von denen vier stumpfere (bei den rechten Trapezoëdern von links unten nach rechts oben, bei den linken entgegengesetzt laufend, falls, wie in Fig. 435 und 436, $n > 2{,}4142$, vergl. S.397) und vier schärfere sind.

2) Die tetragonalen Pyramiden erster Ordnung, demselben Gesetze der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 437, liefern Formen, welche sich geometrisch nicht von den holoëdrischen unterscheiden, da von den zwei Flächen der ditetragonalen Pyramide, welche hier in eine Ebene fallen, eine zur hemiëdrischen Form gehört, also diese Ebene, und ebenso alle sieben anderen an dieser auftreten müssen.


Fig. 437. Fig. 438.

3) Das Gleiche ist der Fall mit den tetragonalen Pyramiden zweiter Ordnung, welche, wie Fig. 438 zeigt, durch diese Hemiëdrie nicht verändert werden.

4) Die ditetragonalen Prismen Fig. 439,
5) das tetragonale Prisma erster Ordnung Fig. 440,
6) das tetragonale Prisma zweiter Ordnung Fig. 441,
7) die Basis (s. Fig. 439 bis 441) liefern in Folge dessen ebenfalls

Fig. 439.

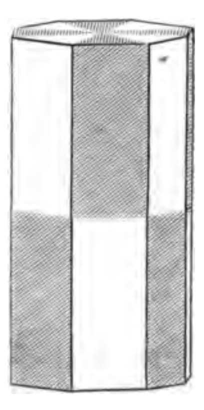


Fig. 440.

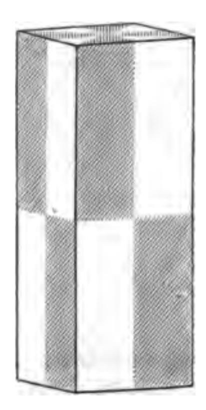
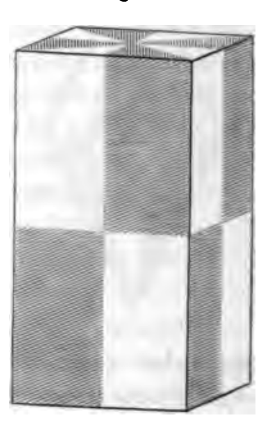


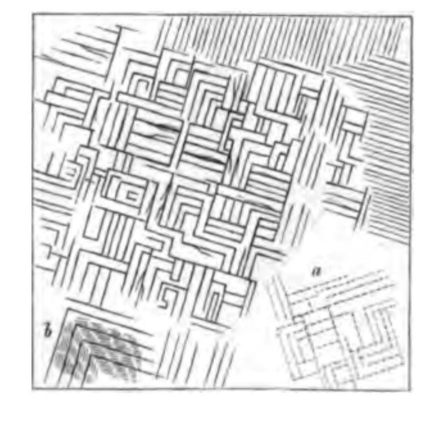
Fig. 441.



hemiëdrische Formen dieser Abtheilung, welche vollkommen mit den holoëdrischen übereinstimmen.

Da sich demnach die Krystallformen dieser Art von Hemiëdrie nur in Beziehung auf die ditetragonalen Pyramiden von den holoëdrischen unterscheiden, so müssen die hierher gehörigen Körper, deren man bis jetzt vier (sämmtlich organische Verbindungen) kennt, wenn keine Flächen von ditetragonalen Pyramiden an deren Krystallen vorkommen, sich nur durch ihre Circularpolarisation in der Richtung der Hauptaxe als hierher gehörig erkennen lassen. Durch diese Eigenschaft ist denn auch zuerst festgestellt worden, dass folgende Stoffe trapezoëdrisch-hemiëdrisch krystallisiren:

Fig. 442.



Beispiele. Schwefelsaures Strychnin $= (C^{21}H^{24}N^2O^2)S^2O^8 + 13$ aq. $a : c = 1 : 3{,}312$. Comb. (ähnlich Fig. 443) {111}, {001}; nach {001} äusserst vollkommen spaltbar. Spaltungsplatten, mit verdünnter Salzsäure geätzt, zeigen unter dem Mikroskop zahlreiche feine Risse (s. Fig. 442), welche stets gegen den Umriss der Platte nach derselben Seite gedreht erscheinen. Aetzt man auch die Unterseite der Platte und stellt das Mikroskop auf diese ein, so erweisen sich dieselben umgekehrt gedreht (s. in Fig. 442

bei a), wie es der trapezoëdrischen Hemiëdrie entspricht (Baumhauer, Zeitschr. f. Kryst. 5, 577). Doppelbrechung —. Drehung: 9—10° Roth (für 1 mm), stets links (ebenso, aber in schwächerem Grade, dreht die wässerige Lösung des Salzes, und ist dies das einzige bekannte Beispiel eines Körpers, der fest und in Lösung Circularpolarisation zeigt. — Des Cloizeaux, Ann. d. min. XI, 340.

Schwefelsaures Aethylendiamin $= (C^2H^4)H^4N^2, H^2SO^4$. $a : c = 1 : 1,4943$. Combination entweder Fig. 443: $2o = \{221\}$, $c = \{001\}$, oder Fig. 444: $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{101\}$, $2o' = \{201\}$. Spaltbarkeit vollkommen nach $\{001\}$. Doppelbrechung +. Drehung 15° 30′ für Natriumgelb. (V. von Lang, Sitz. Ber. d. Wien. Akad. LXV, II.).

Fig. 443.

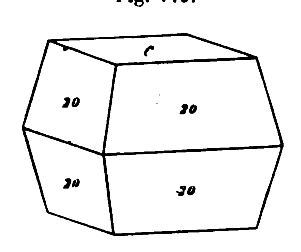
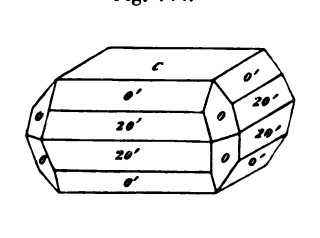


Fig. 444.



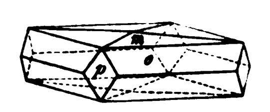
Kohlensaures Guanidin $= (CH^5N^3)^2H^2CO^3$. $a : c = 1 : 0,9910$. Combination $\{111\}$, $\{001\}$, $\{100\}$, die beiden letzteren klein, so dass diese Combination fast vollkommen einer regulären: $\{111\}$, $\{100\}$ gleicht. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen. Doppelbrechung —, nicht stark.

		ω	ε
Roth	Li =	1,4922	1,4818
Gelb	Na =	1,4963	1,4864
Grün	Tl =	1,5003	1,4899.

Drehung 12° 35′ Li, 14° 34′ Na, 17° 4′ Tl (Bodewig, Poggend. Ann. 157, 122).

Diacetylphenolphtaleïn $= C^{20}H^{12}O^4(C^2H^3O)^2$. $a : c = 1 : 1,3593$. Combination (s. Fig. 445): $o = \{111\}$, $p = \{100\}$ und $c = \{001\}$ oder statt der letzteren Fläche eine sehr stumpfe Pyramide m, annähernd $\{1.1.200\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$ deutlich. Doppelbrechung—. Die Krystalle sind theils rechts-, theils linksdrehend.

Fig. 445.



Drehung 17,1° Li, 19,7° Na, 23,8° Tl (Bodewig, Zeitschr. f. Kryst. 1, 72).

§. 87. **Mögliche Arten der Tetartoëdrie des tetragonalen Systems.** Wenden wir auf den allgemeinen Repräsentanten aller Formen, die ditetragonale Pyramide, zwei von den drei Arten der Hemiëdrie gleichzeitig an, so sind, wie in dem hexagonalen System (§. 76) drei Fälle möglich, von denen wieder, wie dort, nur zwei zu Formen führen, welche den Bedingungen der Hemiëdrie genügen. Während nämlich die gleichzeitige Anwendung der trapezoëdrischen (von links oben durchstrichen) und der

pyramidalen (von rechts oben durchstrichen) Hemiëdrie folgende Flächen übrig lässt:

~~1~~ 2 ~~3~~ 4 ~~5~~ 6 ~~7~~ 8
~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~

also nur vier die obere Hälfte der Hauptaxe schneidende, so führen die beiden anderen möglichen Wege zu folgenden Resultaten:

1) Gleichzeitige Anwendung der trapezoëdrischen und der sphenoidischen Hemiëdrie:

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ 8
1 ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~

lässt oben zwei gegenüberliegende Flächen und ein ebensolches Paar unten übrig, deren jedes sich daher, wie beim tetragonalen Sphenoid Fig. 412, in einer horizontalen Polkante schneidet. Die entstehende Form*) unterscheidet sich aber dadurch vom Sphenoid, dass jene beiden Kanten sich bei ihr nicht rechtwinkelig kreuzen, dass ihre Flächen daher nicht die Gestalt von gleichschenkeligen, sondern von ungleichseitigen Dreiecken haben, dass endlich von ihren vier Mittelkanten zwei abwechselnde schärfer, zwei stumpfer sind. Man sieht hieraus, dass diese Form vollständig dem trigonalen Trapezoëder entspricht, nur dass sie oben und unten, statt drei, nur zwei, zu den anderen unsymmetrisch gestellte Flächen besitzt. Jedes tetragonale Skalenoëder zerfällt dabei in ein rechtes und ein linkes Tetartoëder, welche enantiomorph sind, daher ein Körper, welcher in diese Abtheilung gehörte, circularpolarisirend sein könnte. Diese Tetartoëdrie, auf die übrigen Formen angewendet, führt in der That auch auf diejenigen, welche den entsprechenden in der trapezoëdrischen Tetartoëdrie des Hexagonalsystems ganz analog sind: die tetragonalen Pyramiden erster Ordnung werden Sphenoide (entsprechend den Rhomboëdern), die Pyramiden zweiter Ordnung werden horizontale Prismen, bestehend aus zwei gegenüberliegenden Flächen oben und den beiden parallelen unten (entsprechend den trigonalen Pyramiden), das ditetragonale Prisma liefert ein solches von rhombischem Querschnitt (entsprechend dem ditrigonalen), das Prisma erster Ordnung, wie die Basis, bleibt unverändert, das Prisma zweiter Ordnung verwandelt sich in ein paralleles Flächenpaar. Ein Krystall würde demnach schon als hierher gehörig erkannt sein, wenn er statt tetragonaler Pyramiden Sphenoide zeigte und zugleich die Eigenschaft der Circularpolarisation besässe.

2) Die gleichzeitige Anwendung der sphenoidischen und pyramidalen Hemiëdrie:

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ 8
~~1~~ 2 ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6 ~~7~~ ~~8~~

liefert offenbar als tetartoëdrische Formen der ditetragonalen Pyramiden tetragonale Sphenoide, welche sich von den hemiëdrischen nur durch ihre

*) Dergl. Formen werden wir in der Hemiëdrie des rhombischen Systems kennen lernen, wo solche in Fig. 494 *a*, *b* dargestellt sind.

Stellung unterscheiden, daher als »Sphenoide dritter Ordnung« zu bezeichnen sind. Wie diese den Rhomboëdern dritter Ordnung in der rhomboëdrischen Tetartoëdrie des hexagonalen Systems entsprechen, so auch die übrigen aus dieser Tetartoëdrie resultirenden Formen. Die Pyramiden erster und zweiter Ordnung werden Sphenoide erster und zweiter Ordnung (entsprechend den Rhomboëdern derselben Ordnungen), die ditetragonalen Prismen werden tetragonale dritter Ordnung, das Prisma erster und zweiter Ordnung, sowie die Basis, bleiben ungeändert.

Von keiner der beiden möglichen Arten der Tetartoëdrie des tetragonalen Systems ist es bisher gelungen, Beispiele aufzufinden; dieselben haben also vorläufig nur ein theoretisches Interesse, welches hauptsächlich in dem Nachweis besteht, dass die vollkommene Analogie des Tetragonal- und Hexagonalsystems, welche sich in allen Einzelheiten der Hemiëdrie documentirte, sich auch auf die Tetartoëdrie erstreckt.

Die physikalischen Eigenschaften der hexagonalen und tetragonalen Krystalle.

§. 88. **Specielle Darstellung des Zusammenhanges zwischen dem physikalischen Verhalten und der Form bei den einaxigen Krystallen.** Bereits in §. 44 wurde aus dem allgemeinen Grundgesetz der physikalischen Krystallographie abgeleitet, dass die hexagonalen und tetragonalen Krystalle ihrer Symmetrie wegen die Klasse der einaxigen bilden, und dass die physikalische Hauptaxe derselben mit ihrer krystallographischen zusammenfallen müsste. Nach der nunmehr erlangten Kenntniss der Formen beider Systeme, welche gezeigt hat, dass die letzteren nur dadurch verschieden sind, dass jede hexagonale Form $1\frac{1}{2}$ mal so viel Flächen besitzt, als die ihr entsprechende tetragonale, können wir jetzt dazu übergehen, den Zusammenhang der physikalischen und geometrischen Eigenschaften dieser beiden Klassen von Krystallen im Einzelnen zu erörtern.

Was zunächst die Elasticität betrifft, so ist klar, dass dieselbe ein Maximum oder Minimum in der Richtung der Hauptaxe haben muss, wodurch indessen nicht ausgeschlossen ist, dass nicht andere Maxima von höherem, oder Minima von geringerem Betrage vorhanden sein können. Von der Richtung der Hauptaxe ausgehend, nimmt die Elasticität zu oder ab, aber nach verschiedenen Richtungen verschieden; nur innerhalb gleichwerthiger Symmetrieebenen in gleicher Weise, so dass die Elasticität denselben Werth besitzt in den Richtungen der zwei, resp. drei Nebenaxen in tetragonalen, resp. hexagonalen Krystallen, ebenso wie sie in den zwei, resp. drei Zwischenaxen gleich sein muss. Diese Gleichheit der Elasticität findet aber nur statt bei holoëdrischen Krystallen. Bei hemiëdrischen, bei denen die Symmetrie eine geringere ist, zeigen auch die Elasticitätsverhältnisse keinen höheren Grad von Symmetrie, als die geometrischen. Dies ist sehr detaillirt nachgewiesen worden durch die bereits S. 363 erwähnte Untersuchung des Kalkspaths von Baumgarten; denkt man sich die in Fig. 331 in einem Durchschnitt dargestellte vollständige Elasticitätsfläche,

so bildet dieselbe eine sehr complicirte krumme Oberfläche, welche, wenn man sie sich um das Spaltungsrhomboëder herum beschrieben denkt, über den drei oberen, wie über den drei unteren Flächen desselben, also alternirend, je einen Buckel, dazwischen je eine Einsenkung zeigt und nur symmetrisch ist zu den drei verticalen Ebenen, in welchen die Zwischenaxen liegen, welche Ebenen ja auch die einzigen Symmetrieebenen des Rhomboëders sind.

Die Härte nach verschiedenen Richtungen ist noch bei sehr wenigen einaxigen Körpern genauer untersucht worden (s. Exner, Härte an Krystallen S. 45 f.), nämlich am unterschwefelsauren Blei, bei dessen Krystallen die Differenzen derselben so gering sind, dass sie in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen, daher die Härtecurven auf allen Flächen Kreise geben (im Zusammenhang damit sind auch die Differenzen der Cohäsion bei diesem Körper so gering, dass er keine erkennbare Spaltbarkeit zeigt); ferner liegen Beobachtungen vor am Kalkspath, nach welchen z. B. die Härtecurve auf der Basis drei Maxima und drei Minima zeigt, welche ganz genau der rhomboëdrischen Symmetrie entsprechen. Da es hiernach auch für die noch nicht untersuchten einaxigen Krystalle anzunehmen ist, dass sie in Bezug auf die Härte sich ähnlich verhalten, und dass sie, wie es bei regulären Körpern gezeigt wurde, die kleinste Zahl von Minimis und Maximis der Härte zeigen, welche ihrer Symmetrie entsprechend möglich ist, so gelangt man hier durch analoge Betrachtungen, wie sie §. 63 bei den regulären Körpern angestellt wurden, zu dem Schlusse, dass eine Spaltbarkeit nicht existiren könne parallel den Flächen einer dihexagonalen oder ditetragonalen Pyramide oder eines dihexagonalen, resp. ditetragonalen Prismas, sondern nur nach der Basis, einer hexagonalen oder tetragonalen Pyramide (bei einem rhomboëdrisch-hemiëdrischen oder einem tetartoëdrischen Krystall nach einem Rhomboëder), oder endlich nach einem hexagonalen resp. tetragonalen Prisma. Die Richtigkeit jener Annahme wird dadurch bestätigt, dass in der That keine anderen Spaltungsrichtungen beobachtet werden, als die zuletzt angeführten. In der Richtung der Hauptaxe kann sowohl ein Cohäsionsminimum, dies giebt basische Spaltbarkeit, als ein Maximum liegen; in letzterem Falle liegen die Minima entweder in den Normalen zu Pyramiden oder Prismen. Daraus folgt, dass die Spaltbarkeit nach {001} etwa so häufig vorkommen muss, als pyramidale und prismatische zusammen genommen, d. h. dass die basische Spaltbarkeit die häufigste sein muss, ein Schluss, welcher durch die Erfahrung bestätigt wird.

Die optischen Eigenschaften ergeben sich sämmtlich aus dem allgemeinen Grundgesetz der physikalischen Krystallographie. Nach diesem ist jede geometrische Symmetrieebene auch eine physikalische; dabei ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass in physikalischer Beziehung noch mehr Symmetrieebenen existiren, welche keine geometrischen sind, d. h. dass in Bezug auf irgend eine physikalische Eigenschaft die Symmetrie eine noch höhere ist. In den mit einander in innigem Zusammenhange stehenden

Eigenschaften der Elasticität, Cohäsion und Härte lernten wir solche kennen, deren Symmetrie bei den tetragonalen und hexagonalen Krystallen absolut zusammenfällt mit deren geometrischer Symmetrie; die optischen Verhältnisse zeigen natürlich dieselbe Symmetrie, aber zugleich noch eine solche höheren Grades. Es sind in optischer Beziehung nicht blos alle Nebenaxen, wie alle Zwischenaxen, unter einander gleichwerthig, sondern auch alle anderen Richtungen, welche denselben Winkel mit der Hauptaxe einschliessen. Da die optische Elasticitätsfläche der einaxigen Krystalle, deren Axe mit ihrer geometrischen Hauptaxe zusammenfällt, symmetrisch ist zu jedem Hauptschnitt, d. h. zu jeder verticalen, durch die optische Axe gehenden Ebene, so besitzen die hexagonalen und tetragonalen Krystalle ausser der horizontalen Haupt-Symmetrieebene in optischer Beziehung noch unendlich viele Symmetrieebenen, da jede Verticalebene eine solche ist. Die Erscheinungen, welche ein durch zwei parallele Flächen betrachteter Krystall im polarisirten Licht zeigt, ergeben sich unmittelbar aus dem, was in der ersten Abtheilung über die optischen Eigenschaften der einaxigen Krystalle gesagt worden ist. Blicken wir durch die Basis eines tetragonalen oder hexagonalen Krystalls, welcher entweder nach derselben tafelartig ausgebildet ist, oder an welchem wir jenes Flächenpaar durch Abschleifen künstlich hervorgebracht haben, so bleibt derselbe zwischen gekreuzten Nicols im parallelen Licht bei jeder Drehung dunkel*), im convergenten Licht sehen wir das Axenbild der einaxigen Krystalle. Betrachten wir dagegen einen tetragonalen oder hexagonalen Krystall durch irgend ein anderes Flächenpaar im parallelen Licht, so wird er bekanntlich beim Drehen hell und dunkel, und zwar das letztere jedesmal dann, wenn sein Hauptschnitt, d. h. die Ebene durch die Hauptaxe und durch die Normale zu jenem Flächenpaar (die Richtung der hindurchgehenden Strahlen), einem der beiden gekreuzten Nicolhauptschnitte parallel ist. Durch die Lage des Krystalls gegen die Nicols, wenn diese Auslöschung des Lichtes stattfindet, sind die Schwingungsrichtungen der beiden aus dem Krystall austretenden Strahlen bestimmt, denn die des ausserordentlichen ist im Hauptschnitt, also die Durchschnittsrichtung desselben mit der Ebene des Flächenpaares, die des ordentlichen in der letzteren und senkrecht zur ersteren. Wie sich nun die Schwingungsrichtungen einer Krystallplatte gegen die krystallographischen Richtungen verhalten, ergiebt sich ganz von selbst. Nehmen wir einen prismatisch ausgebildeten tetragonalen oder hexagonalen Krystall und blicken durch irgend zwei parallele Prismenflächen, so müssen die Schwingungsrichtungen offenbar, die eine parallel, die andere senkrecht zu den Prismenkanten stehen: der Krystall muss dunkel erscheinen, sobald seine Hauptaxe der Schwingungsrichtung des einen der beiden Nicols parallel ist.

*) Falls er nicht circularpolarisirend ist, denn alsdann zeigt er eine von seiner Dicke und Stärke der Drehung abhängige Farbe, welche aber dieselbe bleibt, wenn man ihn in seiner Ebene dreht.

Betrachten wir dagegen eine tetragonale oder hexagonale Pyramide durch zwei entgegengesetzte Flächen im polarisirten Licht, so ist die Schwingungsrichtung des ordentlichen Strahls, da sie senkrecht zum Hauptschnitt ist, parallel der Basiskante der betreffenden Pyramide, die des ausserordentlichen parallel der Höhenlinie des Dreiecks, welches die Austrittsfläche mit den benachbarten bildet, oder, was dasselbe ist, parallel der Halbirenden des ebenen Winkels zwischen den beiden die Fläche begrenzenden Polkanten. Einen besonderen Fall hiervon stellt das Rhomboëder dar; blicken wir durch ein paralleles Rhomboëderflächenpaar, so müssen wir finden, dass die Schwingungsrichtungen den beiden Diagonalen der Flächen parallel sind.

Was die Absorption des Lichtes in den hexagonalen und tetragonalen Krystallen betrifft, so ist die Flächenfarbe der Basis, d. h. die Farbe des durch eine basische Platte hindurchgelassenen Lichtes = A (vergl. S. 146), d. i. die Farbe der senkrecht zur Axe schwingenden Strahlen; die Flächenfarbe jeder einer prismatischen Fläche parallelen Platte ist die am meisten von jener abweichende (s. übrigens a. a. O.).

Die thermischen Eigenschaften ergeben sich ebenso aus den Darlegungen der §. 32 u. 33. Die Winkel sämmtlicher Prismenflächen zu einander können durch keine Temperaturänderung alterirt werden, ebenso wenig ihre Neigung gegen die Basis. Dagegen müssen die Neigungen aller der thermischen, d. i. der krystallographischen, Hauptaxe nicht parallelen Flächen (ausser der Basis) mit der Temperatur variiren; und da alle Richtungen, welche gleichen Winkel mit der Hauptaxe bilden, thermisch, wie optisch, gleichwerthig sind, so findet die Aenderung der Neigung für alle gleichgeneigten Flächen auch gleichartig statt, d. h. die Polkanten einer hexagonalen oder tetragonalen Pyramide oder eines Rhomboëders werden alle gleichmässig spitzer oder stumpfer, wenn die Temperatur des Krystalles steigt. Wenn sich also auch das Axenverhältniss der Substanz ändert, so bleibt Eines doch völlig unabhängig von der Temperatur bestehen, das ist die Symmetrie des Krystalls, oder, was dasselbe sagen will, sein Krystallsystem. Dieses Gesetz, dass das System eines Krystalles durch keine Temperaturänderung desselben alterirt wird, ist ein ganz allgemeines, es fällt zusammen mit demjenigen, welches wir S. 205 als das Gesetz »der Erhaltung der Zonen« bezeichneten.

C. Krystalle ohne Hauptaxe.

(Optisch zweiaxige Krystalle.)

IV. Das rhombische Krystallsystem.

§. 89. **Die Symmetrie der rhombischen Krystalle.** Das rhombische Krystallsystem umfasst alle Formen, welche zwar einer Haupt-Symmetrieebene entbehren, aber drei zu einander senkrechte gewöhnliche Symmetrieebenen besitzen. Von den Normalen zu diesen Ebenen, den drei Symmetrieaxen der rhombischen Formen, kann also keine mit einer anderen vertauscht werden, ohne die Gestalt zu ändern, keine ist einer anderen gleichwerthig. Nach dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie müssen die drei Symmetrieebenen nun auch solche sein in Bezug auf alle physikalischen Eigenschaften der rhombischen Krystalle. Die Elasticität kann ihr Hauptminimum oder -maximum haben in irgend einer der drei Symmetrieaxen, sie kann aber auch Maxima und Minima haben in anderen Richtungen, nur müssen diejenigen, in welchen sie den gleichen Werth besitzt, symmetrisch zu einander liegen in Bezug auf jene drei Ebenen. Trägt man also auf jede Richtung, von einem gemeinsamen Mittelpunkt aus, eine Länge, proportional dem Werthe des Elasticitätscoëfficienten in dieser Richtung, auf, so liegen die Endpunkte aller dieser Radien auf einer geschlossenen krummen Oberfläche, welche symmetrisch getheilt wird durch jede der drei krystallographischen Symmetrieebenen. Ebenso muss nach denselben die Härte und die Cohäsion symmetrisch sein. Existirt in einem rhombischen Krystall also nach irgend einer Richtung ein Minimum der Cohäsion (senkrecht dazu also Spaltbarkeit), so muss das Gleiche stattfinden in jeder Richtung, welche zu jener symmetrisch liegt in Bezug auf eine der drei erwähnten Ebenen.

Wie bereits hergeleitet wurde (§. 44), müssen die Krystalle ohne Hauptaxe optisch zweiaxig sein. Bei der jetzt zu betrachtenden ersten Klasse derselben, der rhombischen, müssen die optischen Verhältnisse in ihrer Gesammtheit der Symmetrie nach den drei auf einander senkrechten krystallographischen Symmetrieebenen unterworfen sein. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die drei Hauptschnitte der optischen Elasticitäts- und der Wellenfläche absolut zusammenfallen, und zwar für alle Farben, mit den drei geometrischen Symmetrieebenen der Krystalle. Dann fallen die Hauptschnitte

also auch für die verschiedenen Farben zusammen, d. h. wir haben denjenigen einfachsten Fall der optisch zweiaxigen Krystalle vor uns, der S. 110 f. ausführlich erörtert worden ist. Daraus folgt, dass die Richtungen der drei optischen Elasticitätsaxen zugleich diejenigen der drei Symmetrieaxen sind; dass stets eine der letzteren die Schwingungsrichtung der grössten Lichtgeschwindigkeit, eine andere die der kleinsten, die dritte die der mittleren ist; dass die optische Axenebene bei den rhombischen Krystallen stets eine der drei Symmetrieebenen ist, wobei nicht ausgeschlossen, dass für einen Theil der Farben die eine, für den übrigen Theil eine der beiden anderen Symmetrieebenen optische Axenebene ist (vergl. S. 112). Diese optische Symmetrie und ihr Verhältniss zur geometrischen muss auch erhalten bleiben, sobald der Krystall eine andere Temperatur annimmt; ändert sich hierbei auch der Winkel der optischen Axen, so bleibt die Lage der Mittellinie doch immer constant einer Symmetrieaxe parallel; ist die Aenderung der drei Hauptbrechungsindices so verschieden, dass ein Wechsel der Axenebene eintritt, so geht dieselbe in eine andere der drei Symmetrieebenen über u. s. f. (vergl. S. 176).

Auch die thermischen Verhältnisse der rhombischen Krystalle befolgen das allgemeine Grundgesetz der physikalischen Krystallographie. So ist eine der drei Symmetrieaxen stets die Richtung der grössten Ausdehnung durch die Wärme, eine andere die der kleinsten, die dritte die der mittleren. Da die thermische Ausdehnung des Krystalls somit symmetrisch zu den geometrischen Symmetrieebenen erfolgt, so mögen die Aenderungen der Dimensionen nach den verschiedenen Richtungen noch so ungleich sein, niemals wird dadurch der Grad der Symmetrie eines rhombischen Krystalls geändert werden können.

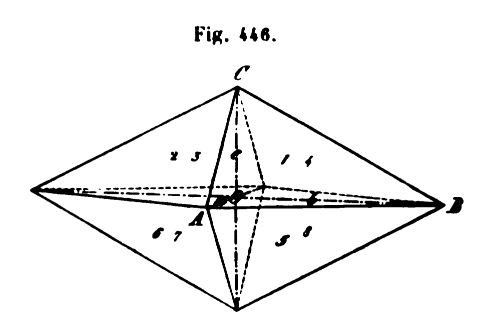
Endlich gilt das Gleiche auch von den übrigen physikalischen Eigenschaften; eine der drei Symmetrieaxen ist z. B. die Richtung des stärksten Para- oder Diamagnetismus, die beiden anderen die des mittleren und kleinsten u. s. f. Dabei aber ist es selbstverständlich nicht nöthig, dass dieselbe Symmetrieaxe, der die Richtung der grössten Lichtgeschwindigkeit parallel ist, zugleich auch die Axe der grössten thermischen Ausdehnung, der grössten Wärmeleitungsfähigkeit u. s. w. ist, da ja selbst für das Licht diese Uebereinstimmung nicht allgemein ist, indem es Krystalle giebt, in welchen die Richtung der mittleren optischen Elasticität in Bezug auf eine Farbe diejenige der kleinsten für eine andere Farbe ist.

§. 90. **Wahl der Axen und der Grundform.** Bei der Betrachtung der bisherigen Krystallsysteme wurden stets Symmetrieebenen zu Axenebenen gewählt, weil alsdann die Indices der übrigen Krystallflächen die einfachsten Werthe erhielten, und vor Allem, weil in diesem Falle alle Flächen einer einfachen Form gleiche Indices hatten. Es wird daher nicht zweifelhaft sein, dass es in jeder Hinsicht das Einfachste und Bequemste sei, im rhombischen Systeme ebenso zu verfahren; nur haben wir hier keine Wahl unter den Symmetrieebenen, da eben nur die erforderliche Zahl von dreien

vorhanden ist. Nehmen wir also diese zu Axenebenen, so werden die drei Symmetrieaxen die Axen, auf welche wir die Formen des rhombischen Systems zu beziehen haben, und welche sämmtlich zu einander senkrecht stehen, so dass diese Wahl auch noch den wichtigen Vortheil sehr vereinfachter Berechnung mit sich bringt. Unter diesen Axen ist nun aber keine eine Hauptaxe, es ist also völlig gleichgültig, welche derselben wir vertical aufstellen, da alle drei gleichsam von demselben Range sind.

Hiermit haben wir von den Elementen eines Krystalls nur die Axenwinkel (sämmtlich $= 90^{\circ}$); um auch das Parameterverhältniss festzustellen, haben wir nun eine Grundform auszuwählen, d. h. eine Fläche, welche die drei Axen in endlichen Abständen schneidet, und das Verhältniss der letzteren festzustellen. Sei dieses $= a : b : c$, oder, wenn wir eine Axenlänge gleich 1 setzen, $= a : 1 : c$, so beziehen sich die absoluten Längen a, b und c auf die drei Symmetrieaxen; in deren Richtungen ist aber bekanntlich die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme eine verschiedene, diese Längen ändern sich also mit der Temperatur nicht in dem gleichen Verhältnisse, folglich ändert sich mit dieser das Verhältniss $a : b : c$, oder die absoluten Zahlen a und c in der Relation $a : 1 : c$, stetig: es müssen diese also irrationale Zahlen sein und genau genommen nur für eine bestimmte Temperatur gelten. Bei einer anderen hat die zur Grundform gewählte Fläche andere Neigungswinkel (wenn auch nur sehr wenig verschiedene) zu den Axenebenen (vergl. S. 170). Die Symmetrie des Krystalls erfordert nun zu dieser Fläche noch sieben zugehörige. Seien in Fig. 446 $a = OA$, $b = OB$ und $c = OC$ die Parameter der Grundform, so erfordert die Symmetrie nach der Ebene ac (d. i. AOC) zu jener, mit 1 bezeichnet, die Fläche 2, die Symmetrie nach bc die Flächen 3 und 4, und endlich die Symmetrie nach ab die vier unteren Flächen 5—8. So erhalten wir als vollständige Grundform eine Gestalt, welche, weil ihr Durchschnitt durch jede der drei Symmetrieebenen die Gestalt eines Rhombus hat, rhombische Pyramide genannt wird. Es ist üblich, die zur Grundform gewählte*) und die primäre genannte Pyramide so zu stellen, dass von den beiden horizontalen Axen die kürzere auf den Beobachter zuläuft, also mit a bezeichnet wird: da man gewöhnlich $b = 1$ setzt, so ist demnach der

Fig. 446.

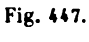


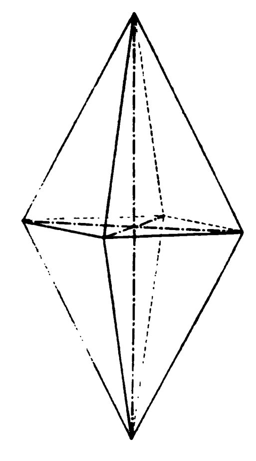
*) Welche von den verschiedenen möglichen oder vorkommenden Pyramiden eines rhombischen Krystalls man zur Grundform wählt, ist an und für sich gleichgültig (vergl. darüber die Bemerkungen S. 319).

Zahlenwerth von a stets kleiner als 1. Man nennt nun diese Axe die Brachydiagonale (auch »Brachyaxe«), die querlaufende b die Makrodiagonale (oder »Makroaxe«). Dass es völlig gleichgültig ist, welche der drei Symmetrieaxen wir vertical stellen, wurde bereits oben erwähnt; die dazu gewählte nennt man Verticalaxe*) oder kurz Verticale, und bezeichnet, wie bisher, ihre Länge mit c. Die in Fig. 446 dargestellte Pyramide hat das Axenverhältniss:

$$a : b : c = 0{,}4271 : 1 : 0{,}5258.$$

Wir hätten aber mit demselben Rechte auch jede der beiden anderen, z. B. die mit b bezeichnete Axe, zur Verticalen machen können; dann würde die bisherige Verticale zur Makrodiagonalen, die frühere Brachydiagonale würde es auch in der neuen Stellung bleiben, und wir hätten die in Fig. 447 dargestellte Form mit dem Axenverhältniss


Fig. 447.



$$a : b : c = 0{,}8130 : 1 : 1{,}9037$$

(d. i. $= 0{,}4271 : 0{,}5258 : 1$).

Bei gleicher Ausdehnung der Flächen besitzt die rhombische Pyramide sechs Ecken, welche 2+2kantig sind, da von den vier in einer solchen zusammenstossenden Kanten je zwei gegenüberliegende gleich (wegen der Symmetrie), zwei benachbarte im Allgemeinen ungleich sein müssen (weil sonst die Pyramide tetragonal wäre, also eine höhere Symmetrie hätte). Daraus folgt, dass die genannte Gestalt dreierlei Kanten besitzt, von denen je vier, welche einer Symmetrieebene parallel sind und deren Winkel von derselben halbirt wird, gleich stumpf sind. Haben wir uns für eine bestimmte Stellung der Pyramide entschieden, wie Fig. 446, so nennen wir die vier unter einander gleichen horizontalen Kanten, z. B. AB, Basiskanten, die übrigen acht Polkanten, unter denen wir zweierlei zu unterscheiden haben, stumpfere, wie AC, und schärfere, wie BC.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass es auch rhombische Pyramiden geben könne (und zwar sind solche bei jeder Substanz möglich), welche fast genau gleiche Winkel der stumpferen und schärferen Polkanten haben; ist nun die Brachydiagonale die Richtung der stärksten Ausdehnung durch die Wärme, so wird es eine Temperatur geben, bei welcher jene genau gleich sind, die Pyramide in geometrischer Beziehung also genau mit einer tetragonalen übereinstimmt. Sie ist aber keine solche, denn dazu müsste sie nicht nur deren krystallographische Symmetrie für alle Temperaturen, sondern auch deren physikalische Symmetrie besitzen, was keineswegs der Fall ist.

*) Die vertical gestellte Symmetrieaxe wurde früher allgemein »Hauptaxe« genannt. Es bedarf nach dem Bisherigen keiner Erklärung weiter, dass dies unpassend und geeignet ist, eine irrthümliche Ansicht über die Bedeutung derselben zu erregen.

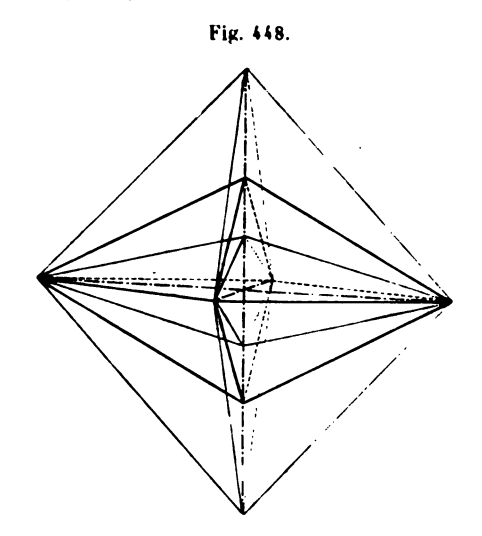
Von den dreierlei Kantenwinkeln, welche die rhombischen Pyramiden (von dem letzterwähnten Fall abgesehen) besitzen, bedarf es nur der Kenntniss zweier, um das Parameterverhältniss zu berechnen, da dasselbe nur zwei von einander unabhängige Grössen enthält.

§. 91. **Ableitung und Bezeichnung der rhombischen Pyramiden.** Die von uns zur Grundform gewählte Fläche, mit ihren zugehörigen die primäre Pyramide bildend, ist an und für sich eine ganz beliebige, und es können an den Krystallen derselben Substanz noch zahlreiche andere rhombische Pyramiden auftreten, deren Axenverhältnisse jedoch in rationaler Relation zu dem der primären stehen, oder deren Indices, bezogen auf die Parameter jener, rationale Zahlen sein müssen. Die Gesammtheit aller in derartigem Zusammenhang stehender Pyramiden (mit Einschluss der besonderen Fälle, welche wir als eigenthümliche Formen im nächsten § kennen lernen werden), bildet die Krystallreihe des betreffenden Körpers. Welche von allen den etwa an den Krystallen desselben vorkommenden oder möglichen Pyramiden wir zur primären wählen, hängt wesentlich von Zweckmässigkeitsgründen ab; so wählt man entweder die am häufigsten vorherrschende, oder diejenige, auf welche sich die übrigen mit den einfachsten Indices beziehen lassen, oder durch welche die Beziehungen des Körpers zu der Krystallform chemisch verwandter Stoffe deutlicher hervortritt. Die üblichen Bezeichnungen der so gewählten Primärform sind:

{111} nach Miller,
P nach Naumann.

Von dieser haben wir nun alle übrigen Formen abzuleiten. Zunächst ist es klar, dass Pyramiden zu den krystallonomisch möglichen desselben Körpers gehören werden, welche dasselbe Verhältniss der Brachy- zur Makrodiagonale haben, wie die primäre, aber eine in rationalem Verhältnisse kleinere oder grössere Verticalaxe; diese Formen bezeichnen wir, je nachdem sie spitzer oder stumpfer als *P* sind, mit mP oder $\frac{1}{m}P$, wo m eine rationale Zahl und grösser als 1 ist.

Fig. 448.



Die so von der primären abgeleiteten Pyramiden nennt man diejenigen der Verticalreihe; ihr Miller'sches Zeichen ist $\{hhl\}$, da die beiden ersten Indices in demselben Verhältniss, nämlich 1 : 1, stehen müssen, wie bei {111}. In Fig. 448 sind neben der stärker gezeichneten {111} *P* (= Fig. 446) zwei solcher abgeleiteter Pyramiden dargestellt, nämlich {221} $2P$ und {112} $\frac{1}{2}P$.

Es ist unschwer, sich vorzustellen, wie die Glieder dieser Verticalreihe, deren Grenzform wir erst im nächsten Paragraphen kennen lernen werden, mit einander combinirt erscheinen; diejenige Pyramide, deren letzter, auf die Verticalaxe bezüglicher Index kleiner ist, als die beiden anderen, schärft die Basiskanten der stumpferen zu; umgekehrt spitzt die letztere die Polecken der spitzeren Pyramiden so zu, dass die Combinationskanten den Basiskanten derselben parallel sind. Die Flächen sämmtlicher rhombischer Pyramiden einer Verticalreihe, welche nach der Numerirung der in Fig. 446 dargestellten die Zahlen 1, 3, 5, 7 tragen, liegen in einer Zone, da sie sämmtlich einer und derselben Basiskante parallel sind, ebenso alle mit 2, 4, 6, 8 zu bezeichnenden.

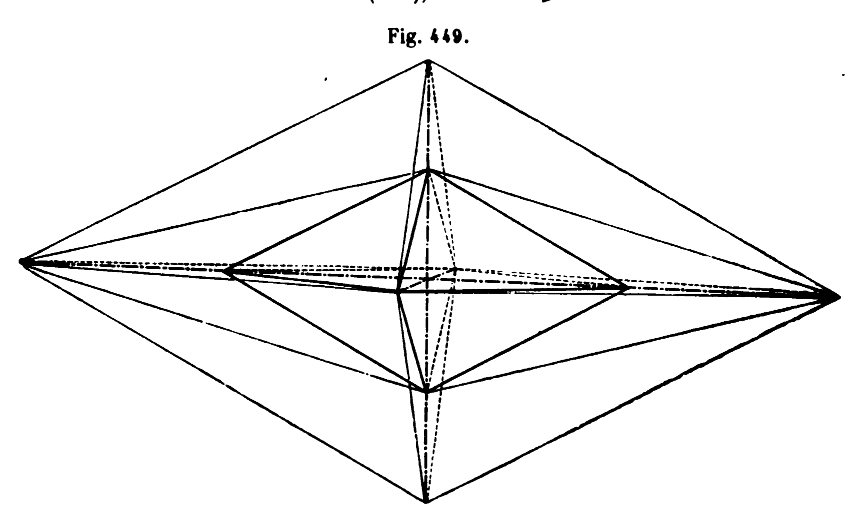
Weitere Pyramiden derselben Krystallreihe werden wir erhalten, wenn wir das Verhältniss der Brachydiagonalen zur Verticalen $a : c$ constant, und die Länge der Makrodiagonalen um rationale Vielfache ihrer eigenen Länge variiren lassen. So resultiren Pyramiden einer sogenannten makrodiagonalen Reihe, welche bezeichnet werden mit

$$\bar{P}n = \{hkh\},$$

wo n, resp. das ihm gleiche $\frac{h}{k}$ angeben, das wie Vielfache die Makrodiagonale von derjenigen der Pyramide P ist. Alle Pyramiden $\bar{P}n$, wenn $n > 1$, erscheinen an P als Zuschärfungen der stumpferen Polkanten. Wie von der primären, lässt sich aber auch von jeder anderen Pyramide der Verticalreihe, so z. B. von $2P$, eine neue makrodiagonale Reihe ableiten, deren Zeichen alsdann $2\bar{P}n = (2h.k.h)$. Das allgemeine Zeichen aller Pyramiden der makrodiagonalen Reihen ist somit

$$m\bar{P}n = (hkl), \text{ worin } h > k.$$

Fig. 449.



Von diesen sind in Fig. 449, bezogen auf dieselbe (stärker gezeichnete) Grundform, wie in Fig. 448, zwei Beispiele dargestellt, nämlich

$$\bar{P}2 = \{212\}$$
$$2\bar{P}2 = \{211\}.$$

Endlich giebt es noch eine dritte Art, krystallonomisch mögliche Pyramiden von der primären abzuleiten, durch Verlängerung der Brachydiagonalen um rationale Vielfache ihrer Länge, so dass wir eine brachydiagonale Reihe von Pyramiden mit dem Zeichen

$$\breve{P}n = (hkk) \ (k > h)$$

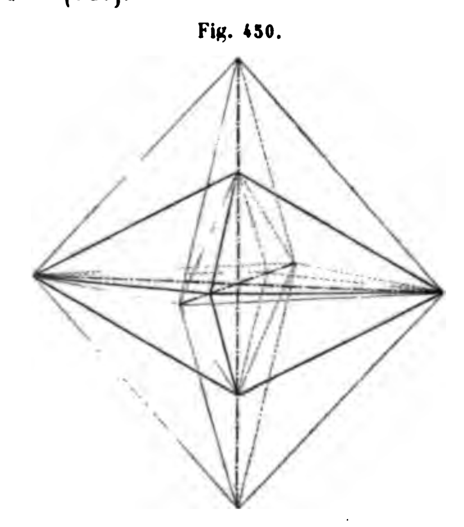
erhalten, welche die schärferen Polkanten von P zuschärfen. Eine solche Reihe kann aber auch hier von jeder Pyramide der verticalen Reihe abgeleitet werden, daher es solcher beliebig viele giebt, deren allgemeines Zeichen

$$m\breve{P}n = (hkl), \text{ worin } h < k.$$

Fig. 449 zeigt neben der mit der früheren identischen Grundform die beiden brachydiagonalen Pyramiden

$$\breve{P}2 = \{122\}$$
$$\text{und } 2\breve{P}2 = \{121\}.$$

Fig. 450.



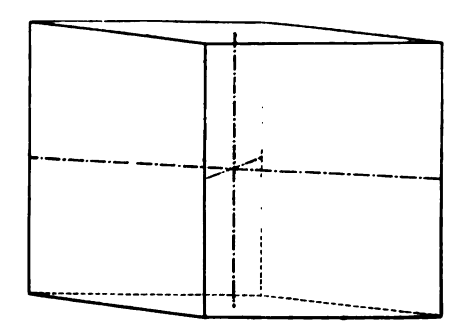
Bei der Ableitung der makrodiagonalen und der brachydiagonalen Pyramiden wurde nur von einer rationalen Vervielfältigung einer Axe gesprochen, also der Coëfficient n stets > 1 angenommen. Es ist aber leicht, zu zeigen, dass damit wirklich alle möglichen Fälle erschöpft sind, denn würde man z. B. von P eine Pyramide $\bar{P}\frac{1}{2}$ ableiten, welche dasselbe Verhältniss $a : c$, wie die primäre, aber nur eine halb so grosse Makrodiagonale habe, so ist deren Axenverhältniss $= a : \frac{1}{2}b : c$, d. i. aber $= 2a : b : 2c$; diese Pyramide fällt also zusammen mit der brachydiagonalen Pyramide $2\breve{P}2$, und so jede andere mit gebrochenem n. Wir können also, wie weiterhin immer geschehen soll, uns darauf beschränken, $n > 1$ zu nehmen.

Alle Zeichen der abgeleiteten Pyramiden müssen selbstverständlich geändert werden, wenn eine andere Grundform gewählt wird; die neuen ergeben sich unmittelbar aus dem Verhältniss, in welchem die Parameter der neuen Grundform zu denen der früheren stehen.

§. 92. **Ableitung und Bezeichnung der rhombischen Prismen und Pinakoide.** In der oben besprochenen verticalen Ableitungsreihe werden die Pyramiden mP um so spitzer, je grösser der Coëfficient m wird, ihre Flächen nähern sich um so mehr der verticalen Stellung; das Endglied der Reihe ist diejenige rhombische Pyramide, deren $a : b$ demjenigen der primären gleich ist, deren m aber $= \infty$. Da die Flächen dieser Form der

Verticalaxe parallel sind, so fallen bei diesem Grenzwerthe von m je zwei über einander liegende Pyramidenflächen in eine Ebene, die Gestalt besteht nur aus vier verticalen, den Raum allein nicht umschliessenden Flächen, in Fig. 451 in Combination mit der horizontalen Symmetrieebene dargestellt, und heisst das primäre rhombische Prisma:

Fig. 451.



$$\infty P = \{110\}.$$

Der horizontale Querschnitt dieser Form ist derjenige der primären Pyramide, sie bildet also in Combination mit dieser die gerade Abstumpfung der Basiskanten derselben. Je kleiner das Verhältniss $\frac{a}{b}$, desto stumpfer ist die dem Beobachter zugekehrte stumpfe Kante des Prismas.

Diese Form ist jedoch nicht das einzige verticale Prisma derselben Krystallreihe. Nehmen wir irgend eine abgeleitete Pyramide der makrodiagonalen Reihen $m\bar{P}n\,\{h\,k\,l\}$, so ist diese ein Glied einer neuen verticalen Reihe mit constantem n, deren Endglied für den Fall $m = \infty$ (oder $l = 0$) abermals ein Prisma ist, dessen vorderer Kantenwinkel um so stumpfer ist, je grösser n. Diese makrodiagonalen Prismen, deren Zeichen

$$\infty\bar{P}n = \{h\,k\,0\}_{\ (h>k)},$$

schärfen die stumpfen Kanten des primären Prismas zu.

Ausserdem existirt noch eine Reihe von Prismen, deren vordere Kante schärfer ist, als diejenige des primären, welche demnach die scharfen Kanten desselben zuschärfen. Dies sind die Grenzformen der Reihen brachydiagonaler Pyramiden für den Fall $m = \infty$. Ihre Bezeichnung ist

$$\infty\breve{P}n = \{h\,k\,0\}_{\ (k>h)}.$$

So sind also an den Krystallen eines Körpers theoretisch eine unendliche Zahl von verticalen Prismen möglich, von welchen aber gewöhnlich nur sehr wenige, durch die einfachsten Zahlenwerthe des Coëfficienten n von ∞P ableitbar, vorkommen.

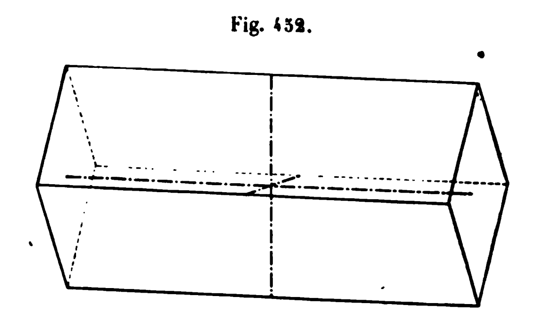
Betrachten wir die von irgend einer Pyramide, z. B. P, sich ableitende makrodiagonale Reihe, so muss deren Endglied diejenige Pyramide $\bar{P}n$ sein, deren $n = \infty$, welche wir also mit

$$\bar{P}\infty = \{101\}^{*)}$$

*) Es muss bemerkt werden, dass das Makrodoma $\bar{P}\infty$ nur dann das Symbol $\{101\}$ erhält, wenn dem Krystall die übliche Stellung, in welcher $b > a$ (vergl. S. 429 unten), gegeben worden ist. Diese Stellung ist aber nicht nothwendig; es kann vielmehr für die Vergleichung zweier chemisch verwandter Körper nöthig werden, einen Krystall so zu

bezeichnen müssen. Dies ist aber offenbar ebenso eine prismatische Form, wie die zuletzt betrachteten, deren vier Flächen jedoch nicht der Verticalaxe, sondern der Makrodiagonale parallel laufen, denn für deren speciellen Werth $n = \infty$ (d. i. $k = 0$) fallen immer je eine rechte und eine linke Pyramidenfläche in eine Ebene. Ein solches horizontales Prisma, in Fig. 452 in Combination mit einer Symmetrieebene dargestellt, wird seiner Dachform wegen **Doma** genannt, und das bezeichnete, welches der Makrodiagonale parallel ist und dessen Flächen die beiden anderen Axen im Verhältniss $a : c$ der primären Pyramide schneiden, das **primäre Makrodoma**. Dasselbe bildet die gerade Abstumpfung der stumpferen Polkanten der Pyramide $P = \{111\}$.

Fig. 452.



Da nun aber von jeder Pyramide mP oder $\frac{1}{m}P$ sich eine makrodiagonale Reihe ableitet, so wird das Endglied jeder solchen Reihe ein **Makrodoma**, aber ein solches mit anderem Verhältniss der Brachydiagonale zur Verticale, sein. Die spitzeren, deren obere Kante schärfer ist, als diejenige des primären, haben das Zeichen

$$m\bar{P}\infty = \{h0l\} \quad (h > l);$$

die stumpferen

$$\frac{1}{m}\bar{P}\infty = \{h0l\} \quad (h < l).$$

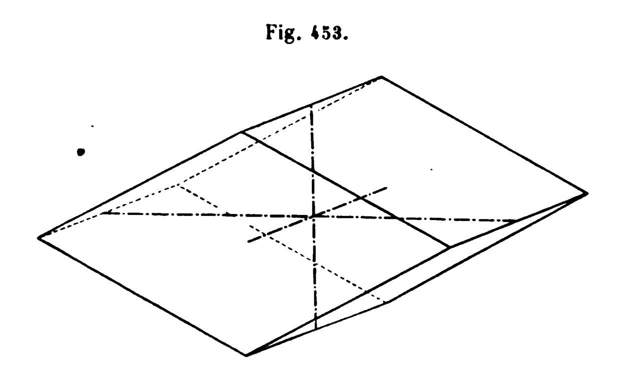
Jedes Makrodoma stumpft die stumpfen Polkanten derjenigen rhombischen Pyramiden ab, welche dasselbe Verhältniss $a : c$ haben, wie das Doma.

Ganz analoge Formen bilden die Endglieder der brachydiagonalen Ableitungsreihen der Pyramiden für den Fall $n = \infty$, wobei je eine vordere mit einer hinteren Fläche in eine Ebene fällt und so aus der achtflächigen

stellen, dass die Brachydiagonale quer läuft; alsdann ist in seinem Axenverhältniss $a > b$, und das Makrodoma geht dann der nach vorn laufenden Axe (welche **stets** mit a bezeichnet wird) parallel, sein Symbol wird also $\{011\}$. Die Indices beziehen sich demnach in der stets gleichbleibenden Reihenfolge, wie sie S. 195 festgestellt wurde, auf die bestimmte Stellung des Krystalls, welche durch seine Elemente unzweideutig charakterisirt ist; ob aber eine Fläche (hkl) einer **makro**- oder einer **brachydiagonalen** Form angehört, wie sie also nach **Naumann** bezeichnet werden muss, das ist von der beliebigen Wahl der Axen a und b abhängig, ja dies kann sich sogar durch eine Temperaturänderung bei gleicher Aufstellung ändern; denn wenn die Grundform eines Krystalls so gewählt wäre, dass a nur wenig kleiner als b, und wenn in ersterer Richtung die grösste Ausdehnung durch die Wärme stattfände, so gäbe es natürlich eine Temperatur, bei deren Ueberschreitung die Brachydiagonale des Krystalls sich in die Makrodiagonale verwandeln würde.

Pyramide ein vierflächiges horizontales Prisma wird, dessen zwei Paare paralleler Flächen der Brachydiagonale parallel laufen, Fig. 453. Diese Brachydomen sind wieder theils spitzere

Fig. 453.



$m\breve{P}\infty = \{0kl\}$ $(k > l)$, theils stumpfere $\frac{1}{m}\breve{P}\infty = \{0kl\}$ $(k < l)$. Zwischen beiden Classen steht das primäre Brachydoma

$$\breve{P}\infty = \{011\}$$

mitten inne; dieses stumpft die schärferen Polkanten der primären Pyramide ab, die anderen Brachydomen die schärferen Polkanten derjenigen Pyramiden, deren Axenverhältniss $b : c$ das gleiche ist, wie das des betreffenden Domas.

Die Makrodomen wie die Brachydomen bilden daher unter einander eine Reihe von den stumpfsten bis zu den spitzesten, d. s. diejenigen $m\bar{P}\infty$ und $m\breve{P}\infty$, bei denen m eine sehr grosse rationale Zahl ist. Das Endglied der einen wie der andern Reihe ist eine Form, für welche auch $m = \infty$ wird, somit je zwei Flächen des Domas in eine verticale Ebene zusammenfallen. So liefert die Reihe der Makrodomen als Endglied ein verticales paralleles Flächenpaar, das Makropinakoid genannt, welches der Makrodiagonale und der Verticalaxe parallel ist und das Zeichen

$$\infty\bar{P}\infty = (100)$$

hat; das Endglied der Reihe der Brachydomen dagegen ist ebenfalls ein Paar paralleler Flächen, das Brachypinakoid, welches zugleich der Brachydiagonale und der Verticalaxe parallel ist und daher mit

$$\infty\breve{P}\infty = (010)$$

bezeichnet wird.

Es leuchtet ein, dass die beiden letzten Formen nichts Anderes sind, als zwei von den drei Symmetrieebenen des rhombischen Systems. Wir haben also auch für die dritte eine Bezeichnung zu suchen. Da sie horizontal ist (den Axen a und b parallel), wird sie, wie in den beiden letzten Systemen, die Basis genannt und, als untere Grenze der Verticalreihe der Pyramiden aufgefasst, mit

$$oP = \{001\}$$

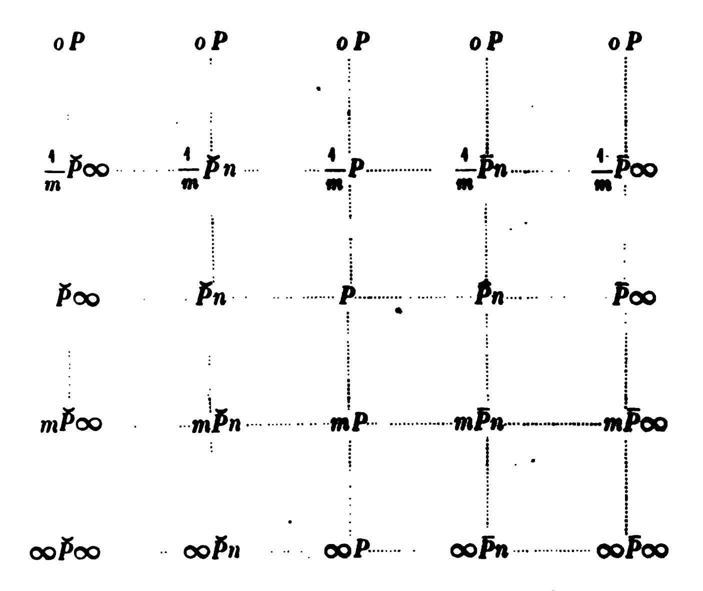
bezeichnet.

Die drei Pinakoide (Basis, Makro- und Brachypinakoid) stumpfen die Ecken jeder Pyramide gerade ab, oP die obere und untere, $\infty\breve{P}\infty$ die vordere und hintere, $\infty\bar{P}\infty$ die rechte und linke; die beiden letzteren bilden die geraden Abstumpfungen der Prismenkanten u. s. f.

Dieselben drei Flächenpaare {001}, {010}, {100} bilden für sich allein in Combination eine Gestalt, welche sich geometrisch nicht vom regulären Hexaëder unterscheidet, selbstverständlich aber physikalisch, in Bezug auf Spaltbarkeit, optische Eigenschaften u. s. f. Es leuchtet ein, dass das Axenverhältniss eines Krystalls nicht zu bestimmen ist, wenn an demselben nur jene drei Flächenpaare vorkommen; durch die Erforschung seiner physikalischen Eigenschaften ist alsdann zwar festzustellen, dass der Krystall rhombisch sei, dass seine Axenwinkel α, β, γ sämmtlich $= 90^0$ seien, aber sein Axenverhältniss $a : b : c$ bleibt unbekannt. Tritt zu diesen Flächen nun noch eine prismatische Form hinzu, so gestattet diese, wenigstens das Längenverhältniss zweier Axen zu bestimmen. Betrachten wir z. B. diese Form als primäres verticales Prisma und messen den Winkel desselben, so ist aus Fig. 451 ersichtlich, dass damit das Verhältniss $a : b$ bestimmt ist. Betrachtet man die prismatische Form als Makrodoma oder Brachydoma, so ist es natürlich das Verhältniss $a : c$, resp. $b : c$, welches auf die angegebene Art gefunden wird.

Sind nun aber zwei prismatische Formen vorhanden, welche zwei verschiedenen Symmetrieaxen parallel laufen, so ist eine vollständige Bestimmung der Krystallform, d. h. aller Elemente des Krystalls, möglich; sei z. B. die eine Form verticales Prisma, so ist $a : b$, sei die andere Brachydoma, so ist $c : b$, also $a : b : c$ bekannt. Daraus geht hervor, dass es nicht des Auftretens rhombischer Pyramiden bedarf, um das Parameterverhältniss vollständig zu bestimmen.

Die verschiedenen Ableitungsreihen einer Krystallreihe des rhombischen Systems lassen sich wieder in einem Schema vereinigen, welches den Zusammenhang derselben in übersichtlicher Weise darlegt:



Gehen wir von der in der Mitte stehenden primären Pyramide aus, so ist diese das mittelste Glied einer horizontalen Reihe, bestehend einerseits aus den Brachypyramiden bis zum Brachydoma, andererseits aus den makrodiagonalen Pyramiden bis zum Makrodoma. Da für alle Formen dieser letzteren Reihe $a : c$ constant, so bestimmt ein in einer stumpferen Polkante zusammenstossendes Flächenpaar von P eine Zone, in welcher die entsprechenden Flächenpaare aller Makropyramiden $\bar{P}n$ liegen; da ebenso für den vorderen Theil der Reihe das Verhältniss $b : c$ constant bleibt, so ist durch zwei in einer längeren (d. i. schärferen) Polkante zusammenstossende Flächen von P eine weitere Zone bestimmt, in welcher die entsprechenden Flächenpaare aller Pyramiden $\breve{P}n$ bis $\breve{P}\infty$ liegen.

Betrachten wir nunmehr eine flachere Pyramide $\frac{1}{m}P$, so leiten sich von dieser nach rechts und links Makro- und Brachypyramiden und je ein Doma ab, und für jede dieser beiden Reihen gilt das analoge Zonenverhältniss wie für die beiden vorigen Reihen. Ganz dasselbe ist der Fall auch für die beiden von einer spitzeren Pyramide mP sich herleitenden Reihen. Von der spitzesten Pyramide der Verticalreihe, dem Prisma ∞P, werden nun ebenso Makroprismen, deren stumpfestes das Makropinakoid, dessen vorderer Winkel 0° ist, und Brachyprismen abgeleitet, von denen das schärfste (der nach vorn gekehrte Winkel $= 180^{\circ}$) das Brachypinakoid. Alle Flächen sämmtlicher Formen der untersten Horizontalreihe gehören einer Zone an, denn sie sind ohne Ausnahme der Verticalaxe parallel.

Vergleicht man nun die Glieder irgend einer verticalen Reihe des obigen Schemas, sei es die der primären, sei es die einer makrodiagonalen oder einer brachydiagonalen Pyramide, mit einander, so sieht man leicht, dass durch zwei in einer Basiskante zusammenstossende Flächen **irgend** einer Pyramide eine Zone bestimmt ist, in welcher die entsprechenden Flächenpaare **aller** anderen der ganzen Verticalreihe liegen; denn für alle ist $a : b$ constant, also die Basiskanten von derselben Richtung. Diese Richtung besitzt ferner auch die Kante, in welcher eine Fläche des derselben Verticalreihe angehörigen Prismas von der Basis geschnitten wird, also liegen alle Pyramiden einer solchen Reihe mit parallelen Kanten zwischen jenem Prisma und der Basis, sie stumpfen die Combinationskanten der beiden letzteren ab. z. B. P, $2P$, $\frac{1}{2}P$ u. s. f. die Kanten $\infty P : oP$, ebenso $\breve{P}2$, $2\breve{P}2$, $\frac{1}{2}\breve{P}2$ die Kanten $\infty\breve{P}2 : oP$.

Endlich gilt dasselbe auch für die beiden äussersten Reihen, die (Makrodomen und die der Brachydomen. Da aber die ersteren nur F haben, welche der Makrodiagonale parallel, die letzteren nur sol , w der Brachydiagonale parallel sind, so bilden alle Flächen sämmtl r kro- domen eine einzige Zone, deren Axe die Makrodiagonale b ist, h. stumpfen sämmtlich die Combinationskanten der Basis mit dem Makropinakoid

ab; ebenso sind alle Flächen sämmtlicher Brachydomen tautozonal, und ihre Zonenaxe ist die Axe *a*, d. h. die Kante zwischen Basis und Brachypinakoid, welche sie abstumpfen.

Weiteres über die Zonenverhältnisse des rhombischen Systems zu erörtern, wird sich bei den Beispielen Gelegenheit darbieten.

Ueberblicken wir noch einmal die verschiedenen Arten von Formen, welche bei der Symmetrie nach drei auf einander senkrechten Flächen möglich sind, so sehen wir, dass es deren wie in den bisherigen Systemen sieben giebt; es sind folgende:

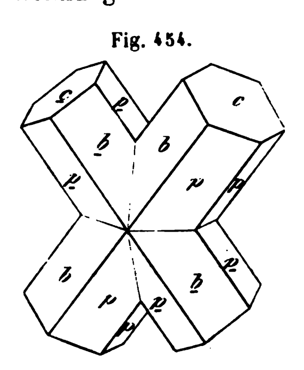
1) rhombische Pyramiden,
2) verticale Prismen,
3) Makrodomen,
4) Brachydomen,
5) das Makropinakoid,
6) das Brachypinakoid,
7) die Basis.

Dies sind aber nur scheinbar sieben verschiedene Arten von Formen, in Wirklichkeit deren nur drei. Erinnern wir uns nämlich, dass wir bei der Ableitung der Formen dieses Krystallsystems davon ausgingen, die drei Symmetrieebenen, das Makropinakoid, das Brachypinakoid und die Basis als Axenebenen*) zu Grunde zu legen, also deren drei Durchschnittsrichtungen, d. i. die drei Symmetrieaxen, als »Axen« zu wählen, — dass es aber a priori keinen Grund gab, eine bestimmte von diesen drei zur Verticalaxe zu machen. Wir können folglich jedes dieser drei Pinakoide zur Basis, jede beliebige zum Brachypinakoid u. s. f. wählen, diese drei Flächenpaare bilden demnach nur eine Art von Formen. Wenn wir von drei möglichen Aufstellungsarten eines rhombischen Krystalls eine bestimmte gewählt haben, so werden die Formen, deren Flächen der Verticalaxe parallel sind, Prismen, die der Axe *a* parallelen Brachydomen, die *b* parallelen Makrodomen; ändern wir dagegen die Stellung, so werden die bisherigen Makro- oder Brachydomen verticale Prismen. Diese drei Arten der prismatischen Formen sind also nicht principiell verschieden, und ihre Unterscheidung beruht nur auf der willkürlichen Stellung der Krystalle. So bleiben denn, wie oben bemerkt, nur drei, wirklich von einander verschiedene Arten von Formen im rhombischen Systeme übrig, nämlich 1) Pyramiden, bestehend aus je acht Flächen, welche für sich den Raum umschliessen; 2) Prismen, bestehend aus vier Flächen, welche nach einer Richtung offene Formen darstellen; 3) Pinakoide, d. i. Paare paralleler Flächen, zu welchen die übrigen symmetrisch sind.

*) Selbstverständlich hätten wir auch drei beliebige andere Flächen zu Axenebenen nehmen können.

Zwillingsbildung kann bei holoëdrisch-rhombischen Krystallen, da die Pinakoide als Symmetrieebenen ausgeschlossen sind, stattfinden nach einer Fläche einer prismatischen Form oder einer Pyramide. Im ersteren Falle, wobei es natürlich gleichgültig (weil von der willkürlich gewählten Stellung abhängig), ob die Zwillingsebene einem verticalen Prisma, einem Makrodoma oder einem Brachydoma angehört, haben die beiden mit einander verwachsenen Krystalle diejenige Symmetrieaxe, welcher die Zwillingsebene parallel geht, ebenfalls parallel; dieser einfachste Fall umfasst die grosse Mehrzahl aller rhombischer Zwillinge, deren wichtigste Beispiele in §. 95 Erwähnung finden werden. Ist eine Pyramidenfläche Zwillingsebene, so entsteht eine Verwachsung, in welcher die beiden Krystalle keine einzige Symmetrieaxe parallel haben. Da dies der complicirtere unter den beiden möglichen Fällen ist, finden wir denselben auch nur selten verwirklicht. Als Beispiel desselben möge der nebenstehend abgebildete Staurolith-Zwilling Fig. 454 dienen. Derselbe zeigt die Combination $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$; Zwillingsebene (in der Fig. senkrecht gestellt) ist eine Fläche der Pyramide $\{232\}$.

Fig. 454.



Hemimorphie kann bei rhombischen Krystallen eintreten nach irgend einer der drei Symmetrieaxen. Bei den in §. 95 aufgezählten hemimorphen Substanzen ist stets die Axe der Hemimorphie zur Verticalaxe gewählt worden, was natürlich ganz willkürlich ist. Durch die Hemimorphie zerfallen die rhombischen Pyramiden in zwei von einander unabhängige Hälften, bei der erwähnten Stellung eine obere und eine untere; durch Uebergang zu den Grenzformen findet man, dass alsdann Makrodomen, Brachydomen und basisches Flächenpaar ebenfalls in eine obere und eine untere Hälfte zerfallen, während die übrigen, d. h. die der Axe der Hemimorphie parallelen Formen unbeeinflusst bleiben. Da das zur letzterwähnten Axe senkrechte Pinakoid nicht mehr Symmetrieebene des hemimorphen Krystalls ist, so kann eine symmetrische Verwachsung zweier solcher Krystalle nach dieser Fläche stattfinden (siehe u. d. Beisp. Kieselzinkerz).

§. 93. **Projection und Berechnung der rhombischen Formen.** Die Formen des rhombischen Systems werden zur Gewinnung einer übersichtlichen Darstellung ihrer Zonenverhältnisse auf eine Symmetrieebene projicirt, und zwar ist es üblich, hierzu die Ebene (001) zu wählen. Alsdann fallen die Pole der Prismenflächen in den Grundkreis und können unmittelbar mittelst ihrer Winkel zu 100 und 010 eingetragen werden. In Fig. 455 ist dies in Betreff der beiden Prismen $\{110\}$ und $\{120\}$ geschehen, welche der in Fig. 482 dargestellten Combination des Topas entsprechen, und sind ausserdem die Projectionen der Flächen $\{100\}$ und $\{010\}$, welche

die Prismenwinkel halbiren, hinzugefügt. Die Durchmesser 110:001 u. s. w. enthalten die Pole aller Flächen, deren ersten beiden Indices gleich gross sind, d. h. aller Pyramiden der Verticalreihe. Es genügt also die Kenntniss des Winkels einer solchen Pyramidenfläche zur Basis, um nach bekannter Methode den Pol derselben zu finden. In dieser Weise sind in der Projection die drei Pyramiden {111}, {112} und {113} der Fig. 482 eingetragen. Das zu einer Pyramide zugehörige Makrodoma, welches ihre stumpfen Polkanten abstumpft, ergiebt sich aus dem Zonenkreise, welcher durch die beiden Pyramidenflächen und (010) als Halbirungsebene der Polkanten bestimmt ist; ebenso das zugehörige Brachydoma aus dem Zonenkreise durch die beiden, in der scharfen Polkante einander schneidenden Pyramidenflächen und (100). In dieser Weise sind die Pole der beiden zu {111} zugehörigen Domen {101} und {011} in der Projection eingetragen. Fig. 482 zeigt noch eine abgeleitete Pyramide x, welche in den Zonen [113, $1\bar{1}3$] und [112, 011] (d. i. = der Zone [101, 011]) liegt; hieraus ergiebt sich das Zeichen {123} und somit ihre Zugehörigkeit zu der Zone [001, 120]. Durch zwei der entsprechenden Zonenkreise kann also ihr Pol in der Projection gefunden werden, und in ähnlicher Weise derjenige jeder anderen abgeleiteten Pyramide eines rhombischen Krystalls.

Die Berechnung der Elemente eines rhombischen Krystalls erfordert die Messung zweier von einander unabhängiger Winkel. Der einfachste Fall ist der S. 437 erwähnte, dass die Winkel zweier prismatischer Formen gegeben sind. Werde die eine derselben zum verticalen Prisma {110} genommen, so ergiebt der Winkel (110):(100) = A, d. i. die Hälfte des stumpfen Prismenwinkels, direct das Parameterverhältniss $a:b$ oder, wenn $b = 1$ gesetzt wird, die Axenlänge a, denn eine einfache Betrachtung lehrt, dass

$$a = \operatorname{tang} A.$$

In derselben Weise führt der gemessene Winkel einer andern prismatischen Form zur Axenlänge c: ist $B = (011):(001) = \frac{1}{2}(011:0\bar{1}1)$ gegeben, so ist

$$c = \operatorname{tang} B;$$

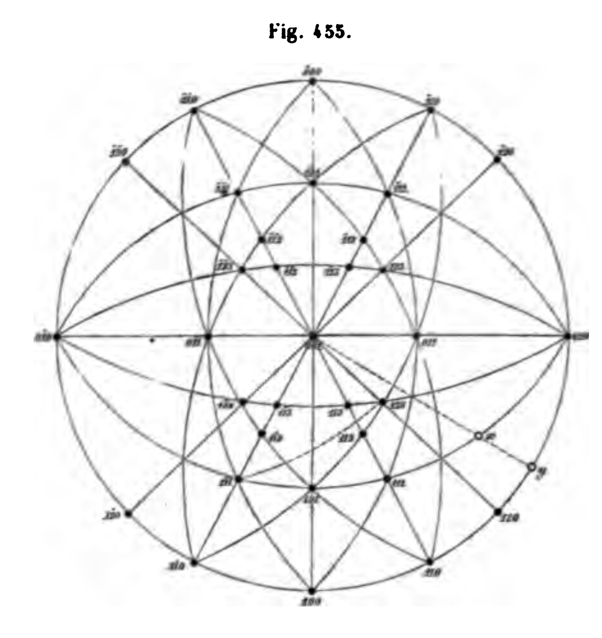
wurde dagegen der Winkel (101):($\bar{1}$01) gemessen, dessen Hälfte $C = (101):(001)$, so ist

$$c = a \cdot \operatorname{tang} C.$$

Die einfache Beziehung, welche somit zwischen den Axenlängen und den Bögen A, B und C besteht, wird auch benutzt, wenn es sich darum handelt, aus zwei gemessenen Winkeln einer rhombischen Pyramide deren Axenverhältniss zu berechnen. Man leitet nämlich aus diesen Winkeln zunächst jene Bögen, d. h. die Winkel derjenigen prismatischen Formen ab, welche die Kanten der Pyramide abstumpfen, und findet dann aus diesen das Parameterverhältniss. Seien z. B. von der Pyramide {111} die beiden Polkantenwinkel (111):($1\bar{1}1$) = $2P$ und (111):($\bar{1}11$) = $2Q$ gemessen, so ist $P = (111):(101)$ und $Q = (111):(011)$. Diese beiden Bögen sind, wie aus

Fig. 455 ersichtlich, Seiten zweier rechtwinkeliger sphärischer Dreiecke, welche die Hypotenuse 111 : 001 = R gemeinsam haben. Von den Bögen A, B, C, welche ihre vorige Bedeutung behalten sollen, ist A zugleich der Winkel zwischen den Zonenkreisen 001 : 100 und 001 : 111, daher aus jenen beiden rechtwinkeligen Dreiecken folgt:

Fig. 455.



$$\sin A = \frac{\sin P}{\sin R}$$

$$\sin (90 - A) = \cos A = \frac{\sin Q}{\sin R}$$

daraus:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin P}{\sin Q}.$$

Der Werth tang A ist (da A, wie oben angegeben, der halbe stumpfe Prismenwinkel) gleich der Axenlänge a. Zur Berechnung von c benutzt man nun den Bogen B = 001 : 011, welcher sich aus dem Dreieck 001 : 011 : 111, dessen Winkel an 001 (90° — A) nunmehr bekannt ist, unmittelbar ergiebt durch die Gleichung:

$$\sin B = \operatorname{tang} Q \cdot \operatorname{cotang} (90^0 - A) = \operatorname{tang} Q \cdot \operatorname{tang} A.$$

Ist dagegen einer der Polkantenwinkel, $2P$ oder $2Q$, und der Winkel der Basiskante gemessen, so ist durch letzteren der Bogen 111 : 110 (gleich der Hälfte desselben) und damit, durch Subtraction von 90°, auch R bestimmt. Aus P und R oder Q und R findet man aber nach einer der beiden obigen Gleichungen A und damit die Axenlänge a. Mit Hülfe von A oder dessen Complement ergiebt sich dann in einem der oben erwähnten rechtwinkeligen Dreiecke der Bogen B oder C und damit das zweite Parameterverhältniss.

Mit dem soeben auseinandergesetzten Verfahren ist zugleich die Methode gegeben, durch welche man aus dem Parameterverhältniss einer rhombischen Pyramide deren Winkel berechnet; man benutzt nämlich dieselben rechtwinkeligen Dreiecke, indem man zuerst aus dem Axenverhältniss die Bögen A, B, C bestimmt und aus diesen die Seiten P, Q und R berechnet.

Handelt es sich um die Bestimmung des Zeichens einer abgeleiteten Pyramide, welche nicht durch zwei Zonen gegeben ist, so können hierzu entweder die Messungen zweier ihrer Kantenwinkel benutzt und daraus, wie bei der primären Pyramide, das Parameterverhältniss berechnet werden,

welches durch Division in dasjenige der Grundform die Indices liefert — oder es genügt eine Winkelmessung zur Herleitung des Zeichens, wenn die Pyramide nämlich in einer bekannten Zone liegt. Sei z. B. die Kante (111): (010) eines Krystalls durch eine derartige Form abgestumpft, so liegt ein Pol x derselben auf dem Zonenkreise 111:010; ist nun der Winkel x:(010) oder x:(111) gemessen worden, so kann man, da die Bögen 101:111 und 101:001 durch das Zeichen der bekannten Pyramide, in diesem Falle {111}, gegeben sind, in dem rechtwinkeligen Dreiecke 101, 001, x aus den beiden Seiten 101:001 und 101:x den der letzteren gegenüberliegenden Winkel an 001 berechnen; dieser ist gleich dem Bogen 100:y, aus welchem direct das Zeichen des zur Pyramide x zugehörigen Prisma y folgt. Mit letzterem hat x die beiden ersten Indices gemein, mit der Pyramide, in deren Polkantenzone sie liegt, im vorliegenden Beispiel {111}, das Verhältniss des ersten und dritten; somit sind ihre Indices sämmtlich bekannt.

Schliesslich sei noch als Beispiel einer Berechnung des Winkels zweier beliebiger Flächen diejenige des Bogens $1\bar{1}1$:123 gegeben: um diesen zu finden, berechnet man aus den Parametern der beiden Pyramiden {111} und {123} die Bögen $1\bar{1}1$:001 (=111:001) und 123:001; diese bilden mit dem gesuchten Bogen ein schiefwinkeliges sphärisches Dreieck, in welchem der an 001 anliegende Winkel ebenfalls bekannt ist, da derselbe gleich dem Winkel $1\bar{1}0$:120, welcher sich sehr einfach aus der Axenlänge a ergiebt. Aus den drei bekannten Stücken des erwähnten Dreiecks folgt der gesuchte Bogen nach bekannter Formel der sphärischen Trigonometrie. Allgemein besteht also das Verfahren zur Berechnung eines beliebigen Bogens darin, dass man den Abstand seiner beiden Endpole von dem einer Symmetrieebene und den Winkel zwischen diesen beiden Bögen aus dem Zeichen der beiden Polen entsprechenden Flächen berechnet. Die diesem Winkel gegenüberliegende Seite des so gebildeten sphärischen Dreiecks ist der gesuchte Bogen.

§. 94. **Die physikalischen Eigenschaften der rhombischen Krystalle.** Ueber die Elasticität solcher liegen directe Messungen nicht vor; das Eingangs §. 89 Bemerkte ist daher nur nach Analogie geschlossen aus den Cohäsionsverhältnissen der rhombischen Krystalle. Ueber letztere geben Aufschluss die Bestimmungen der Härte nach verschiedenen Richtungen; wenn der a. a. O. angegebene Zusammenhang mit der Symmetrie, wie er aus dem physikalisch-krystallographischen Grundgesetze folgt, richtig ist, so muss die Härtecurve auf allen drei Pinakoiden symmetrisch sein zu je zwei auf einander senkrechten Geraden, und diese müssen je zwei Symmetrieaxen parallel sein. Dies ist in der That der Fall, wie die Bestimmungen am Schwerspath u. a. gezeigt haben (s. Exner, Härte an Krystallen, S. 60). Am einfachsten wird jener Zusammenhang jedoch bewiesen durch die Verhältnisse der Spaltbarkeit der rhombischen Krystalle, welche genau ihrer Symmetrie entsprechen. Der einfachste Fall hierbei ist offenbar der, dass in der Richtung einer Symmetrieaxe ein Minimum der Cohäsion vorhanden

ist, also Spaltbarkeit nach demjenigen Pinakoid, welches dazu normal steht; in Wirklichkeit ist auch die Theilbarkeit nach einem der drei Pinakoide eine sehr häufig auftretende (s. unter den Beispielen: Quecksilberbromid, Antimon- und Arsensulfid, arsenige Säure, Topas, Citronensäure u. a.). Natürlich kann auch parallel einer zweiten Symmetrieaxe ein Minimum der Cohäsion stattfinden, dieses ist aber nicht gleichwerthig mit dem ersten, folglich existirt alsdann Spaltbarkeit nach zwei Pinakoiden, aber nicht von gleichem Grade der Vollkommenheit (Beisp.: Bleioxyd, Schwerspath). Endlich können alle drei Symmetrieaxen dreien Minimis der Cohäsion entsprechen; in diesem Falle ist der Krystall spaltbar nach {001}, {100} und {010}, aber selbstverständlich nicht gleich vollkommen; ein derartiger Körper ist das wegen der Seltenheit seiner Krystalle nicht unter die Beispiele aufgenommene wasserfreie Kalksulfat (nat. Anhydrit), dessen krystallinische Aggregate charakterisirt sind durch die fast gleich vollkommene Spaltbarkeit nach den drei Pinakoiden, wodurch es einem regulären, hexaëdrisch spaltbaren Körper ähnelt.

Sind die Minima der Cohäsion nicht den Symmetrieaxen parallel, in welchem Falle zu der betreffenden Richtung keine andere symmetrische existirt, so ist der nächst einfache der, dass sie wenigstens einer Symmetrieebene parallel gehen, mit den Axen aber schiefe Winkel einschliessen; jedes solche Minimum erfordert aber ein zweites in der dazu symmetrischen Richtung, welche in derselben Axenebene liegt; die beiden zu diesen Richtungen normalen Ebenen müssen demnach einen gleichen Grad der Spaltbarkeit besitzen, der Krystall spaltet nach einem Prisma, je nach der demselben gegebenen Stellung ein verticales, oder ein Makro-, oder ein Brachydoma (Beispiele: Quecksilberchlorid, ameisensaures Barium), doch ist eine derartige Spaltbarkeit ziemlich selten. Weit zahlreicher sind diejenigen Körper, bei denen das Hauptminimum der Cohäsion einer Symmetrieaxe parallel, ausserdem aber noch secundäre Minima vorhanden sind in einer Symmetrieebene, welche also spaltbar sind nach einem Pinakoid und weniger vollkommen nach einer prismatischen Form (Beispiele: Schwefel, überchlorsaures und übermangansaures Kalium, schwefelsaures Baryum, Strontium und Blei u. a.). Bei fast allen diesen Beispielen ist das Spaltungsprisma senkrecht zu dem Spaltungspinakoid, d. h. die Cohäsion nimmt, von ihrem Minimum in der Richtung einer Axe ausgehend, zu, nach verschiedenen Seiten verschieden, alsdann wieder ab, und erreicht zwei neue Minima in der senkrecht zu jener Axe stehenden Symmetrieebene.

Da die Mehrzahl der Substanzen den einfachsten Fall realisiren, in welchem nämlich die geringste Cohäsion einer Symmetrieaxe parallel ist, eine weit kleinere Zahl denjenigen, in welchem neben jenem Minimum noch solche einer Axenebene parallele merklich hervortreten, endlich kaum einige existiren, wo nur die letztere Art von Minimis vorhanden ist, so hat der letzte mögliche Fall, dass die Cohäsionsminima auch nicht den Axenebenen parallel sind, äusserst geringe Wahrscheinlichkeit. Ein solches mit keiner

Symmetrieebene zusammenfallendes Minimum würde noch ein gleiches nach den drei anderen dazu symmetrischen Richtungen (den Normalen zu den übrigen Pyramidenflächen) erfordern. In der That wird eine einigermassen vollkommene Theilbarkeit nach einer rhombischen Pyramide nur sehr selten (s. Baryt) beobachtet.

Wie aus den Herleitungen des §. 89 hervorgeht, ist die optische Axenebene entweder die Basis, oder das Makropinakoid, oder endlich das Brachypinakoid, die erste Mittellinie eine der drei Axen. Daraus folgt, dass man zur Aufsuchung der Ebene der optischen Axen nur nöthig hat, Platten nach den drei Pinakoiden (wie eine solche sehr häufig schon durch die natürliche Ausbildung der Krystalle gegeben ist, ebenso oft durch Spaltbarkeit erhalten werden kann) im convergenten Licht zu untersuchen; eine derselben muss*) beide optischen Axen, symmetrisch im Gesichtsfeld des Polarisationsinstrumentes, zeigen, und zwar so, dass ihre Verbindungslinie einer Symmetrieaxe parallel geht. Nur wenn die Brechbarkeit der Substanz eine geringe und der spitze und stumpfe Axenwinkel wenig verschieden sind, kann man sowohl durch die Platte, welche normal zur ersten, als durch die, welche normal zur zweiten Mittellinie ist, beide Axen erblicken, vorausgesetzt, dass das Gesichtsfeld des Instrumentes sehr gross ist. Diejenige von beiden Platten, bei welcher der scheinbare Axenwinkel der kleinere ist, oder, was das Gewöhnlichere ist, diejenige, durch welche allein die Axen sichtbar sind, steht senkrecht zur ersten Mittellinie. Bestimmt man nun mit dieser, nach der in §. 27 angegebenen Methode, durch Einfügung eines Viertelundulationsglimmerblattes das Zeichen der Doppelbrechung, so kann man nunmehr angeben, welche der drei Symmetrieaxen des Krystalls die Axe der grössten, welche die der kleinsten, welche die der mittleren optischen Elasticität ist. Sind so grosse und durchsichtige Krystalle zur Verfügung, dass man sich bei der optischen Untersuchung nicht mit der Bestimmung des Axenwinkels (wozu jene Pinakoidplatte dient) begnügt, sondern auch die Brechungsexponenten bestimmen will, so können hierzu sehr oft natürliche Prismen dienen. Ist z. B. ein verticales Prisma, dessen scharfe Kanten einen Winkel von 40—60° haben, vorherrschend an den Krystallen, so können zwei seiner in einer solchen Kante zusammenstossenden Flächen unmittelbar als Prisma zur Bestimmung zweier Brechungsexponenten dienen (s. S. 100), denn ein solches erfüllt die a. a. O. gestellten Bedingungen vollständig. Ist nun noch ein Makro- oder Brachydoma vorhanden, welches in ähnlicher Weise benutzt werden kann, so ist man im Stande, ohne Herstellung künstlicher Prismen, alle drei Hauptbrechungsexponenten, d. h. die Gesammtheit der optischen Constanten des Krystalls, festzustellen. Statt der

*) Die einzige Ausnahme bildet der Fall, dass der Axenwinkel fast 90° und der mittlere Brechungsexponent so gross ist, dass die den Axen parallelen Strahlen aus einer solchen Platte nicht mehr in Luft austreten können; alsdann muss die Aufsuchung der Axen in Oel vorgenommen werden.

beiden Flächen eines Prismas kann, wie S. 101 gezeigt worden ist, auch eine derselben und eine Pinakoidfläche zur Bestimmung zweier Brechungsexponenten dienen; diese Methode ist vortheilhaft, wenn z. B. eine Fläche eines verticalen Prismas sehr gross ausgedehnt ist, an der Rückseite des Krystalls dagegen das Makropinakoid vorherrscht, und wenn je zwei Prismenflächen einen zu stumpfen Winkel einschliessen, um die Strahlen im Minimum der Ablenkung hindurchzulassen.

Wenn an einem Krystall nur ein Pinakoid entwickelt, diesem aber die Axenebene parallel ist, so dass man durch dasselbe keine Axen erblickt, oder wenn gar keines auftritt, dagegen ein Prisma vorhanden ist, dessen Flächen normal zur optischen Axenebene stehen, so wird, wenn die Richtung einer optischen Axe nicht einen allzugrossen Winkel mit der Normalen zu einer Prismenfläche*) einschliesst, durch jedes der beiden prismatischen Flächenpaare eine optische Axe sichtbar sein, aber im Gesichtsfeld des Polarisationsinstrumentes verschoben, von der Mitte aus in einer Richtung, normal zur Prismenkante. In diesem Falle kann man somit auch feststellen, welcher der drei Hauptschnitte die optischen Axen enthält, und durch Messung des Winkels der sichtbaren Axe zur Normale der Prismenfläche den Winkel derselben herleiten.

Durch ein Paar paralleler Pyramidenflächen blickend, wird man nur ausnahmsweise eine optische Axe, natürlich nie in der Mitte des Gesichtsfeldes, beobachten, da meist der Winkel jener gegen die Axenebene so gross ist, dass die einer Axe parallelen Strahlen sie in bedeutender Schiefe treffen, also dieselbe unter einem fast rechten Brechungswinkel verlassen oder gar nicht austreten können.

In allen derartigen Fällen, wo durch directe Beobachtung mittelst natürlicher Krystallflächen die Lage der optischen Axenebene nicht erkannt werden kann, hat man die Pinakoide künstlich durch Schleifen (oder durch Spaltbarkeit, wenn eine solche vorhanden ist) herzustellen, und alsdann ebenso, wie oben angegeben, zu verfahren.

Besonders wichtig für die krystallographische Praxis ist das Verhalten der rhombischen Krystalle im parallelen polarisirten Licht. Wenn eine doppeltbrechende Krystallplatte zwischen gekreuzten Nicols um 360° in ihrer Ebene gedreht wird, so erscheint sie bekanntlich (s. S. 105) in vier Stellungen dunkel, dazwischen hell (oder farbig, wenn sie sehr dünn ist); in jenen sind ihre Schwingungsrichtungen, d. h. die der beiden Strahlen, welche aus einem normal in sie eindringenden Lichtstrahl entstehen, denen der beiden Nicols parallel. So vermag man annähernd (genauer nach einer in der III. Abth. beschriebenen Methode) die Lage der Schwingungsrichtungen für eine bestimmte Krystallfläche gegen die sie begrenzenden Kanten

---

*) Die beiden Normalen der Prismenflächen und die beiden optischen Axen liegen alsdann in einer Ebene.

zu bestimmen. Um einen Krystall als einen zum rhombischen System gehörigen zu erkennen, ist es oft nöthig, zu untersuchen, ob die Schwingungsrichtungen des Lichtes beim Durchgang durch diejenigen Flächen, nach welchen er vorherrschend ausgedehnt ist, so gelegen sind, wie es die rhombische Symmetrie erfordert. Es ist daher diese Lage für die drei verschiedenen Arten von Flächen des rhombischen Systems hier festzustellen. Sie ergiebt sich aus der Gestalt, welche der Querschnitt der optischen Elasticitätsfläche (S. 91) parallel der betreffenden Krystallfläche besitzt, und welche im Allgemeinen die einer Ellipse ist. Nur zwei Ebenen giebt es, deren Durchschnitte mit jenem dreiaxigen Ellipsoid die Form von Kreisen haben, dies sind diejenigen beiden prismatischen Ebenen, deren Normalen die optischen Axen sind. Da die natürlichen Prismenflächen gegen diese stets mehr oder weniger geneigt sind, so kommen sie praktisch kaum in Betracht; sollte aber einmal zufällig ein Prisma auftreten, dessen Flächen genau senkrecht zu den beiden optischen Axen wären, so müsste ein derartiger Krystall, durch eines dieser Flächenpaare betrachtet, beim Drehen keinen Wechsel zwischen Hell und Dunkel zeigen, da die vertical hindurchgehenden Lichtstrahlen keine Doppelbrechung erleiden. Abgesehen von diesem Falle ist also der Durchschnitt der Elasticitätsfläche durch die betreffende Krystallfläche stets eine Ellipse, und deren grosse und kleine Axe sind die Schwingungsrichtungen der normal zu jener Krystallfläche hindurchgehenden Strahlen. Kennt man also die Gestalt der Elasticitätsfläche, d. h. das Verhältniss ihrer drei Axen, so kann man für jede beliebige Ebene des Krystalls, also z. B. für eine Pyramidenfläche, die Schwingungsrichtungen berechnen. Für gewisse Krystallflächen jedoch, nämlich für die prismatischen und die Pinakoide, ist die Orientirung der Schwingungsrichtungen gegen die geometrische Form bei allen rhombischen Krystallen die gleiche; diese können also allein in Betracht kommen, wenn es auf die praktische Anwendung zur Erkennung des rhombischen Charakters bei einem Krystall ankommt.

Den einfachsten Fall stellen die drei Flächenpaare {001}, {010} und {100} dar; denn wenn senkrecht zu einem solchen paralleles Licht in den Krystall eindringt, so bewegt sich dieses parallel einer Elasticitätsaxe; es geht folglich aus den Darlegungen des §. 22 unmittelbar hervor, dass die beiden hierbei entstehenden Strahlen parallel den beiden anderen Elasticitätsaxen schwingen. Bringt man also eine basische Krystallplatte in das Instrument, so sind deren Schwingungsrichtungen die Krystallaxen a und b, d. h. die Platte erscheint jedesmal dunkel, wenn die Brachydiagonale und die Makrodiagonale der Schwingungsrichtung je eines der beiden gekreuzten Nicols genau parallel sind; ebenso sind die Schwingungsrichtungen einer Platte, parallel {100}, die Krystallaxen b und c; endlich die einer Platte, parallel {010}, die Brachydiagonale und die Verticale. Darum nennt man diese drei Richtungen, d. h. die drei Elasticitätsaxen, auch die Hauptschwingungsrichtungen, welcher Name bereits in §. 24 und 25 Verwendung fand.

Nicht viel verwickelter liegt die Sache bei den prismatischen Formen. Lassen wir das parallele polarisirte Licht senkrecht durch ein Paar paralleler Flächen fallen, welche entweder einem rhombischen Prisma, oder einem Makrodoma, oder einem Brachydoma angehören, so ist klar, dass die Lichtstrahlen sich im Krystall einem optischen Hauptschnitt parallel bewegen. Dieser Fall ist aber bereits in §. 23 vollständig behandelt worden. Jeder Strahl zerfällt hierbei in einen, welcher in dem betreffenden Hauptschnitt schwingt, und einen dazu senkrecht, also parallel einer Elasticitätsaxe, vibrirenden. Diese letztere ist aber die Axe, der die Flächen des Prismas, also auch die Kanten desselben, parallel sind; die Schwingungsrichtungen einer derartigen Platte sind also die Parallele und die Normale zur Längsaxe des Prismas. Betrachtet man also irgend einen prismatisch ausgebildeten rhombischen Krystall im parallelen polarisirten Licht, so dass man dasselbe durch zwei gegenüberliegende Prismen- (oder Domen-) Flächen fallen lässt, so erscheint der Krystall jedesmal dann dunkel, wenn seine Prismenkante der Schwingungsrichtung des einen der beiden (gekreuzten) Nicols genau parallel ist.

Die Schwingungsrichtungen auf einer Pyramidenfläche findet man nach der S. 105 gegebenen Regel, aus welcher hervorgeht, dass dieselben den Kanten der Pyramide nicht parallel gehen; auf zwei benachbarten Flächen derselben sind sie symmetrisch orientirt, daher auch ihre entsprechenden Winkel mit den Kanten die gleichen, nur umgekehrt gelegen sind.

Was die Absorption des Lichtes betrifft, so beweisen die Verhältnisse des Pleochroïsmus rhombischer Krystalle, dass für jede einzelne Farbe die Richtungen der grössten, kleinsten und mittleren Absorption mit den drei Symmetrieaxen zusammenfallen, für die verschiedenen Farben die Werthe derselben ungleiche sind, und zwar bei den sehr stark pleochroïtischen Krystallen derart, dass die grösste Absorption gewisser Farben mit der kleinsten anderer zusammenfällt. Es zeigt sich nämlich, dass unter den, einem Hauptschnitt parallelen Richtungen stets die beiden Symmetrieaxen den grössten Unterschied der Körperfarbe des Krystalls zeigen, und dass die letztere, wenn man von einer Symmetrieebene ausgeht, nach beiden Seiten sich gleichartig ändert mit der Richtung.

Gehen wir von den optischen Eigenschaften zu den thermischen über, so wäre zunächst, da über die Doppelbrechung der Wärme nur wenig Versuche vorliegen, als praktisch wichtig die Wärmeleitung zu erwähnen. Entsprechend dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie ist eine der drei Symmetrieaxen die Richtung der grössten, eine andere die der mittleren, die dritte die der kleinsten Leitungsfähigkeit. Daraus folgt, dass der Sénarmont'sche Versuch (s. S. 159) folgende Resultate liefern muss: auf jedem Pinakoid ist die isotherme Curve eine Ellipse, deren grosse Axe der einen, deren kleine der anderen in der Plattenebene liegenden Krystallaxe parallel ist; aus der Gestalt der Ellipsen auf allen drei Pinakoiden ist abzuleiten, welche Axe die der grössten, mittleren und kleinsten Leitungs-

fähigkeit der Wärme ist; auf allen prismatischen Flächen ist die Schmelzfigur des Wachses ebenfalls eine Ellipse, deren eine Axe stets der Kante des Prismas parallel ist.

Von der Ausdehnung durch die Wärme ist bereits §. 89 angeführt, dass die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten ebenfalls mit den drei Symmetrieaxen zusammenfallen. Betrachten wir also die Combination der drei rhombischen Pinakoide, so haben wir vollkommen den im I. Abschnitt S. 168 betrachteten Fall, von welchem wir sahen, dass die drei Flächenpaare einander bei allen Temperaturen unter rechten Winkeln schneiden müssen.

Der a. a. O. weiterhin in Fig. 109 dargestellte Fall betrifft offenbar eine Fläche einer prismatischen Gestalt; denken wir uns die dortige Betrachtung durchgeführt auch noch für das andere Flächenpaar, welches zu dem ersten symmetrisch zugehört, so ergiebt dieselbe folgendes Resultat: eine prismatische Form des rhombischen Systems bleibt bei allen Temperaturen der einen Symmetrieaxe parallel, der Winkel ihrer Kanten wird aber beim Erwärmen spitzer oder stumpfer, je nach dem Verhältniss der Ausdehnung der beiden anderen Krystallaxen; dabei bleiben die gegenüberliegenden Flächen aber parallel, und die benachbarten ändern ihre Richtung um gleich viel, folglich bleibt das Prisma bei allen Temperaturen symmetrisch zu den drei Pinakoiden. Aus der Winkeländerung eines Prismas (oder Domas) beim Erwärmen können wir direct den relativen Ausdehnungscoëfficienten je zweier Krystallaxen berechnen. Den letzten Fall endlich, den der Ausdehnung einer rhombischen Pyramide, enthält die Betrachtung S. 170, s. Fig. 110. Denken wir uns dort zu der Fläche *MNO* die sieben anderen, durch die Symmetrie erforderten Flächen, so ergeben sich durch deren ganz gleiche Betrachtung mit Leichtigkeit folgende Schlüsse: Jede Pyramidenfläche ändert ihre Neigung gegen die drei Pinakoide, folglich ihr Axenverhältniss (aus der Vergleichung dieses für zwei verschiedene Temperaturen folgen die relativen Werthe der drei Ausdehnungscoëfficienten), d. h. es ändert sich sowohl der Winkel der Basiskanten beim Erwärmen, als derjenige der schärferen und derjenige der stumpferen Polkanten, aber diese drei in verschiedenem Grade; die Aenderung der Neigung aller acht Pyramidenflächen gegen eine und dieselbe Pinakoidfläche ist genau die gleiche, weil alle die gleichen Parameter auf den thermischen Axen haben; folglich sind auch bei veränderter Temperatur alle vier Basiskanten an Winkelgrösse einander gleich, ebenso die vier schärferen und die vier stumpferen Polkanten, d. h. die Pyramide bleibt stets symmetrisch zu den drei Pinakoiden. Da somit die drei Symmetrieebenen der rhombischen Krystalle bei allen Temperaturen rechte Winkel mit einander bilden, und die prismatischen Formen, wie die Pyramiden, stets symmetrisch zu jenen bleiben, so ist damit der in §. 89 bereits ausgesprochene Satz bewiesen, dass die Symmetrie eines rhombischen Krystalls unabhängig von der Temperatur sei.

Von dieser Symmetrie hängt aber nach dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie diejenige der physikalischen Eigenschaften ab, also können die optischen Eigenschaften z. B. durch keine Temperaturänderung so sich verändern, dass sie nicht mehr der allgemeinen Symmetrie rhombischer Krystalle entsprächen. Wenn also auch der Winkel der optischen Axen sich beim Erwärmen ändert, so muss diese Bewegung doch bei beiden die gleiche sein, da die Mittellinie stets dieselbe Richtung, parallel einer krystallographischen Axe, beibehält. Nimmt der Axenwinkel bei steigender Temperatur ab, so wird er bei einer bestimmten für eine Farbe Null sein, und bei noch höherer werden die beiden Axen sich wieder von einander entfernen, nunmehr aber in der senkrecht dazu stehenden Ebene gelegen sein. Dass die neue optische Axenebene ebenfalls eine Symmetrieebene des Krystalls sein muss, geht daraus hervor, dass die Hauptschwingungsrichtungen dieselben geblieben sind, wenn auch durch die ungleiche Aenderung der Dichte nach den drei Axen die der mittleren Lichtgeschwindigkeit entsprechende nunmehr die der kleinsten geworden ist, u. s. f. Wie die optischen, so bewahren auch alle übrigen physikalischen Eigenschaften der rhombischen Krystalle ihre Symmetrie bei allen Temperaturen.

§. 95. Beispiele holoëdrisch-rhombisch krystallisirender Substanzen:

Schwefel = *S*. $a:b:c = 0{,}8130 : 1 : 1{,}9039$ Schrauf. Entweder nur die spitze Pyramide {111} Fig. 447, oder die Combination Fig. 456: $o = \{111\}$, $o' = \{113\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$; von diesen Formen liegt o' in der Zone oc, kann sich also nur durch die Verticalaxe von o unterscheiden; q ist gerade Abstumpfung der längeren Polkanten von {111}, also primäres Brachydoma. — Spaltbarkeit {001} und {110} unvollkommen. Optische Axenebene ist {010}, Axe c ist erste Mittellinie, Doppelbrechung positiv; die Brechungsexponenten für Natriumlicht:

Fig. 456.

$$\alpha = 1{,}958,\quad \beta = 2{,}038,\quad \gamma = 2{,}240,$$

der wahre Axenwinkel

$$2V = 69^0\ 40';$$

für Roth ist $\beta = 2{,}029$, für Blau 2,082 (Cornu, Annales de chimie et phys. (4). XI, 28, 3f.; Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 93.). Dielektricitätsconstanten s. Boltzmann, Sitz.-Ber. d. Akad. Wien 67. Bd.

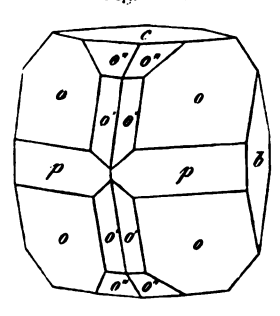


Fig. 457.

Jod = *J*. $a:b:c = 0{,}6644 : 1 : 1{,}3653$ Marignac. Combination Fig. 457; $o = \{111\}$, $o' = \{313\}$ (die kürzeren Polkanten von o zuschärfend, also dasselbe $a:c$), $c = \{001\}$, $o'' = \{316\}$ (in der Zone $o'c$, also mit demselben $a:b$, wie ersteres), $p = \{110\}$ (gerade Abstumpfung der Basiskanten von o), $b = \{010\}$.

Arsensulfid (nat. Auripigment) = As^2S^3. $a:b:c = 0{,}9044 : 1 : 1{,}0113$ **Mohs**. Natürl. selten deutliche Krystalle: {110}, {120}, {101}, {010}. Spaltbarkeit {010} vollkommen.

Antimonsulfid (natürl. Antimonglanz) = Sb^2S^3. $a:b:c = 0{,}9844 : 1 : 1{,}0110$ **Krenner**. Einfachste Combination {110} (fast rechtwinkelig), am Ende {111} (dem regulären Oktaëder sehr ähnlich). Spaltbarkeit {010} vollkommen.

Eisenbisulfid*) (nat. Markasit) = FeS^2. $a:b:c = 0{,}7519 : 1 : 1{,}1845$ **Miller**. Combination Fig. 458: $p = \{110\}$, $q' = \{013\}$, $q = \{011\}$ (Zone $qq'q'q$).

Fig. 458.





Kupfersulfür (nat. Kupferglanz) = Cu^2S. $a:b:c = 0{,}5797 : 1 : 0{,}9743$ **Miller**. Combination Fig. 459: $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{113\}$, $q = \{021\}$, $q' = \{023\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$. Diese Combination stellt einen ausgezeichneten Fall hexagonaler Pseudosymmetrie dar, da das Prisma p wenig von 60° verschieden ist, also p und b einander fast unter gleichen Winkeln schneiden; wie diese einem hexagonalen Prisma, so gleichen o und q einer hexagonalen Pyramide**), und o' und q' einer solchen von kleinerer Hauptaxe. Zwillinge und Drillinge nach {110}, wie beim schwefelsauren Kalium (s. S. 457).

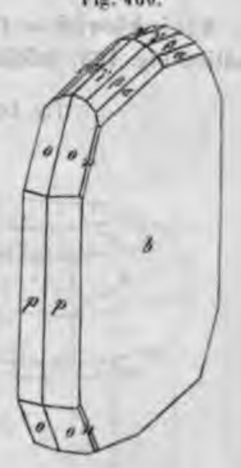
Fig. 459.



Bleioxyd = PbO. $a:b:c = 0{,}666 : 1 : 0{,}971$ **Nordenskiöld**. Dünne Tafeln nach {100} ausgedehnt, von schmalen Flächen von {012}, {111} und mehrerer abgeleiteter Pyramiden begrenzt. Spaltbarkeit {100}. Optische Axenebene {100}.

Arsenige Säure***) = As^2O^3. $a:b:c = 0{,}3758 : 1 : 0{,}3500$ **Groth**. Combination Fig. 460: tafelförmig nach $b = \{010\}$, an den Seiten $p = \{110\}$, ferner $o = \{111\}$, schmal $n = \{171\}$ (Zone $o\,n\,b$), und am Ende drei abgeleitete Pyramiden: $\gamma = \{1.12.12\}$, $\beta = \{1.12.24\}$, $\alpha = \{1.12.48\}$ (Zone $b\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\gamma\,\beta\,\alpha\,b$). Spaltbarkeit {010} vollkommen. Optische Axenebene dieselbe Fläche.

Fig. 460.



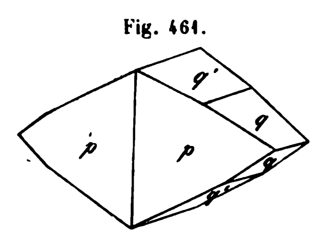
*) Dimorph, vergl. S. 289.

**) Wäre der Winkel des rhombischen Prismas genau = 60°, so wäre die Neigung einer Pyramide gegen die Basis genau dieselbe, wie die eines Brachydomas von doppelt so grosser Verticalaxe, so dass die Combination beider geometrisch absolut zusammenfiele mit einer hexagonalen Pyramide.

***) Dimorph, vergl. S. 272.

Antimonige Säure (Antimonoxyd, nat. Weissspiessglanzerz) = Sb^2O^3. $a:b:c = 0{,}3914:1:0{,}3367$ Laspeyres. Combination Fig. 461: $p = \{110\}$, $q = \{021\}$, $q' = \{032\}$; oder tafelförmig nach $\{010\}$, ganz ähnlich Fig. 460, doch kommen Pyramiden mit noch längerer Brachydiagonale, z. B. $\{1.20.15\}$, vor. Spaltbarkeit $\{010\}$ vollkommen. Optische Axenebene für Roth $\{001\}$, für den brechbareren Theil des Spectrums $\{010\}$; Axenwinkel sehr klein.

Fig. 461.



Titansäureanhydrit (nat. Brookit) = TiO^2. $a:b:c = 0{,}9444:1:0{,}8416$ von Kokscharow. Combination Fig. 462: $a = \{100\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \{111\}$, $e = \{122\}$ (Zone *oeeo*; da *e* häufiger und meist grösser als *o*, so wird es von manchen Autoren zur primären Pyramide genommen; alsdann wird *a*, nach welchem die Krystalle meist tafelartig, Brachypinakoid), $x = \{102\}$ (Zone *ee*), $y = \{104\}$, $z = \{112\}$ (bestimmt durch die beiden Zonen *poz* und *ezxze*), $t = \{021\}$. Spaltbarkeit $\{010\}$. Optische Axenebene für Roth und Gelb $\{001\}$, $2E = 55^0$ roth, 30^0 gelb; für Grün $\{010\}$, $2E = 33^0$ von Zepharovich; erste Mittellinie ist für alle Farben die Axe *a*; man erblickt daher im convergenten weissen Licht die in Fig. 5 der Tafel abgebildete Interferenzerscheinung (vergl. S. 112). Doppelbrechung +.

Fig. 462.

Bleichlorid = $PbCl^2$. $a:b:c = 0{,}5943:1:1{,}1898$ Schabus. Combination Fig. 463, tafelartig nach $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{112\}$ (Zone *oc*),

Fig. 463.

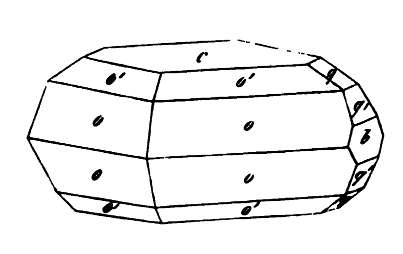
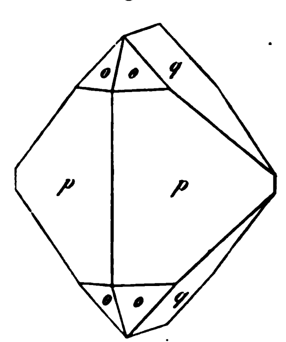


Fig. 464.



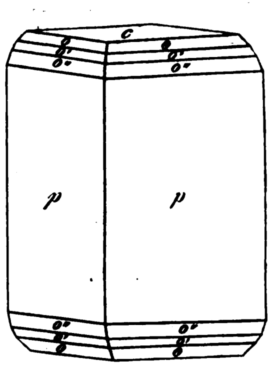
$q = \{012\}$ (Zone *o'o'*), $q' = \{021\}$ (Zone *qq*), $b = \{010\}$. Oft auch nur *c*, *o'* und *b*.

Quecksilberchlorid = $HgCl^2$. $a:b:c = 0{,}7254:1:1{,}0688$ Mitscherlich. Kurz prismatische Combination Fig. 464: $p = \{110\}$, $o = \{111\}$,

$q = \{011\}$. Spaltbarkeit q vollkommen. Optische Axenebene $\{100\}$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung negativ.

Quecksilberjodid $= HgJ^2$ (dimorph, s. S. 407). $a:b:c = 0{,}6494:1:?$ Mitscherlich. Die Krystalle sind nur gebildet von $\{110\}$ und $\{001\}$, daher die Verticalaxe unbekannt.


Fig. 465.

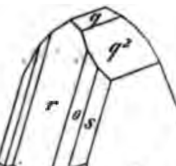


Quecksilberbromid $= HgBr^2$. $a:b:c = 0{,}6796:1:?$ Handl. Combination wie bei dem vorigen. Spaltbarkeit $\{001\}$. Optische Axenebene $\{001\}$.

Jodbromquecksilber $= HgJBr$. $a:b:c = 0{,}6443:1:0{,}9194$ Groth. Kurze Prismen Fig. 465: $p = \{110\}$, $c = \{001\}$; in der Zone beider $o = \{111\}$, $o' = \{221\}$, $o'' = \{441\}$. Spaltbar $\{001\}$. Optische Axenebene $\{001\}$, b ist erste Mittellinie.

Chlorbaryum $= BaCl^2 + 2H^2O$. $a:b:c = 0{,}6068:1:0{,}6338$ von Kobell. Combination (Fig. 466): $b = \{010\}$, $q^2 = \{021\}$, $q = \{011\}$, $r = \{101\}$, $o = \{111\}$, $s = \{131\}$, $p = \{110\}$, $p^2 = \{120\}$. Spaltbarkeit nach $\{010\}$, $\{100\}$, $\{001\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung positiv. Brechungsexponenten:

Fig. 466.



	α	β	γ
für Roth:	1,628	1,641	1,657
» Gelb:	1,635	1,646	1,660

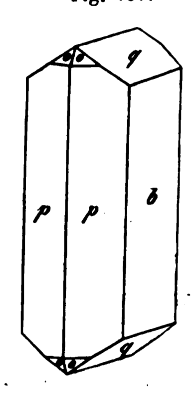
Axenwinkel $2V$

	berechnet:	beobachtet:
für Roth:	84°50′	84°23′—85°18′
» Gelb:	83 46	84 4 —85 0

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 49).

Salpetersaures Kalium (Kalisalpeter) $= KNO^3$. $a:b:c = 0{,}5910:1:0{,}7011$ Miller. Combination Fig. 467: $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $q = \{011\}$, $o = \{111\}$ (oft ohne die letzte Form, zuweilen auch nach q langprismatisch). Spaltbarkeit nach p und b unvollkommen. Optische Axenebene $\{100\}$, c ist erste Mittellinie. Doppelbrechung —; die Hauptbrechungsindices für die Fraunhofer'schen Linien:

Fig. 467.



	α	β	γ
für B:	1,3328	1,4988	1,4994
„ D:	1,3346	1,5056	1,5064
„ E:	1,3365	1,5124	1,5135
„ H:	1,3436	1,5385	1,5404

Daraus berechnen sich die wahren Axenwinkel:

für *B*:	2 *V* =	6° 11′
„ *D*:		7 12
„ *E*:		8 5
„ *H*:		10 22

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 41, 788.) Den scheinbaren Winkel in Luft fand Des Cloizeaux (Nouv. Recherches, 42):

für Roth 2*E* = 7° 55′	bei 17° C.	
6 42	„ 71,5 „	
6 6	„ 121 „	

so dass also derselbe durch die Temperatur eine nicht unbeträchtliche Aenderung erleidet.

Fig. 468.

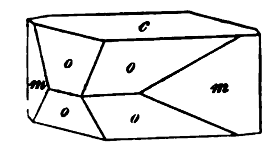


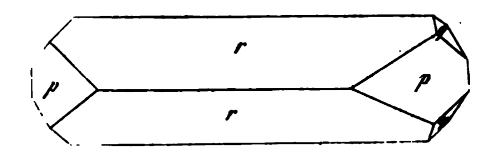
Fig. 469.

Salpetersaures Silber = $AgNO^3$. $a:b:c = 0{,}5302:1:0{,}7263$ Brooke. Combination Fig. 468: $c = \{001\}$, $o = \{122\}$, $m = \{110\}$ (die Pyramide *o* ist nicht zur primären gewählt worden, um die Aehnlichkeit des Axenverhältnisses mit dem des Salpeters zu zeigen). Optische Axenebene {100}, *c* erste Mittellinie. Scheinbare Winkel der Axen:

$2E = 126°\,37'$ roth
$133\ 50$ blau.

Ueberchlorsaures Kalium = $KClO^4$. $a:b:c = 0{,}7819:1:0{,}6396$ Groth. Combination Fig. 469: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $r = \{101\}$. Spaltbarkeit nach *c* und *p* vollkommen. Optische Axenebene {001}, *b* erste Mittellinie, Doppelbrechung +.

Fig. 470.

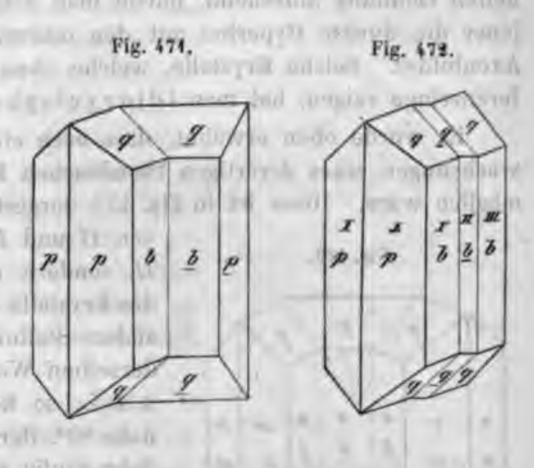


Uebermangansaures Kalium = $KMnO^4$. $a:b:c = 0{,}7974:1:0{,}6492$ Groth. Combination Fig. 470, prismatisch durch Vorherrschen von $r = \{101\}$, ferner $p = \{110\}$, $q' = \{021\}$. Spaltbarkeit {001} und {110} vollkommen.

Kohlensaurer Kalk*) (Aragonit) = $CaCO^3$. $a:b:c = 0{,}6224:1:0{,}7206$ von Kokscharow. Combination = Fig. 467: $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $q = \{010\}$. Häufig Zwillinge nach einer Fläche von {110} und mit derselben Fläche verwachsen (Fig. 471); sehr oft ist der einspringende Winkel der Flächen *b*

*) Dimorph. s. S. 359.

durch Vorherrschen von p verdeckt, und es erscheint nur derjenige von q. Nicht selten ist an den zweiten Krystall noch ein dritter nach demselben Gesetz angewachsen; hierbei sind aber zwei Fälle möglich; entweder ist die Zwillingsfläche des zweiten und dritten Krystalls parallel derjenigen des ersten und zweiten, oder sie ist dem anderen Prismenflächenpaar parallel.

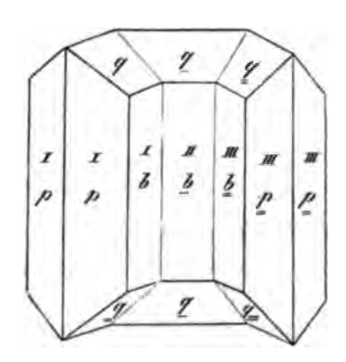


Betrachten wir zunächst den ersten, in Fig. 472 wiedergegebenen Fall, so ist klar, dass Krystall *I* und *III* parallel sind, die Verwachsung also erscheint als ein Krystall, in welchem eine in Zwillingsstellung befindliche Lamelle eingewachsen ist. Nicht selten finden sich Aragonitkrystalle mit einer Anzahl solcher Zwillingslamellen, welche eine Streifung der Flächen q und b verursachen. Ein Aragonitkrystall mit einer derartigen Lamelle bietet in optischer Beziehung besonderes Interesse dar: Schleift man nämlich an denselben oben und unten die Basis an und blickt etwas schräg durch diese Flächen nach einem hellen Licht (oder einer hellen Oeffnung in einem dunkeln Schirm), so sieht man die Interferenzcurven des einen der beiden Axenbilder ohne Polarisationsapparat. Die Ursache dieser Erscheinung ist die eingelagerte Zwillingslamelle. Da nämlich (s. folg. S.) die erste Mittellinie parallel der Verticalaxe, und der Axenwinkel des Aragonit klein ist, so bilden die einer optischen Axe der Zwillingslamelle entsprechenden Strahlen einen sehr spitzen Winkel mit deren, einer verticalen Prismenfläche parallelen, Begrenzungsfläche: fällt nun in einer geeigneten Richtung Licht auf die eine Endfläche des Krystalls auf, so wird dies doppelt gebrochen; die beiden Strahlenbündel treffen unter verschiedenen, aber bei beiden sehr spitzen Winkeln auf die eingelagerte Lamelle, werden also hier sehr verschieden abgelenkt, resp. der eine total reflectirt. In der Richtung der optischen Axe des Krystalls *II* tritt also nur ein linear polarisirtes Strahlenbündel in denselben ein, der Krystall *I* wirkt gerade so, wie der polarisirende Nicol des Polarisationsinstrumentes. Die in jener Richtung durch *II* hindurchgegangenen Strahlen werden in *III* wieder doppelt gebrochen, weil in diesem ihre Richtung wegen der Zwillingsstellung nicht die einer optischen Axe ist, sie verlassen die obere Endfläche also in verschiedenen Richtungen; bringt man nun das Auge in diejenige, welche den Strahlen entspricht, deren Vibrationsrichtung senkrecht zu derjenigen der aus *I* in *II* eintretenden ist, so erhält man die auf eine Schwingungsebene zurückgeführten Componenten der in *III* eintretenden Strahlen, d. h. *III*

wirkt ebenso wie der mit dem Polarisator gekreuzte Analysator eines Polarisationsinstrumentes, und man erblickt, in dieser Richtung nach einer hellen Oeffnung hinsehend, indem man den Krystall dem Auge nähert, auf jener die dunkle Hyperbel mit den innersten Farbenringen des optischen Axenbildes. Solche Krystalle, welche ohne Polarisationsapparat die Interferenzringe zeigen, hat man idiocyclophanische genannt.

Es wurde oben erwähnt, dass noch eine zweite Art von Drillingsverwachsungen eines derartigen rhombischen Krystalls nach demselben Gesetz möglich wäre. Diese ist in Fig. 473 dargestellt; hier ist die Zwillingsfläche von *II* und *III* nicht parallel der von *I* und *II*, sondern es ist die zweite Prismenfläche des Krystalls *II*; in Folge dessen hat *III* eine andere Stellung als *I*. Würde sich an *III* in derselben Weise ein vierter Krystall anlegen u. s. f., so könnten, da der Prismenwinkel nahe 60°, deren sechs einen Ring schliessen. Sehr häufig sind Krystalle von der relativen Stellung *I*, *II*, *III* auch ganz durcheinandergewachsen; sind sie nach *b* tafelförmig, so erscheint der Drilling, von oben gesehen, wie ein sechsstrahliger Stern, dessen Strahlen nahe 60° mit einander bilden. Die Krystallgruppe zeigt sodann eine hexagonale Pseudosymmetrie, eine bei zahlreichen Substanzen, deren Prismenwinkel nahe gleich 60°, wiederkehrende Erscheinung (s. u. a. schwefels. Kalium Fig. 476).

Fig. 473.



Spaltbarkeit {010} unvollkommen. Optische Axenebene {100}, *c* erste Mittellinie. Doppelbrechung —; Brechungsexponenten:

	α	β	γ
für die Linie *C*:	1,5282	1,6778	1,6820
D:	1,5301	1,6816	1,6859
E:	1,5326	1,6863	1,6908.

Daraus folgen die Axenwinkel:

	$2V =$	$2E =$
für *C*:	17° 48′	30° 5′
D:	17 50	30 14
E:	18 3	30 41

(Rudberg, Poggendorff's Ann. 17. B.). Durch directe Messung fand Kirchhoff (Poggendorff's Ann. 108, 567):

	$2V =$	$2E =$
für *C*:	18° 7′	30° 40′
D:	18 11	30 52
E:	18 17	31 7.

Der scheinbare Axenwinkel ändert sich nur wenig mit der Temperatur (bei einer Erhöhung der letzteren um 160° verringert er sich um circa 40′).

Kohlensaurer Baryt (nat. Witherit) $= BaCO^3$. $a : b : c =$ 0,5949 : 1 : 0,7413 Miller. Combination Fig. 474: $o = \{111\}$, $q' = \{021\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$: die ersteren sehr nahe eine hexagonale Pyramide, die beiden letzteren ein dergl. Prisma bildend. Spaltbarkeit $\{110\}$ unvollkommen. Die Mehrzahl der Krystalle sind Durchwachsungsdrillinge nach $\{110\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Axenwinkel $2E = 26^0\ 30'$ für Roth und Blau, d. h. die Dispersion der optischen Axen ist so gering, dass sie durch die Messung nicht zu bestimmen; die Farbensäume der Hyperbeln deuten an, dass $\varrho > v$. $\alpha = 1,740$ (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 106).

Fig. 474.

Kohlensaures Blei (natürl. Cerussit) $= PbCO^3$. $a : b : c = 0,6102 : 1 : 0,7232$ von Kokscharow. Combination = Fig. 474, doch $b = \{010\}$ gewöhnlich grösser ausgebildet, die Krystalle darnach oft tafelartig. Meist Zwillinge oder Drillinge nach dem Gesetze des Aragonit. Spaltbarkeit $\{110\}$ unvollkommen. Optische Axenebene $\{010\}$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Brechungsexponenten und daraus berechnete Axenwinkel:

Linie B:	$\alpha = 1,7915$	$\beta = 2,0595$	$\gamma = 2,0613$	$2V = 8^0\ 22'$	$2E = 17\ 17^0$
- D	1,8037	2,0763	2,0780	8 14	17 8'
- E	1,8164	2,0919	2,0934	7 35	15 55

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wiener Akademie 42, 120). Durch die Wärme nicht unbeträchtliche Aenderung:

$$2E = 18^0\ 22' \text{ bei } 12^0 \text{ C.}$$
$$= 22^0\ 2' \text{ - } 95,5^0 \text{ C.}$$

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 48).

Schwefelsaures Kalium $= K^2SO^4$. $a : b : c =$ 0,5727 : 1 : 0,7464 Mitscherlich. Combination entweder genau = Fig. 474, oder nach der Brachydiagonale prismatisch Fig. 475: $o = \{111\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{021\}$.

Fig. 475.

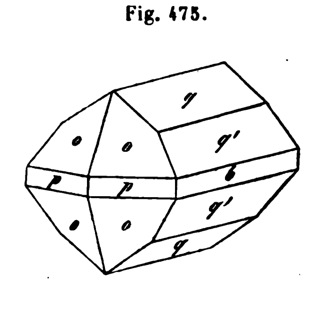
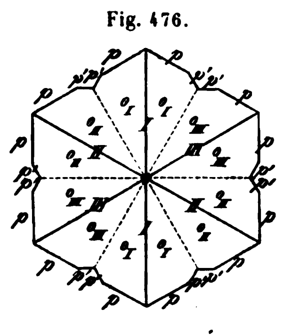


Fig. 476.



Häufig Drillingskrystalle, welche auf den ersten Anblick wie einfache hexagonale Pyramiden aussehen. In Fig. 476 ist ein solcher, vertical von oben gesehen, abgebildet. Denkt man sich den Krystall I allein vorhanden

und zu beiden Seiten vervollständigt, so bildet er eine rhombische Pyramide $o_I\, o_I\, o_I\, o_I$, deren Basiskanten durch die vier, in der Figur nur als Linien erscheinenden Flächen *p* des Prismas {110} gerade abgestumpft sind; endlich erscheinen noch die vier Flächen des ebenfalls verticalen Prismas $p' = \{130\}$. Da der Winkel (110):(1$\bar{1}$0) sehr nahe 60°, so ist derjenige von {130} an derselben Seite nicht viel verschieden von 120°, und die Fläche (1$\bar{3}$0) des letzteren nahezu normal zu (110) (wäre der Winkel von {110} genau = 60°, so wäre der von {130} genau = 120°, und die erwähnten beiden Flächen würden sich unter 90° schneiden). Nach der Fläche (1$\bar{3}$0) symmetrisch zu *I* ist nun der Krystall *II*, und nach dem anderen Flächenpaar desselben Prismas der Krystall *III* mit *I* verbunden. Da nach Obigem die Zwillingsebene nahe senkrecht zu einer *p*-Fläche eines jeden Krystalls steht, so fallen je zwei derartig gelegene Flächen nahezu in eine Ebene (sie bilden einen einspringenden Winkel von 1° 16′), und da die Neigung von *o* zu *p* natürlich in allen drei Krystallen dieselbe ist, so müssen auch die aneinanderstossenden pyramidalen Flächentheile von *I* und *II* und von *I* und *III* fast zusammenfallen. Verschwinden nun die einspringenden Winkel der *p*′-Flächen durch vorherrschende Ausbildung der Pyramide *o*, so entsteht eine Form, welche nur bei genauer Betrachtung von einer hexagonalen Pyramide mit abgestumpften Basiskanten unterschieden werden kann, indem nämlich jede ihrer Flächen nicht aus einer Ebene besteht, sondern nach vertical herablaufenden Grenzen geknickt erscheint. Um dies zu erkennen, braucht man nur das Licht einer einigermaassen entfernten Flamme von den Pyramiden- oder Prismenflächen reflectiren zu lassen, wobei immer die Hälfte derselben beleuchtet erscheint.

Spaltbarkeit {010} und {001} unvollkommen. Optische Axenebene {100}, *c* Mittellinie. Doppelbrechung +; $\varrho < v$. Brechungsexponenten:

	α	β	γ
C	1,4911	1,4928	1,4959
D	1,4932	1,4946	1,4980
E	1,4976	1,4992	1,5029

(Topsøe, Ann. d. chim. et phys. [5] I, 1874). Direct beobachtet:

$2E = 110° 15'$ roth
— 24 grün
— 26 blau.

Durch Temperaturerhöhung um 140° C. wird $2E$ etwa 10° grösser (Des Cloizeaux, Nouv. Rech.). Durch noch weiteres Erhitzen wird die Makrodiagonale erste Mittellinie; bei 380° vereinigen sich die Axen in der Makrodiagonale und der Krystall wird negativ einaxig; alsdann gehen die Axen in {001} auseinander, und wenn dies so weit erfolgt ist, dass *a* erste Mittellinie geworden ist, so wird der Krystall wieder positiv doppeltbrechend, bis er bei 490° in einen einaxigen übergeht, dessen optische Axe parallel *a*; jenseits dieser Temperatur wird er wieder zweiaxig mit {010} als Axenebene. Zwischen 600° und 650° C. findet eine plötzliche Umwandlung des

pseudohexagonalen Krystalls in einen wirklich hexagonalen statt, d. h. in die Form einer zweiten dimorphen Modification (Mallard, s. Zeitschr. f. Kryst. 9, 402).

Schwefelsaures Ammonium = $(NH^4)^2SO^4$. $a : b : c$ = 0,5643 : 1 : 0,7310 Mitscherlich. Combination = vorigem (Fig. 475). Spaltbarkeit a {100} vollkommen. Optische Axenebene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +; $2E$ = 87° 44′ roth, 88° 47′ blau. Der Winkel steigt merklich mit der Temperatur (Des Cloizeaux, Nouv. Rech.).

Chromsaures Kalium = K^2CrO^4. $a : b : c$ = 0,5695 : 1 : 0,7297 Mitscherlich. Combination = K^2SO^4 Fig. 475. Optische Axenebene {100}, b erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Der mittlere Brechungsexponent β = 1,713 für die Linie C, 1,725 für D, 1,770 für F.

$2E$ = 100° 32′ roth
= 95 40 grün
= 93 10 blau.

Fig. 477.

Schwefelsaures Baryum (nat. Schwerspath) = $BaSO^4$. $a : b : c$ = 0,7622 : 1 : 1,2416 Helmhacker. Combination Fig. 477: c = {001}, p = {110}, r' = {102}, q = {011}, o = {111}. Spaltbarkeit {001} vollkommen, {110} ziemlich vollkommen, {010} und {111} deutlich. Optische Axenebene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Brechungsexponenten:

	α	β	γ	$2E$
C	1,6336	1,6348	1,6452	62° 34′
D	1,6363	1,6375	1,6480	63 12
E	1,6397	1,6409	1,6517	64 10

Heusser, Poggendorff's Ann. 87, 454). Ueber die Aenderung der Brechungsexponenten durch die Wärme liegen ausführliche Untersuchungen von Arzruni (Zeitschr. f. Kryst. 1, 165) vor, welcher fand:

	Temp. Cels.	α	β	γ
C	20°	1,63351	1,63457	1,64531
	50	1,63326	1,63407	1,64462
	75	1,63281	1,63378	1,64426
	100	1,63246	1,63338	1,64360
	150	1,63177	1,63280	1,64264
	200	1,63082	1,63209	1,64157
D	20°	1,63609	1,63712	1,64795
	50	1,63575	1,63678	1,64726
	75	1,63546	1,63640	1,64683
	100	1,63512	1,63612	1,64643
	150	1,63431	1,63545	1,64533
	200	1,63344	1,63474	1,64426

	Temp. Cels.	α	β	γ
F	20°	1,64254	1,64357	1,65469
	50	1,64215	1,64312	1,65388
	75	1,64174	1,64288	1,65356
	100	1,64148	1,64252	1,65295
	150	1,64071	1,64188	1,65200
	200	1,63994	1,64124	1,65096

Für den wahren Axenwinkel ergab sich bei denselben Temperaturen für die *D*-Linie (*Na*-Licht):

20° C.	$2V =$	37° 28′
50 -		38 43
75 -		39 28
100 -		40 15
150 -		42 6
200 -		44 18

Des Cloizeaux (Nouv. Rech.) fand für die Aenderung des scheinbaren Axenwinkels:

$2E =$ 63° 5′	roth,	bei 12°	C.
70 10	-	- 121	-
74 42	-	- 196	-

Schwefelsaures Strontium (nat. Cölestin) $= SrSO^4$. $a : b : c = 0,7696 : 1 : 1,2551$ Arzruni. Combination und Spaltbarkeit = vorigem. Axenebene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +.

Brechungsexponenten bei 20° C.:

	α	β	γ
C	1,61954	1,62120	1,62843
D	1,62198	1,62367	1,63092
F	1,62790	1,62960	1.63697

bei 200° C.:

	α	β	γ
C	1,61719	1,61925	1,62547
D	1,61958	1,62168	1,62790
F	1,62542	1,62768	1.63399

Bei 16° C. ist der scheinbare Axenwinkel:

für *Li*-Licht: $2E =$	87° 2′
- *Na* -	88 38
- *Tl* -	89 55½

Derselbe zeigt in höherer Temperatur eine beträchtliche Zunahme (Arzruni, Zeitschr. f. Kryst. 1,177).

Schwefelsaures Blei (natürl. Anglesit) $= PbSO^4$. $a : b : c = 0,7852 : 1 : 1,2894$ von Lang. Combination wie $BaSO^4$. Spaltbarkeit ebenso, aber weniger vollkommen. Optische Axenebene {010}, a erste Mittellinie.

Brechungsexponenten bei 20° C. nach Arzruni (Zeitschr. f. Kryst. 1*2):

	α	β	γ
C	1,86981	1,87502	1,88630
D	1,87709	1,88226	1,89365
F	1,89549	1,90097	1,91263

i 200° C.:

C	1,86527	1,87088	1,88008
D	1,87260	1,87833	1,88754
F	1,89124	1,89716	1,90658

r wahre Axenwinkel $2V$ ist bei gewöhnlicher Temperatur 75° 24′ (D-Linie), i 200° = 89° 17′; der scheinbare $2E$ kann nicht direct gemessen werden, wegen des hohen Brechungsexponenten die Axen aus einer zur ersten ttellinie senkrechten Platte nicht mehr austreten.

Phosphorsaures Ammonium-Magnesium (natürl. Struvit) $NH^4 Mg PO^4 + 6 H^2O$. $a : b : c = 0{,}5667 : 1 : 0{,}9121$ Sadebeck. Hemirph. Combination Fig. 478: $b = \{010\}$; oberen (antilogen) Pol: $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $= \{041\}$; am unteren (analogen) Pol: $c = \{001\}$, $= \{103\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$ und $\{010\}$ ziemh vollkommen. Optische Axenebene $\{001\}$, erste Mittellinie, Doppelbrechung +.

Fig. 478.

$2E = 46°\ 32'$ roth,
47 30 gelb,
48 46 violett,

$\beta = 1{,}497$ roth, 1,502 gelb.

arke Aenderung durch die Wärme:

Für Roth: $2E = 41°\ 49'$ bei 7° C.
46 4 - 47 -
51 50 - 95 -

es Cloizeaux, Nouv. Rech. 95). Polare Pyroëlektricität s. Hausmann, ötting. Nachr. 1846, 121.

Nitroprussidnatrium $= Na^{12} Fe^6 N^5 O^5 Cy^{30} + H^2O$. $a : b : c = 0{,}7650 : 1 : 0{,}4115$ Rammelsberg. mbination Fig. 479: $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$ ein Paar paralleler Flächen jeder der drei Formen gt mit einem solchen der beiden anderen in einer ne, und dies gilt für jede Combination der drei zugerigen prismatischen Formen). Optische Axenebene 00}, c erste Mittellinie. Doppelbrechung +. $2E = 61°$ th.

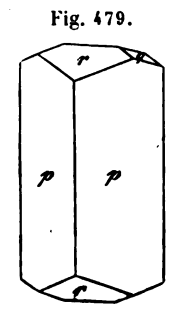
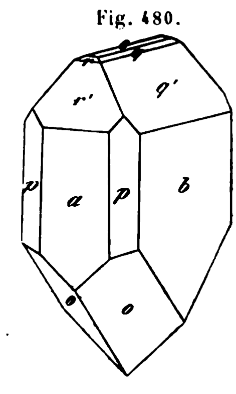


Fig. 479.

Kieselzinkerz = $Zn^2(OH)^2SiO^3$. $a:b:c$ = 0,7835 : 1 : 0,4778 Schrauf. Hemimorph; Combination Fig. 480: b = {010}, a = {100}, p = {110}; am oberen (analogen) Pol: r' = {301}, r = {101}, q' = {031}, q = {011}, c = {001}; am unteren (antilogen) Pol nur o = {121}. [Mit letzterem Ende sind zuweilen zwei Krystalle symmetrisch nach {001} verwachsen. Spaltbarkeit {110} vollkommen. Optische Axenebene {100}, c erste Mittellinie. Doppelbrechung +; optische Constanten:

Fig. 480.

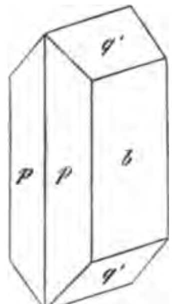


	α	β	γ	$2V$	$2E$
für Roth:	1,6107	1,6142	1,6324	47° 30′	81° 7′
- Gelb:	1,6136	1,6170	1,6360	46 9	78 39
- Grün:	1,6176	1,6202	1,6392	44 42	76 3

(von Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 37, 379).

Olivin = $(Mg, Fe)^2SiO^4$. $a:b:c$ = 0,4660 : 1 : 0,5867 von Kokscharow. Combination Fig. 481: p = {110}, b = {010}, q' = {021}. Spaltbarkeit {010} deutlich. Optische Axenebene {001}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Dispersion der Axen gering, $\varrho < v$.

Fig. 481.

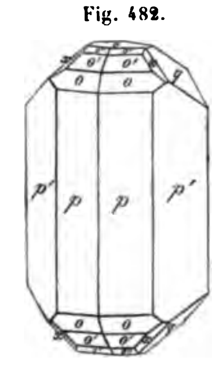


Gelb: α=1,661, β = 1,678, γ=1,697, $2V$=87° 46′ (Des Cloizeaux).

Normales Eisensilicat (Frischschlacke) = Fe^2SiO^4. $a:b:c$ = 0,4623 : 1 : 0,5813 Mitscherlich. Combination = vorigem.

Nat. Topas = $Al[Al(F^2,O)]SiO^4$. $a:b:c$ = 0,5285 : 1 : 0,9539 von Kokscharow. Combination Fig. 482: p = {110}, p' = {120}, o = {111}, o' = {112}, o'' = {113}, c = {001}, q = {011}, x = {123} (in den Zonen qo' und $p'c$, vergl. die Projection Fig. 455). Spaltbarkeit {001} vollkommen. Axenebene {010}, c erste Mittellinie (daher durch eine Spaltungsplatte beide Axen sichtbar); Doppelbrechung +. Brechungsexponenten:

Fig. 482.



	α	β	γ	$2V$	$2E$
C	1,6094	1,6114	1,6188	56° 19′	99° 0′
D	1,6116	1,6138	1,6211	56 39	100 40
E	1,6145	1,6167	1,6241	58 58	100 54

In verschiedenen Varietäten ist der scheinbare Axenwinkel grösser (bis 125°). Mit der Temperatur ändert er sich merklich (z. B. $2E$ = 119° bei 20° C., = 123° bei 230° C.). Ausdehnung durch die Wärme nach Fizeau:

parallel der Axe a = 0,00000484
- - b = 0,00000414
- - c = 0,00000592

Chlorkohlenstoff $= C^2Cl^6$. $a : b : c = 0,5543 : 1 : 1,7556$ Brook
ombination tafelförmig nach {001}, ferner $p = \{110\}$, $q = \{011\}$, $a = \{100\}$
$= \{010\}$.

Ameisensaures Baryum $= BaC^2H^2O^4$. $a : b : c = 0,7650 : 1 : 0,8638$
eusser. Combination Fig. 483: $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$,
$= \{021\}$. Spaltbarkeit {011} deutlich. Optische Axen-
ene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +.
echungsexponenten:

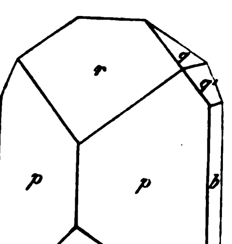


Fig. 483.

	α	β	γ	$2V$
B	1,5679	1,5918	1,6310	77° 40′
D	1,5729	1,5970	1,6361	77 53
E	1,5777	1,6024	1,6412	78 53

chrauf, Sitz.-Ber. d. Wien. Ak. 42, 125). Des
loizeaux (Nouv. Rech. 59) berechnete den schein-
aren Winkel in Luft aus demjenigen in Oel und dem
echungsexponenten des letzteren (vergl. S. 118 An-
erk.) und fand:

$2E = 161^0 18'$ roth
164 — gelb
176 34 blau

Ameisensaures Calcium $= CaC^2H^2O^4$. $a : b :$
$= 0,7599 : 1 : 0,9342$ Heusser. Combination Fig. 484.
$= \{100\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{112\}$, $p' = \{120\}$, $b = \{010\}$.
ische Axenebene {010}, a Mittellinie. Doppelbre-
ng +.

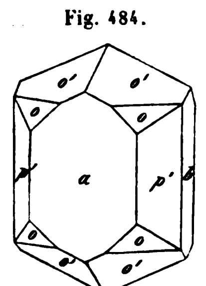


Fig. 484.

	α	β	γ	$2V$	$2E$
B	1,5067	1,5100	1,5731	26° 29′	40° 28′
D	1,5101	1,5135	1,5775	— 49	41 5
E	1,5132	1,5167	1,5819	— 59	41 27

rauf, Sitz.-Ber. d. Wien. Ak. 42, 128). Starke Aen-
g des Axenwinkels mit der Temperatur:

$2E = 37^0 44'$ bei 15^0 C.
$= 41 \; 36$ - 47 -
$= 42 \; 40$ - 56 -

loizeaux, Nouv. Rech. 60).

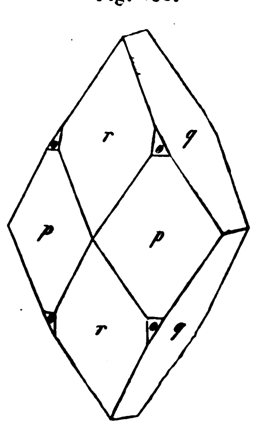


Fig. 485.

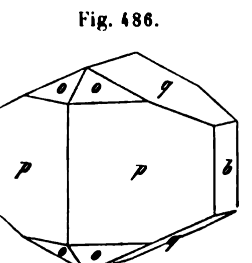
tronensäure $= C^6H^8O^7 + H^2O$. $a : b : c$
40 : 1 : 1,6621 Heusser. Combination Fig.
$= \{110\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $o = \{111\}$.
keit {001} vollkommen. Optische Axen-
00}, b Mittellinie. Doppelbrechung +.

α	β	γ	$2V$	$2E$
896	1,4943	1,5054	66° 31′	110° 3′
932	1,4977	1,5089	66 9	107 28
967	1,5011	1,5122	64 47	107 4

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 41,790). Der scheinbare **Axenwinkel** in verschiedenen Platten oft ziemlich variirend.

Terpin (Terpentinölhydrat) = $C^{10}H^{20}O^2 + 2H^2O$. $a : b : c$ = **0,8072** : 1 : 0,4764 Arzruni. Combination Fig. 486: p={110}, o={111}, q={011}, b = {010}. Axenebene {010}, a **Mittellinie. Doppelbrechung** +. **Brechungsexponenten:**

Fig. 486.



	α	β	γ
Li-Linie	1,5024	1,5093	1,5211
Na -	1,5049	1,5124	1,5243
Tl -	1,5073	1,5148	1,5272

Der wahre Axenwinkel direct **bestimmt (durch** Messung des scheinbaren spitzen **und stumpfen in** Oel, s. S. 120):

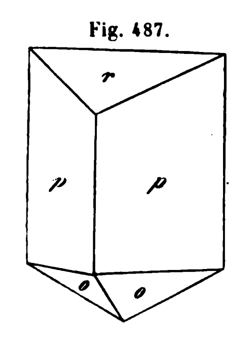
Li-Linie	$2V$ =	77° 37′
Na -		— 27
Tl -		— 18

(Arzruni, Poggendorff's Ann. 152, 282).

Benzol = C^6H^6. $a : b : c$ = 0,891 : 1 : 0,799 Groth. **Nur die primäre** Pyramide {111}.

Resorcin = $C^6H^6O^2$. $a : b : c$ = 0,9123 : 1 : 0,5876 Calderon. **Hemimorph.** Combination Fig. 487: p = {110}, **oben** r = {101}, unten {111}; doch kommt {101} **auch** vollständig vor an Krystallen, welche {110} **und** {101} gleich gross zeigen und **regulären Oktaëdern** ähnlich erscheinen. Optische Axenebene {001}, α erste Mittellinie, Doppelbrechung —; **für die** *Na*-Linie ist $2V$ = 46°14′, β = 1,555;

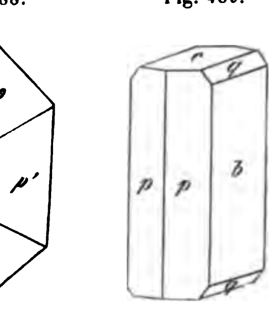
Fig. 487.



$2E$ = 76°	40′	roth,
76	6	gelb,
74	35	blau (Groth).

Trinitrophenol (Pikrinsäure) = $C^6H^3N^3O^7$. $a:b:c$=**0,9741 : 1 : 0,9374** Mitscherlich. Combination Fig. 488: o = {111}, p' = {120}, a = {100}. Optische Axenebene {010}.

Fig. 488. Fig. 489.



Phtalsäure = $C^6H^4(HCO^2)^2$. $a : b : c$ = 0,355 : 1 : 1,363 Marignac. **Combination** Fig. 489: p = {110}, b={010}, c = {001}, q = {011}.

Mellithsaures Ammon = $C^6(NH^4CO^2)^6 + 9H^2O$. $a : b : c$ = 0,6461 : 1 : 0,3561 G. Rose. **Gewöhnlich** sind die Krystalle **nur sechs**seitige Prismen, gebildet **von {110} und** {010}, mit der Basis; **dazu treten zu**weilen kleine Flächen von **{101} und**

{011}. Optisch interessant durch seine grosse Dispersion der Axen; die Verticalaxe ist erste Mittellinie und Axe der grössten Elasticität für alle Farben, die optische Axenebene dagegen ist für Roth {010}, für Violett {100}; die Krystalle sind also für eine Farbe, und zwar für Grün, welches näher an Gelb als an Blau liegt, einaxig, und zeigen daher die in Fig. 5 der Tafel dargestellte Interferenzfigur (vergl. S. 113). Brechungsexponenten für Strahlen, deren Schwingungsrichtung

	‖ a	‖ b
roth	1,550 (β)	1,552 (γ)
grün	1,564 (γ)	1,563 (β)
blau	1,572 (γ)	1,570 (β)

$2V = 11^0\ 0'$, $2E = 17^0$ roth
12 40 — 20 blau.

Demnach ist die Dispersion der wahren Axen 23° 40′, die der scheinbaren 37° (Grailich und v. Lang, Sitz.-Ber. der Wien. Akad. 27, 49).

Fig. 490.

Triphenylmethan = $(C^6H^5)^3CH$. $a:b:c = 0{,}5716 : 1 : 0{,}5867$ Hintze. Hemimorph. Combination Fig. 490: $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $l = \{021\}$, $o = \{122\}$. Spaltbar nach {011} unvollkommen. Ebene der optischen Axen {001}, b erste Mittellinie, $2H_0 = 139\frac{1}{2}^0$ Na.

Triphenylbenzol = $C^6H^3(C^6H^5)^3$. $a:b:c = 0{,}5662 : 1 : 0{,}7666$ Arzruni. Combinationen Fig. 491, 492: $a = \{100\}$, $l = \{310\}$, $m = \{110\}$, $b = \{010\}$ $d = \{011\}$, $p = \{112\}$, $k = \{012\}$. Axenebene {010}, c Mittellinie. Ausserordentlich starke negative Doppelbrechung:

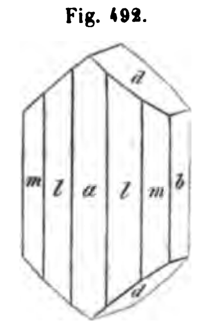


Fig. 491. Fig. 492.

	α	β	γ
Na:	1,5241	1,8670	1,8725
Tl:	1,5291	1,8848	1,8897

$2E$ für Li: 17° 48′
Na: 18 25
Tl: 19 27

(A. Arzruni, Zeitschr. f. Kryst. 1, 445.)

§. 96. **Die Hemiëdrie des rhombischen Systems.** 1) Der allgemeine Repräsentant aller rhombischer Formen ist die rhombische Pyramide, von der die Prismen und die Pinakoide nur specielle Fälle darstellen. Jede Hälfte einer Symmetrieaxe wird von vier Flächen der holoëdrischen Pyramide in einem Punkte geschnitten; wir werden also eine hemiëdrische Form derselben erhalten, wenn wir in denselben Punkten nur je zwei Flächen schneiden lassen, welche so ausgewählt sind, dass die von ihnen gebildeten Kanten an den beiden zu einer Symmetrieaxe gehörigen Seiten

jedesmal gleichen Winkel haben. Dieser Bedingung genügt nun offenbar die Form, welche entsteht, wenn alle abwechselnden Flächen der rhombischen Pyramide allein vorhanden gedacht werden. Dieselbe erhalten wir, wenn wir uns die holoëdrische Form durch die drei Symmetrieebenen in acht Oktanten zerlegt denken und die Hälfte derselben so auswählen, dass die zu jeder Fläche symmetrische jedesmal der anderen Hälfte angehört. Behalten wir die Numerirung der Fig. 446 bei und lassen z. B. die Flächen 2, 4, 5, 7 ausfallen, wie es in Fig. 493 dargestellt ist, so ist offenbar die von 1 und 8 gebildete Kante gleich der von 3 und 6 gebildeten; die zwischen 1 und 3 gleich der zwischen 6 und 8; endlich Kante 1 : 6 = Kante 3 : 8; folglich die von den Flächen 1, 3, 6, 8 umschlossene Form eine den Bedingungen der Hemiëdrie vollkommen genügende. Dieselbe ist in Fig. 494 *a* dargestellt, während Fig. 494 *b* die entgegengesetzte hemiëdrische Gestalt, aus den schraffirten Flächen der Fig. 493 bestehend,

Fig. 493.

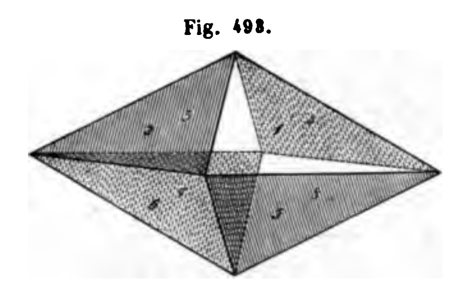
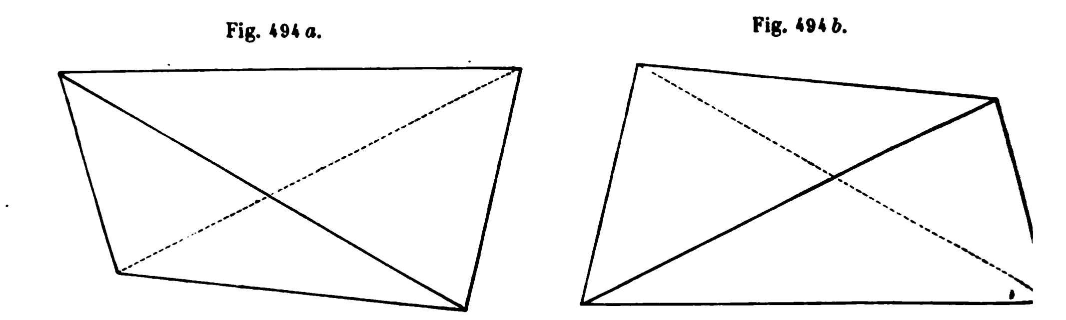


Fig. 494 *a*. Fig. 494 *b*.



zeigt. Die in Rede stehenden Krystallformen führen den Namen **rhombische Sphenoide***) und unterscheiden sich dadurch von den tetragonalen Sphenoiden, dass ihre vier Mittelkanten nicht gleich sind, sondern, wie aus Obigem hervorgeht, immer nur je zwei gegenüberliegende. Sie haben also dreierlei Kanten, zwei Polkanten, zwei stumpfere und zwei schärfere Mittelkanten; die Polkanten können sich demnach nicht, wie bei den tetragonalen Sphenoiden, rechtwinkelig kreuzen, sondern müssen dies unter schiefen Winkeln thun. Daraus sowie aus der dieser Hemiëdrie zu Grunde liegenden Zerlegung der holoëdrischen Form geht hervor, dass ein

*) Darnach heisst diese Hemiëdrie, die einzige des rhombischen Systems, die **sphenoidische**.

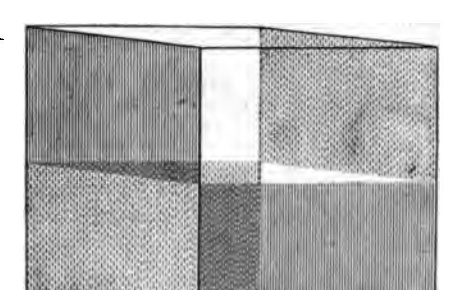
rhombisches Sphenoid keine Symmetrieebene besitzt, und dass die beiden entgegengesetzten Hälften einer rhombischen Pyramide, zu bezeichnen mit

$$\varkappa\{hkl\} \text{ und } \varkappa\{h\bar{k}l\} = +\frac{mP}{2} \text{ und } -\frac{mP}{2},$$

e n a n t i o m o r p h e Gestalten sind. Wären diese Krystalle nicht optisch zweiaxig, bei welcher Klasse eine Circularpolarisation nicht nachzuweisen ist, so würden sie nach Analogie der übrigen enantiomorphen Krystalle eine solche besitzen können. Es steht nun jedenfalls mit dieser Eigenschaft der sphenoidischen Hemiëdrie in gesetzmässigem Zusammenhange, dass fast alle in derselben krystallisirenden Substanzen in Lösung die Polarisationsebene des Lichtes drehen.

2) Wenden wir dieselbe Hemiëdrie nun auch auf die prismatischen Formen an, so muss das Resultat das Gleiche sein bei den Makro- und Brachydomen, wie bei den verticalen Prismen, da diese drei Arten von Formen ja beliebig vertauscht werden können. Sei z. B. Fig. 495 diejenige rhombische Pyramide, deren $m = \infty$, d. h. ein rhombisches Prisma, so wird bei Anwendung dieser Hemiëdrie auf dasselbe je eine Fläche des einen Hemiëders mit einer des entgegengesetzten zusammenfallen, die Prismen bleiben also scheinbar holoëdrisch; dasselbe gilt von denjenigen Pyramiden, deren Brachydiagonale $= \infty$, den Brachydomen, endlich auch von den Makrodomen. Das primäre Prisma ist nun aber aufzufassen als ein rhombisches Sphenoid, dessen $m = \infty$, als die Grenzgestalt der verticalen Reihe der Sphenoide, welche um so spitzer werden, d. h. um so schärfere Polkanten erhalten, je grösser m ist. Wäre also eine hemiëdrisch krystallisirende Substanz zugleich der Hemimorphie unterworfen, so würden die der Axe der Hemimorphie parallelen prismatischen Formen in zwei im Auftreten von einander unabhängige Paare paralleler Flächen zerfallen.

Fig. 495.



3) Für den Werth $m = 0$ fallen sowohl die beiden oberen, wie die beiden unteren Flächen der Sphenoide zu einer zusammen; diese ist die Basis, welche sich demnach nicht von der holoëdrischen unterscheiden kann. Wie in diesem Falle die Polkanten verschwinden, weil ihr Winkel $= 0^0$ wird, so ist das Gleiche der Fall mit den stumpferen Mittelkanten, sobald der Coëfficient der Makrodiagonalen und der Verticalen gleichzeitig $= \infty$ werden, endlich mit den schärferen Mittelkanten, wenn die Axen a und c den Factor ∞ erhalten, d. h. das Makro- und das Brachypinakoid werden durch diese Hemiëdrie ebenso wenig, wie die Basis und die prismatischen Formen alterirt.

Beispiele. Schwefelsaures Magnesium (Bittersalz) $= MgSO^4 + 7H^2O$. $a : b : c = 0{,}9901 : 1 : 0{,}5709$ Brooke. Combination Fig. 496: $p = \{110\}$, $o = \varkappa\{111\}$. Doch findet sich auch oft $\varkappa\{1\bar{1}1\}$, so dass die Krystalle einer tetragonalen Combination von Prisma und Pyramide gleichen. Spaltbarkeit $\{010\}$ vollkommen. Optische Axenebene $\{001\}$, b Mittellinie, Doppelbrechung —.

Fig. 496.



	α	β	γ
Linie C	1,4305	1,4530	1,4583
D	1,4325	1,4554	1,4608
F	1,4374	1,4607	1,4657

(Topsøe, Ann. d. chim. phys. [5]. Vol. I). Dispersion der Axen sehr schwach; direct beobachtet (Des Cloizeaux, Ann. d. mines [5] XIV):

$2E = 77^0\ 59'$ roth, $77^0\ 43'$ violett.

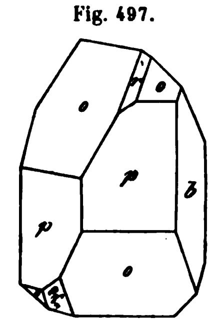
Schwefelsaures Zink (Zinkvitriol) $= ZnSO^4 + 7H^2O$. $a : b : c = 0{,}9804 : 1 : 0{,}5631$ Brooke. Combination gleich der vorigen; nur tritt $\{111\}$ weit häufiger mit allen acht Flächen auf. Spaltbarkeit $\{010\}$. Optische Axenebene $\{001\}$, b Mittellinie, Doppelbrechung —.

	α	β	γ
Linie C	1,4544	1,4776	1,4812
D	1,4568	1,4801	1,4836
F	1,4620	1,4860	1,4897

(Topsøe, a. a. O.). Direct beobachtet (Des Cloizeaux, a. a. O.):

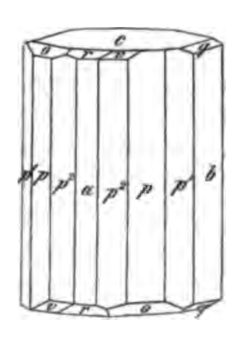
$2E = 70^0\ 23'$ roth, $70^0\ 6'$ violett.

Fig. 497.



Saures weinsaures Kalium (Weinstein) $= KHC^4H^4O^6$. $a : b : c = 0{,}7115 : 1 : 0{,}7372$ Schabus. Combination Fig. 497: $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \varkappa\{1\bar{1}1\}$ vorherrschend, $\varkappa\{111\}$, $r = \{101\}$. Doch kommt auch gleich grosse Ausbildung beider Sphenoide vor. Spaltbarkeit $\{001\}$. Optische Axen in derselben Ebene, b erste Mittellinie, Doppelbrechung negativ. $2H_a = 84^0$, $2E = 162^0$, $\varrho > v$ (V. von Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 31, 109).

Fig. 498.



Rechtsweinsaures Natronkali (Seignettesalz) $= KNaH^4C^4O^6 + 4H^2O$. $a : b : c = 0{,}8317 : 1 : 0{,}4296$ Rammelsberg. Combination Fig. 498: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $p' = \{120\}$, $p^2 = \{210\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, dazu weniger häufig $o = \varkappa\{1\bar{1}1\}$, $v = \varkappa\{211\}$, $q = \{011\}$, $r = \{101\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, a Mittellinie, Doppelbrechung +.

	α	β	γ	$2V$	$2E$
Roth:	1,490	1,491	1,493	$71^0\ 6'$	$120^0\ 11'$
Gelb:	1,492	1,493	1,496	69 40	117 2

(Des Cloizeaux, Ann. d. mines [5] XIV, 366). Aenderung der optischen Constanten durch die Temperatur sehr beträchtlich; **Müttrich** (Poggend. Ann. d. Phys. 121, 193) fand:

	α	β	γ	$2V$	$2E$
Für Roth bei 16° C.	1,4912	1,4930	1,4964	72° 29′	123° 38′
„ „ „ 45° „	1,4869	1,4889	1,4920	76 46	135 11 *).

Rechtsweinsaures Natronammoniak (Ammoniumseignettesalz) $= (NH^4) Na\, H^4 C^4 O^6 + 4 H^2 O$. $a : b : c = 0{,}8233 : 1 : 0{,}4200$ Rammelsberg. Dieselbe Combination, wie die des vorigen Salzes. Optische Axenebene {100}, c Mittellinie. Doppelbrechung —; $\beta = 1{,}495$.

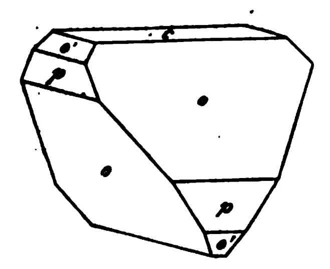
$2V = 62°$, $2E = 100°$ (Roth),
46°, 70° (Violett).

Rechtsweinsaures Antimonylkalium (Brechweinstein) $= K(SbO) C^4 H^4 O^6$. $a : b : c = 0{,}9556 : 1 : 1{,}1054$ Brooke. Combination Fig. 499: $o = \varkappa\{111\}$, $o' = \varkappa\{1\bar{1}1\}$, $p = \{110\}$, $c = \{001\}$. Spaltbarkeit {001}, {010} und {100}. Optische Axenebene {001}, b Mittellinie, Doppelbrechung —;

$2E = 85° 20'$ roth, $83° 10'$ blau

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 56).

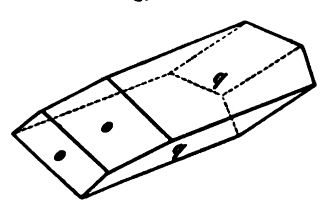
Fig. 499.



Linksweinsaures Antimonoxydkalium hat dieselbe Zusammensetzung und dieselbe Form, wie das vorige, aber $\varkappa\{1\bar{1}1\}$ erscheint vorherrschend, $\varkappa\{111\}$ klein.

Glycerin $= C^3 H^8 O^3$. $a : b : c = 0{,}70 : 1 : 0{,}66$ (nur approximativ zu bestimmen) von Lang. Combination Fig. 500: $q = \{011\}$, $o = \varkappa\{111\}$. Spaltbarkeit {100} unvollkommen. Axenebene {001}, erste Mittellinie wahrscheinlich a, zugleich grösste Elasticitätsaxe; Dispersion $\varrho < v$ (v. Lang, Poggendorff's Ann. 152, 637).

Fig. 500.



Asparagin $= C^4 H^8 N^2 O^3 + H^2O$. $a : b : c = 0{,}4737 : 1 : 0{,}8327$ Miller. Combination Fig. 501: $p = \{110\}$, $q' = \{021\}$, $c = \{001\}$, $o = \varkappa\{1\bar{1}1\}$. Optische Axenebene {010}, c Mittellinie, Doppelbrechung +;

	α	β	γ	$2V$
Roth:	1,5458	1,5778	1,6185	85° 5′
Gelb:	1,5489	1,5829	1,6246	86 15
Blau:	1,5542	1,5943	1,6378	89 51

Demnach ist für eine bestimmte Wellenlänge des

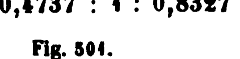
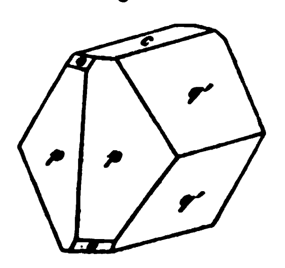


Fig. 501.



*) Dieses und das folgende Salz haben so starke Dispersion, dass die hyperbolischen Büschel des Axenbildes nirgends dunkel, sondern lebhaft gefärbt und von grosser Breite sind.

äussersten Blau der wahre Axenwinkel genau = 90°. (Groth. Poggendorff's Ann. 135, 651.)

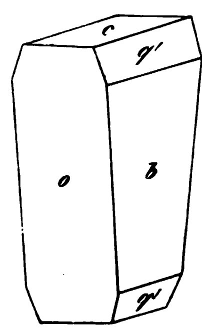


Fig. 502.

Milchzucker = $C^{12}H^{22}O^{11}$. $a:b:c = 0{,}3529:1:1{,}6092$ Schabus. Hemimorph. Combination Fig. 502: $c = \{001\}$, $b = \{010\}$, $q' = \{021\}$, zuweilen am oberen Pol so vorherrschend, dass (001) nur als schmale Abstumpfung erscheint, $o = \varkappa\{11\bar{1}\}$ nur mit den beiden unteren Flächen ausgebildet. Spaltbarkeit {100} deutlich. Optische Axenebene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung negativ. Axenwinkel $2E = 40°$ circa, $\varrho > v$ (Grailich und von Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 27,66).

Mycose (= Trehalose) = $C^{12}H^{22}O^{11} + 2H^2O$. $a:b:c = 0{,}6814:1:0{,}4171$ Bodewig. Combination Fig. 503: $p = \{110\}$, $p' = \{120\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $o = \varkappa\{111\}$. Spaltbarkeit {110} deutlich. Optische Axenebene {010}, c Mittellinie, Doppelbrechung +. Durch Messung des spitzen und stumpfen Axenwinkels in Oel wurde gefunden:

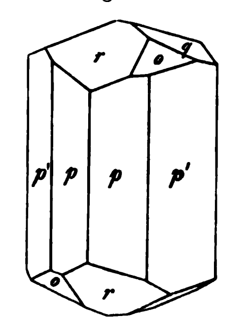


Fig. 503.

	2 V	2 E	β
Für die *Li*-Linie:	48° 2'		
„ „ *Na* „	50 16	78° 56'	1,478
„ „ *Tl* „	51 26	83 24	1,533

(Bodewig und Lehmann, unveröffentlichte Beob.) Des Cloizeaux (Nouv. Rech. 103) fand:

$2E = 73°\ 8'$ roth,
82 39 blau.

V. Das monosymmetrische Krystallsystem.

§. 97. **Die Symmetrie der monosymmetrischen Krystalle.** Aus der Definition dieses Krystallsystems, als der Gesammtheit aller Formen mit einer einzigen Symmetrieebene, geht sofort hervor, was für Gestalten überhaupt demselben angehören können.

Dazu ist zunächst zu rechnen die Symmetrieebene selbst, welche hier, wie die Symmetrieebenen aller anderen Systeme, ebenfalls eine krystallonomisch mögliche Fläche ist; das derselben parallele Flächenpaar stellt somit die wichtigste Krystallform des monosymmetrischen Systems dar.

Betrachten wir nun eine andere, unter irgend einem Winkel gegen jene Ebene geneigte Fläche eines monosymmetrischen Krystalls, so erfordert die Symmetrie desselben das Vorhandensein einer zweiten, in Bezug auf die Symmetrieebene zu ihr symmetrisch liegenden; die beiden Flächen schnei-

den einander somit in einer Kante, welche in der Symmetrieebene liegt. d. h. derselben parallel ist. Die vollständige Form, welche hierbei resultirt, wird demnach von diesen beiden und ihren parallelen Gegenflächen gebildet; es ist also eine prismatische Form, deren vier Kanten (je zwei gegenüberliegende gleichwinkelig) der Symmetrieebene parallel sind, und welche von dieser symmetrisch der Länge nach halbirt wird. Solcher prismatischer Formen von verschiedenstem Winkelmaass können nun beliebig viele an einem monosymmetrischen Krystall auftreten, und ihre Längsaxen können einander in der Symmetrieebene (welcher sie sämmtlich parallel sind) unter den mannigfachsten Winkeln durchschneiden, wenn sie nur alle durch rationale Indices auf einander zurückzuführen sind.

Eine andere Art von Gestalten resultirt aus dem besonderen Falle, dass der Winkel, unter welchem eine Krystallfläche die Symmetrieebene schneidet, $= 90^0$ ist; alsdann fällt die zweite, zu ihr symmetrische, mit der ersten zusammen, und diese bildet mit ihrer parallelen Gegenfläche allein schon die vollständige einfache Krystallform. Solcher normal zur Symmetrieebene stehender Flächenpaare sind nun wieder beliebig viele krystallonomisch möglich, deren Durchschnittsrichtungen mit der Symmetrieebene in dieser die mannigfaltigsten Richtungen haben können, nur beschränkt durch das Gesetz der Rationalität der Indices.

Da andere Fälle nicht möglich sind, als dass eine Krystallfläche der Symmetrieebene parallel, oder zu ihr normal ist, oder sie unter schiefem Winkel schneidet, so sind mit diesen dreien alle möglichen erschöpft, und es giebt somit im monosymmetrischen System nur drei Arten von einfachen Krystallformen:

1) die Symmetrieebene selbst;

2) Flächenpaare, welche normal zu ihr stehen;

3) prismatische Formen, welche sie unter schiefen Winkeln durchschneiden.

Aus dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie folgen nun auch die allgemeinen physikalischen Eigenschaften der monosymmetrischen Krystalle:

Ueber die Elasticität liegen zwar nur sehr wenige directe Messungen vor, doch ist aus der Uebereinstimmung, in welcher die Bestimmungen der Cohäsion und der Härte mit dem oben erwähnten Gesetze stehen, auch auf eine solche für die Elasticität zu schliessen. Darnach könnte dieselbe entweder ein Minimum oder ein Maximum haben in der Normale zur Symmetrieebene, der einzig vorhandenen Symmetrieaxe. Andere Minima und Maxima müssten stets solche von genau gleichem Werthe in den Richtungen bedingen, welche zu jenen symmetrisch liegen in Bezug auf die geometrische Symmetrieebene. Hiermit stimmen die vorhandenen Messungen überein.

Die Cohäsion kann in der Richtung der Symmetrieaxe entweder ein Minimum haben, oder ein Maximum; im ersteren Falle ist der Krystall

spaltbar nach der Symmetrieebene, im letzteren nach anderen Richtungen; da diese die verschiedensten sein können (Formen der zweiten und dritten Art, s. vor. S.), so muss eine Spaltbarkeit nach der Symmetrieebene am häufigsten vorkommen, und dies ist in der That der Fall. Die Härte ist ebenfalls symmetrisch zur Symmetrieebene; bestimmt man dieselbe auf einer Fläche, welche zu jener normal ist, nach verschiedenen Richtungen, so erhält man eine in Bezug auf jene Ebene symmetrische Härtecurve, eine gänzlich unsymmetrische auf anderen Flächen.

Da die optischen Eigenschaften dieselbe Symmetrie befolgen müssen, so ergiebt sich, dass die geometrische Symmetrieebene die optischen Elasticitätsflächen für sämmtliche Farben symmetrisch halbirt, d. h. einer der drei Hauptschnitte dieser Elasticitätsflächen zusammenfallen muss mit der Symmetrieebene der Krystalle. Daraus folgt, dass der Symmetrieaxe eine der drei optischen Elasticitätsaxen für jede Farbe des Lichtes parallel ist, und dass die beiden anderen in der Symmetrieebene liegen. Sind diese letzteren die der grössten und kleinsten Elasticität, so fällt die Ebene der optischen Axen mit der Symmetrieebene zusammen; ist dagegen die Symmetrieaxe die Axe der grössten oder der kleinsten Elasticität, so steht die optische Axenebene normal zur Symmetrieebene; ein dritter Fall ist nicht möglich, oder die geometrische Symmetrieebene würde aufhören, eine solche auch in physikalischer Hinsicht zu sein. Durch die Symmetrie ist somit nur eine Elasticitätsaxe in ihrer Lage (|| der Symmetrieaxe) fixirt, für die beiden anderen folgt daraus nur, dass sie in der Symmetrieebene liegen, nicht, dass sie in derselben eine bestimmte, krystallographisch gegebene Richtung haben müssten. Es ist somit weder dafür, dass dieselben in irgend einer Beziehung zu den Richtungen der jener Ebene parallelen Kanten stehen, noch dafür, dass sie selbst für die verschiedenen Farben die gleiche Richtung besitzen, irgend eine theoretische Ursache vorhanden. In der That ist auch keines von beiden der Fall; die beiden in der Symmetrieebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen haben bei jeder Substanz natürlich eine ganz bestimmte Richtung, welche aber in keiner Beziehung zu der der Krystallkanten steht; sie sind ferner verschieden für die verschiedenen Farben, sie sind innerhalb der Symmetrieebene dispergirt. Ihre Lage ist ferner abhängig von der Temperatur des Krystalles, sie ändert sich, wenn derselbe erwärmt wird, aber natürlich nur innerhalb der Symmetrieebene.

Was die Ausdehnung der monosymmetrischen Krystalle durch die Wärme betrifft, so muss, wenn dieselbe symmetrisch zu jener Ebene stattfinden soll, die Normale derselben, die Symmetrieaxe, entweder die Richtung der grössten, der mittleren oder der kleinsten Ausdehnung sein; es müssen also die beiden anderen in der Symmetrieebene liegen. Nun ist aber theoretisch gar kein Grund vorhanden, dass sie etwa mit den optischen Hauptschwingungsrichtungen zusammenfallen müssten, ja dass ihre Lage selbst eine constante, von der Temperatur unabhängige sei. Dies ist denn auch

in Wirklichkeit keineswegs der Fall; jene beiden der Symmetrieebene parallelen Richtungen stehen zwar auf einander stets normal, wie die beiden Hauptschwingungsrichtungen für dieselbe Farbe, aber ihre Lage gegen die Krystallkanten ist bei jedem Körper eine andere, ohne dass hierbei eine allgemeine Gesetzmässigkeit hervorträte.

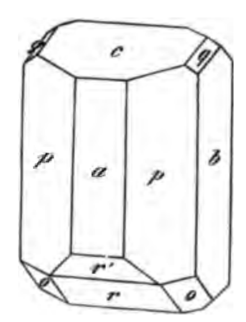
Wie die bisher erwähnten, welche allein eine praktische Wichtigkeit beanspruchen können, bewahren auch alle übrigen physikalischen Eigenschaften nur in Bezug auf eine Ebene, die geometrische Symmetrieebene, ihre Symmetrie; eine weitere ist bei keiner derselben zu erkennen.

§. 98. **Wahl der Axen und der Grundform.** Bisher wurde es immer als das Geeignetste befunden, zu Axenebenen drei Symmetrieebenen zu wählen. Dies ist aber im monosymmetrischen System nicht möglich, weil nur eine einzige solche Ebene vorhanden ist; es wird also hier nöthig sein, wenigstens noch zwei andere Krystallflächen (man könnte bekanntlich alle drei beliebig nehmen) zu wählen, und diese Wahl so zu treffen, dass die Ableitung der übrigen Formen die möglichst einfache und namentlich die Berechnungen in thunlichster Weise erleichtert werden. Das letztere geschieht bekanntlich, wenn von den drei Axenwinkeln so viele als möglich = 90° sind. Nun giebt es in der That eine Art, die Axenebenen auszuwählen, bei welcher zwei jener Winkel rechte sind (alle drei = 90° ist im Allgemeinen nicht möglich, wie weiterhin gezeigt werden soll); wenn nämlich als solche genommen werden die Symmetrieebene und zwei jener im vor. § erwähnten zweiten Art von Formen: Flächen, welche normal zu der ersteren stehen. Diese schneiden einander offenbar in der Normale zur Symmetrieebene, d. i. in der Symmetrieaxe, welche also die eine Axe darstellt; die beiden anderen müssen mit dieser rechte Winkel bilden, da sie als Durchschnittslinien jener beiden Flächen mit der Symmetrieebene in letzterer liegen. Diese Art der Wahl der Axen ist nun die allgemein adoptirte, und werden die monosymmetrischen Krystalle gewöhnlich so gestellt, dass die Symmetrieebene vertical ist und auf den Beobachter zuläuft, und dass eine der beiden anderen Axenebenen ebenfalls vertical steht; alsdann ist die dritte Axenebene, da sie nicht normal zu der zweiten ist, nicht horizontal, sondern mehr oder weniger geneigt; es ist ferner allgemein üblich, die Krystalle so zu orientiren, dass diese letzte Fläche nach vorn (auf den Beobachter zu) geneigt ist. Bei dieser Stellung läuft offenbar die Symmetrieaxe quer und horizontal, es ist die bisher stets mit b bezeichnete Axe, und wird hier die Orthodiagonale oder schlechtweg die Symmetrieaxe genannt; die Durchschnittsrichtung der beiden verticalen Axenebenen, deren eine die der Symmetrie ist, steht senkrecht, es ist die Verticalaxe c; endlich die Durchschnittsrichtung der dritten Ebene mit derjenigen der Symmetrie ist nach vorn geneigt, auf den Beobachter zulaufend; sie wird deshalb die Klinodiagonale genannt und mit a bezeichnet. Man sieht nun leicht, dass bei einer solchen Wahl und Stellung der Axen dieselben sich in ihrer Richtung nur dadurch von dem

Axensystem eines rhombischen Krystalls unterscheiden, dass eine derselben aus der horizontalen Lage nach vorn geneigt erscheint; hierauf bezieht sich der von Naumann gebrauchte Name »monoklines System«, welcher deshalb unpassend ist, weil man mit demselben Rechte alle drei Axen schief geneigt auswählen könnte. Es bedarf kaum der Bemerkung, wie verfehlt der noch zuweilen gebrauchte Name »Hauptaxe« für die Verticalaxe ist, wenn man sich erinnert, dass diese eine ganz beliebige Krystallkante ist.

Betrachten wir nun ein ganz bestimmtes Beispiel, etwa den in Fig. 504 dargestellten monosymmetrischen Krystall*), so ist leicht zu sehen, dass derselbe nach keiner anderen Ebene in zwei gleiche und entgegengesetzte Hälften zerlegt werden kann, als parallel der Fläche *b*; diese Krystallfläche heisst also die Symmetrieebene. Zu dieser sind normal die Flächen *c*, *a*, *r'* und *r* mit ihren parallelen Gegenflächen; wählen wir nun von diesen zwei zu Axenebenen, z. B. *a*, welches wir vertical stellen, und *c*, welches schräg nach vorn läuft, so hat der Krystall in der Figur diejenige Stellung, von welcher oben ausgesagt wurde, dass sie die allgemein adoptirte eines monosymmetrischen Krystalls sei.

Fig. 504.



Die Klinodiagonale *a* ist nun die Durchschnittsrichtung von *b* und *c*, oder, da diese Kante durch *q* abgestumpft ist, die Kante *c* : *q*; die Orthodiagonale *b* ist die Normale zur Fläche *b* oder, was dasselbe ist, die Kante *a* : *c*; die Verticalaxe *c* endlich ist die Durchschnittsrichtung der Flächen *a* und *b*, oder, da diese Kante durch *p* abgestumpft ist, die Kantenrichtung *a* : *p* oder *b* : *p*.

Nachdem nunmehr drei bestimmte Kantenrichtungen des Krystalls als »Axen« fixirt sind, können wir alle Flächen desselben durch ihre Parameter, wie bisher, bestimmen, und haben daher zunächst zur Wahl einer Grundform zu schreiten. Diese muss irgend eine Form sein, deren Flächen die drei Axen in endlichen Abständen schneiden; solcher ist aber an dem als Beispiel gewählten Krystall Fig. 504 nur eine einzige vorhanden, nämlich die prismatische Gestalt *o o* nebst ihren beiden oben hinten gelegenen Gegenflächen. Jede Fläche dieser Form liegt in einem Oktanten des Raumes, gebildet von den drei Axenebenen *a*, *b*, *c*, in welchem der Winkel der ersteren mit der letzten spitz ist; ihre Lage ist bekannt, d. h. wir können das Verhältniss, in welchem die drei Axen von der Fläche geschnitten werden, berechnen, wenn wir den Winkel der Axen *a* und *c* (gleich dem-

*) Für den Anfänger ist es hier wohl unumgänglich nöthig, sich die Anschauung durch ein Modell, wie solche käuflich sind, zu erleichtern; die Figur stellt einen Feldspathkrystall dar.

jenigen der Flächen a und c), d. h. den sogenannten Axenwinkel, welcher mit β bezeichnet wird, kennen, und ferner die Neigung der Fläche gegen zwei jener Axenebenen.

Berechnet man aus diesen Grössen das Verhältniss der drei Parameter $OA : OB : OC = a : b : c$ der Grundform, so sind, da ausserdem die drei Axenwinkel, $\alpha = 90^0$, $\beta =$ dem gemessenen Winkel der Flächen a und c, $\gamma = 90^0$, bekannt sind, nunmehr die Elemente des Krystalls und, vermöge des Gesetzes der Rationalität der Indices, die Gesammtheit aller seiner möglichen Formen, seine Krystallreihe, gegeben.

Aus den Entwickelungen des vorhergehenden § über die Ausdehnung der Krystalle geht unmittelbar hervor, dass zwar die Axenwinkel α und γ unverändert rechte bleiben, wenn der Krystall erwärmt wird, dass aber β sich dabei ändern muss, da innerhalb der Symmetrieebene nach verschiedenen Richtungen die Ausdehnungscoëfficienten verschieden sind, also die darin gelegenen Krystallkanten bei anderer Temperatur einander auch unter (wenn auch nur sehr wenig) verschiedenen Winkeln schneiden müssen. Ferner geht daraus hervor, dass parallel den drei Axen a, b und c die Ausdehnung keine gleiche ist, also auch das Verhältniss $a : b : c$ sich stetig mit der Temperatur des Krystalls ändert, d. h. ein irrationales ist. Genau genommen gelten demnach von den Elementen eines monosymmetrischen Krystalls β und das Parameterverhältniss der Grundform nur für eine bestimmte Temperatur.

Im folgenden § sollen nunmehr alle übrigen möglichen Formen auf die so gewählten Axen und Grundform bezogen und entsprechend bezeichnet werden.

§. 99. **Ableitung und Bezeichnung der monosymmetrischen Formen.** Zu der von uns zur Grundform gewählten Fläche o (Fig. 504) und ihrer parallelen Gegenfläche erfordert die Symmetrie noch ein zweites Flächenpaar auf der entgegengesetzten Seite der Symmetrieebene, also ist die vollständige Grundform eine prismatische Gestalt. Dieselbe wird, da sie, in Bezug auf ihre Lage zu den Axen, der primären Pyramide des rhombischen Systems entspricht, Hemipyramide*) genannt. Ausser dieser Form kann an demselben Krystall eine zweite prismatische Form auftreten, deren Flächen dieselben Parameter haben, aber über dem stumpfen Axenwinkel, d. h. vorn oben rechts und links, sowie hinten unten rechts und links, gelegen sind. Diese Form nennt man ebenfalls »Hemipyramide« und unterscheidet sie von der ersteren, der primären hinteren (nach Naumann

*) Dieser Name ist nicht glücklich gewählt, da die betreffende Form keine Hemiëdrie einer rhombischen Pyramide, sondern eine vollständige Form darstellt, deren geometrischer Charakter und physikalische Eigenschaften vollkommen verschieden sind von denen der rhombischen Formen. Ebenso wenig vortheilhaft ist es, dass in der Naumann'schen Bezeichnung die hintere Hemipyramide, welche die negative Seite der a-Axe schneidet, als positive bezeichnet wird.

positiven) als **primäre vordere** (**Naumann's** negative) **Hemipyramide**. Die Zeichen dieser Formen sind:

$$\{\bar{1}11\} = +P \text{ (oder } P) \text{ und } \{111\} = -P$$

Zur ersteren Form gehören die Flächen:

$$(\bar{1}11)\ (\bar{1}\bar{1}1)\ (11\bar{1})\ (1\bar{1}\bar{1})$$

zur zweiten die folgenden:

$$(111)\ (1\bar{1}1)\ (\bar{1}1\bar{1})\ (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$$

Es ist hierbei aber wohl zu beachten, dass jede dieser beiden Hemipyramiden für sich die Gesammtheit aller, durch die Symmetrie einander bedingender Flächen, d. h. eine vollständige einfache Krystallform ist, dass die eine also zur andern in keiner weiteren Beziehung steht, als dass bei dieser Wahl der Axen zufällig diese mit jener gleiche Parameter erhält (bei einer andern Wahl derselben würde es eine andere sein). Es führt daher leicht zu einer falschen Vorstellung, wenn man, wie es häufig geschieht, die Combination dieser beiden einfachen Formen als die »vollständige monosymmetrische Pyramide« bezeichnet.

Ausser der primären vorderen und der primären hinteren Hemipyramide können nun aber an einem Krystall noch die mannigfaltigsten abgeleiteten Hemipyramiden, vordere wie hintere, vorkommen, deren Parameterverhältnisse rationale Vielfache desjenigen der primären sind. Man kann dieselben genau ebenso wie im rhombischen System in drei Ableitungsreihen ordnen:

1) Hemipyramiden der verticalen Reihe, welche dasselbe Verhältniss der Klino- und Orthodiagonale wie die primäre, aber andere Verticalaxe besitzen; sie sind theils flacher als jene:

$$\{hhl\} \text{ und } \{\bar{h}hl\}_{(h<l)} = \mp \frac{1}{m}P$$

oder spitzer:

$$\{hhl\} \text{ und } \{\bar{h}hl\}_{(h>l)} = \mp mP$$

2) Hemipyramiden der klinodiagonalen Reihen: Eine solche Reihe bilden diejenigen Hemipyramiden, welche gleiches Verhältniss der Orthodiagonale zur Verticale, wie $\{111\}$, aber $n$fache Klinodiagonale haben:

$$\{hkk\} \text{ und } \{\bar{h}kk\}_{(h<k)} = \mp P\!\!\!\backslash n$$

Eine gleiche Reihe leitet sich aber von jeder Pyramide der verticalen Reihe ab, also allgemein:

$$\{hkl\} \text{ und } \{\bar{h}kl\} = \mp mP\!\!\!\backslash n$$

3) Hemipyramiden der orthodiagonalen Reihen: Durch rationale Vervielfältigung der Symmetrieaxe bei primär bleibendem Verhältniss $a:c$ folgt die Reihe:

$$\{hkh\} \text{ und } \{\bar{h}kh\}_{(h>k)} = \mp \bar{P}n\,.$$

Ausgehend von einer beliebigen Hemipyramide $\mp mP$, die allgemeine Reihe:

$$\{hkl\} \text{ und } \{\bar{h}kl\} = \mp m\bar{P}n.$$

Alle diese Reihen führen nun auf gewisse Grenzformen, welche entstehen, wenn einer oder zwei der Indices den Werth 0 annehmen.

Wenn in der verticalen Reihe der Hemipyramiden h sehr viel grösser als l, also der Coëfficient m einen sehr grossen Zahlenwerth besitzt, so hat die betreffende prismatische Form eine nahe verticale Stellung; ist $l = 0$, d. h. $m = \infty$, so bildet sie ein wirkliches verticales Prisma, und zwar das primäre (in Fig. 504 die mit p bezeichnete Form). Dieses wird, da es zugleich die Grenzform der verticalen Reihe der positiven Hemipyramiden wie derjenigen der negativen ist, einfach mit $\infty P = \{110\}$ bezeichnet. Denken wir uns die oben erwähnte Combination von $+P$ und $-P$, so besitzt diese vier Combinationskanten, welche in der die Axen a und b enthaltenden Ebene liegen; diese vier Kanten werden durch das primäre Prisma vertical, d. h. nicht gerade, abgestumpft, da $+P$ und $-P$ ja verschiedene Neigung gegen die Verticalaxe haben.

Da sich von jeder Hemipyramide der verticalen Reihe durch Vervielfältigung der Klinodiagonale um die Zahl n eine neue herleiten lässt, so bilden alle klinodiagonalen Hemipyramiden, sowohl die positiven als die negativen, deren n das gleiche ist, wiederum je eine verticale Ableitungsreihe; das gemeinschaftliche Grenzglied dieser beiden Reihen für den Fall $m = \infty$ ist wieder ein verticales Prisma, welches aber vorn einen schärferen Winkel hat als das primäre, und zwar um so mehr, je grösser n ist. Dieses Prisma wird bezeichnet

$$\{hk0\}_{(h<k)} = \infty \not{P} n$$

Solcher giebt es natürlich eine ganze Reihe mit verschiedenen n ($n = \frac{k}{h}$, d. h. zwischen 1 und ∞), welche sämmtlich die seitlich gelegenen Kanten des primären Prismas zuschärfen.

In genau derselben Weise bilden alle abgeleiteten orthodiagonalen Hemipyramiden mit demselben n eine positive und eine negative verticale Ableitungsreihe, deren gemeinschaftliches Grenzglied, wenn $m = \infty$, ein abgeleitetes orthodiagonales Prisma von verticaler Stellung ist; von dieser Art giebt es verschiedene mit verschiedenen Werthen von n, deren vordere und hintere Kante um so stumpfer sind, je grösser $n = \frac{h}{k}$. Sie schärfen sämmtlich die vordere und die hintere Kante des primären Prismas zu und haben das Zeichen:

$$\{hk0\}_{(h>k)} = \infty \bar{P} n$$

Wie die verticalen Reihen stets zu den Prismen als Grenzformen führen, wenn $m = \infty$ wird, so müssen auch Endglieder der orthodiagonalen und klinodiagonalen Ableitungsreihen existiren, deren $n = \infty$ ist.

Betrachten wir zuerst eine klinodiagonale Reihe von Hemipyramiden, z. B. die primäre, so bilden die Flächen derselben offenbar um so spitzere Winkel mit der Klinodiagonale, je grösser der Coëfficient n ist. Erreicht dieser den Werth ∞, so sind die vier Flächen dieser Hemipyramide der Klinodiagonale parallel, und zwar entsteht genau dieselbe Grenzform, sei es,

dass man von der positiven oder von der negativen Reihe ausgeht. Die entstehende prismatische Form entspricht den Domen des rhombischen Systems und wird daher Klinodoma genannt (eine solche Form ist die in Fig. 504 mit q bezeichnete). Das Endglied der von der primären (positiven oder negativen) Hemipyramide abgeleiteten klinodiagonalen Reihe ist das primäre Klinodoma:

$$\{011\} = \mathfrak{R}\infty,$$

dasjenige einer Reihe von Hemipyramiden, deren m kleiner als 1 ist, ein flacheres Klinodoma, allgemein:

$$\{0kl\}_{(k<l)} = \frac{1}{m}\mathfrak{R}\infty,$$

welches die obere und die untere Kante des primären zuschärft. Endlich hat jede klinodiagonale Reihe, welche sich von einer spitzeren Hemipyramide ableitet, als letztes Glied ein schärferes Klinodoma:

$$\{0kl\}_{(k>l)} = m\mathfrak{R}\infty,$$

welches die seitlichen Kanten des primären zuschärft.

Gehen wir über zur Betrachtung der Grenzformen der makrodiagonalen Ableitungsreihen, so ist klar, dass wir uns denselben um so mehr nähern, je grösser der Coëfficient n, d. h. je grösser der Winkel ist, welchen die Flächen der Hemipyramiden mit der Symmetrieebene einschliessen. Ist $n = \infty$, so wird dieser Winkel $= 90^0$ (da die Flächen alsdann der Symmetrieaxe parallel, müssen sie zur Symmetrieebene normal sein); je zwei zu einander symmetrisch liegende Flächen fallen alsdann in eine Ebene, ebenso das Paar der beiden Gegenflächen, und aus der Hemipyramide wird ein Paar paralleler Flächen, welche zugleich der Symmetrieaxe parallel sind. Da das Verhältniss der Axen a und c in einer solchen Ableitungsreihe constant bleibt, so muss jene Grenzgestalt, deren $b = \infty$ ist, die vordere und hintere Kante der derselben Reihe angehörigen Hemipyramiden gerade abstumpfen. Eine derartige Ableitungsreihe hinterer Hemipyramiden besitzt als Endglied, für den Fall $n = \infty$, ein Flächenpaar, dessen Lage am Krystall oben hinten und unten vorn ist; eine Reihe vorderer Hemipyramiden ein solches, dessen Lage vorn oben und hinten unten ist. In Fig. 504 sind zwei solcher Flächenpaare, welche Hemidomen genannt werden, r und r', dargestellt, und zwar ist r dasjenige, welches die Kante der primären hinteren Hemipyramide gerade abstumpft, also das primäre hintere (nach Naumann positive) Hemidoma:

$$\{\bar{1}01\} = +\mathfrak{P}\infty.$$

Das andere, r', ist ebenfalls ein hinteres, aber sein Verhältniss $a : c$ ist offenbar ein anderes, seine Verticalaxe grösser ($= 2c$); ein derartiges spitzeres Hemidoma ist allgemein zu bezeichnen mit

$$\{h0l\}_{(h>l)} = +m\mathfrak{P}\infty.$$

Andererseits sind auch Hemidomen möglich, welche die Grenzglieder je einer Reihe von Hemipyramiden sind, deren Anfangsglied eine flachere Hemi-

pyramide der Verticalreihe; deren Zeichen ist, wenn sie zu den hinteren gehören:

$$\{\bar{h}0l\}_{(h<l)} = +\frac{1}{m}\bar{P}\infty.$$

Hiernach verstehen sich die Zeichen der vorderen (nach Naumann negativen) Hemidomen, der Grenzformen der Reihen vorderer Hemipyramiden, ganz von selbst; sie sind:

$$\{h0l\}_{(h<l)} = -\frac{1}{m}\bar{P}\infty,$$
$$\{101\} = -\bar{P}\infty,$$
$$\{h0l\}_{(h>l)} = -m\bar{P}\infty.$$

Schliesslich bleibt es noch übrig, die drei möglichen Formen zu besprechen, welche je zweien Axen parallel sind, d. h. die drei Axenebenen selbst. Die wichtigste derselben, die Symmetrieebene, ist den Axen a und c parallel; wir können sie demnach auffassen als das Endglied der Reihe der abgeleiteten klinodiagonalen Prismen $\infty\mathcal{R}n$, dessen $n = \infty$ geworden, welches sich daher in ein Flächenpaar verwandelt hat, und können sie bezeichnen:

$$\infty\mathcal{R}\infty = \{010\}.$$

Zu derselben Bezeichnung gelangen wir auch, wenn wir sie auffassen als Endglied der Reihe der Klinodomen $m\mathcal{R}\infty$, welche sich derselben um so mehr nähern, je grösser m wird. Dieses Flächenpaar wird nach Analogie des rhombischen Systems, wo die beiden verticalen Axenebenen nach der zweiten ihnen parallelen Axe benannt werden, auch als Klinopinakoid bezeichnet.

Dem entsprechend nennt man das der Orthodiagonale parallele Flächenpaar,

$$\infty\bar{P}\infty = \{100\},$$

das Orthopinakoid. Es ist dies die Grenzform der orthodiagonalen Ableitungsreihe der verticalen Prismen $\infty\bar{P}n$, deren Flächen normal zur Symmetrieebene, also zu je zwei zusammenfallen, wenn $n = \infty$ wird. Ebenso ist es das letzte Glied sowohl der positiven, als der negativen Reihe von Hemidomen, welche demselben sich um so mehr nähern, je grösser m wird.

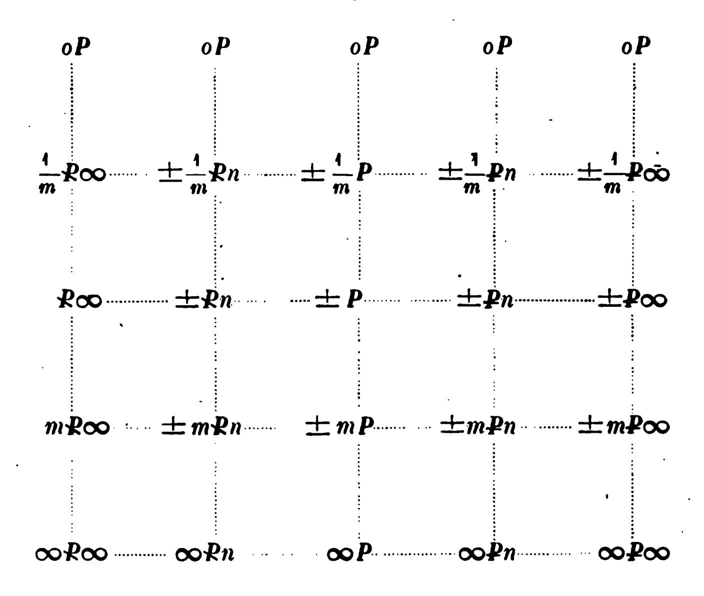
Das dritte den Axen a und b parallele Flächenpaar nennt man, wie im rhombischen System, die Basis und bezeichnet sie

$$oP = \{001\}.$$

Sie ist die untere Grenzform der verticalen Reihe der Hemipyramiden $\pm mP$, wenn $m = 0$ wird, ebenso diejenige der Klinodomen und der Hemidomen für denselben Werth von m.

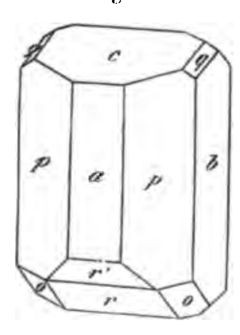
Den Zusammenhang aller dieser Ableitungsreihen übersieht man am leichtesten durch ein Schema, welches genau dem des rhombischen Systems entspricht, indem alle durch punktirte Linien verbundene Reihen bei glei-

chem Vorzeichen zugleich krystallographische Zonen darstellen, und welches nunmehr keiner weiteren Erläuterung bedarf:



Alle diese Formen reduciren sich jedoch auf die in §. 97 als allein möglich erkannten drei Arten: 1) die Symmetrieebene {010}; 2) die dazu normalen Flächenpaare, d. i. die Basis, das Orthopinakoid und die vorderen wie die hinteren Hemidomen; diese Formen, welche wir unter dem Namen Querflächen zusammenfassen wollen, unterscheiden sich in keiner Weise von einander, denn es steht ganz im Belieben des Beobachters, irgend welche dieser Flächenpaare zur Basis und zum Orthopinakoid zu wählen; 3) die prismatischen Formen, d. h. die Hemipyramiden, die verticalen Prismen und die Klinodomen, für welche das Gleiche gilt. Hätten wir z. B. den in Fig. 504 dargestellten Krystall so orientirt, dass *c* das Orthopinakoid, *a* die Basis geworden wäre, so würde das Prisma *p* zum Klinodoma, das Klinodoma *q* zum verticalen Prisma werden. Hätten wir dagegen etwa *r* zum Orthopinakoid, *a* zur Basis gewählt, so würde die bisherige Hemipyramide *o* zum verticalen Prisma, *p* zum Klinodoma, *r'* zum vorderen, *c* zum hinteren Hemidoma, *q* zur Hemipyramide werden. Von diesen verschiedenen Arten, den Krystall zu stellen, welche sich natürlich noch weiter vermehren liessen, hat keine in theoretischer Beziehung irgend einen Vorzug, und es sind lediglich praktische Fragen, welche für die eine oder andere den Ausschlag geben, so namentlich die möglichste Einfachheit der resultirenden Indices. Ferner empfiehlt es sich, nicht zwei

Fig. 504.



Flächen zu {001} und {100} zu wählen, welche einander unter einem sehr stumpfen Winkel schneiden; bei dem hierdurch resultirenden sehr spitzen Axenwinkel β kommen nämlich ebene Dreiecke zur Berechnung, deren einer Winkel so spitz sein kann, dass das Verhältniss zweier Seiten mit geringerer Genauigkeit berechnet werden kann, da einer kleinen Winkeldifferenz alsdann eine grosse Längendifferenz in der gegenüberliegenden Seite entspricht.

Anmerk. Unter den verschiedenen Stellungen, welche man einem monosymmetrischen Krystalle geben kann, sind auch solche möglich, bei denen die Orthodiagonale auf den Beobachter zuläuft und demnach zur a-Axe genommen ist (wobei der Axenwinkel α schief), und eine derartige Stellung kann unter Umständen nothwendig werden, um eine Vergleichung mit der Form eines chemisch verwandten Körpers, welcher in einem andern Systeme krystallisirt, zu ermöglichen. Sollen alsdann auch die Indices mit der gewählten Stellung im Einklang stehen, so würde natürlich das primäre Klinodoma das Zeichen {101}, die beiden Hemidomen die Zeichen {011} und {0$\bar{1}$1} u. s. f. erhalten. Die im Vorhergehenden und weiterhin benutzten Symbole haben nur dann die angegebene Beziehung zu den Naumann'schen Zeichen, wenn die übliche Stellung, a = Klinodiagonale, b = Symmetrieaxe, c = Verticale, beibehalten wird.

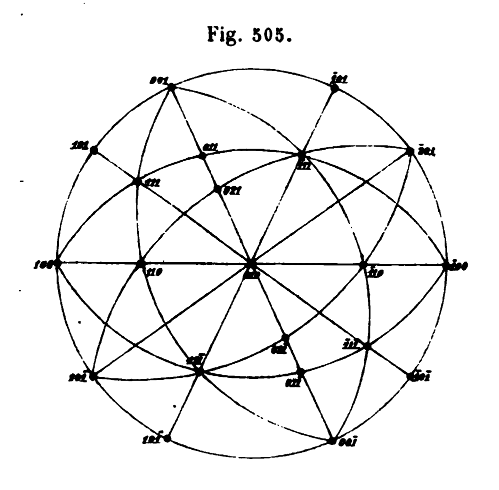
Zwillinge sind im monosymmetrischen Systeme nur zweierlei möglich, solche nach einer Querfläche (ob dieselbe als Basis, Orthopinakoid oder Hemidoma betrachtet wird, ist bekanntlich beliebig) oder nach einer Fläche einer prismatischen Form. Im ersteren Falle ist die wichtigste Richtung der beiden Krystalle, die Symmetrieaxe, parallel, daher auch die Symmetrieebenen beider zusammenfallen. Nach den Erörterungen S. 231 besitzt dieser einfachere Fall offenbar eine viel grössere Wahrscheinlichkeit, als der zweite, und in der That sind auch fast alle an monosymmetrischen Krystallen beobachtete Zwillingsbildungen hierher gehörig, während nach einer prismatischen Form nur bei wenigen Substanzen (s. z. B. Feldspath) regelmässige Verwachsungen beobachtet werden.

Denkt man sich durch die einzig vorhandene Symmetrieebene eine monosymmetrische Form in zwei Hälften zerlegt und betrachtet letztere als zwei von einander unabhängige Formen, so erhält man keine Hemiëdrie, sondern Hemimorphie, da alsdann die beiden entgegengesetzten Seiten der Symmetrieaxe ungleichwerthig in Bezug auf die an ihnen erscheinenden Flächen sind. Da nur eine Symmetrieaxe vorhanden, so ist auch nur dieser eine Fall der Hemimorphie möglich, welcher, wie an verschiedenen Beispielen gezeigt werden soll, zugleich mit polarer Pyroëlektricität der beiden Seiten des Krystalls verbunden ist. Da an einem hemimorphen Krystalle dieses Systems {010} nicht mehr Symmetrieebene ist, so kann nach dieser Fläche auch Zwillingsbildung eintreten.

§. 100. **Projection und Berechnung der monosymmetrischen Formen.** Die monosymmetrischen Formen können entweder auf die Symmetrieebene projicirt werden, oder auf eine zur Symmetrieebene senkrechte

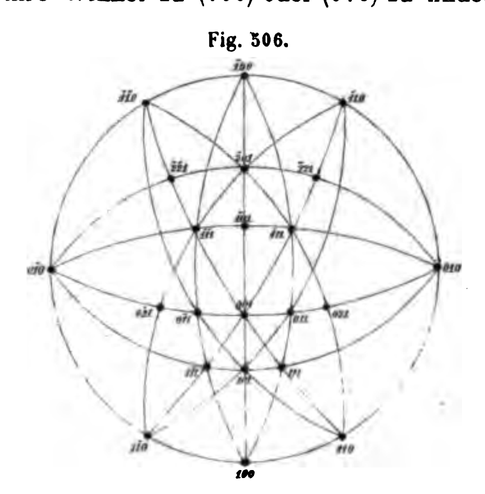
Fläche. Den ersteren Fall stellt Fig. 505 dar und zwar die Projection des Feldspathkrystalls Fig. 504 mit Hinzufügung der an demselben nicht gezeichneten Formen {111}, {101}, {011}. Bei dieser Darstellungsart fallen die Pole aller Querflächen in den Grundkreis, können also unmittelbar durch ihre Winkel eingetragen werden. Jeder durch den Pol einer Querfläche und den der Symmetrieebene gehende Zonenkreis erscheint als Durchmesser, daher der Pol einer beliebigen Fläche (hkl) am einfachsten gefunden wird mittelst seines Winkels zu (010) und seiner Lage auf dem Durchmesser, welcher durch die zugehörige Querfläche $(h0l)$ bestimmt ist, z. B. 111 auf dem Zonenkreise [010, 101] u. s. f. Die Symmetrie zeigt sich bei dieser Darstellungsart dadurch, dass zu jedem Pol ein zweiter vorhanden ist, welcher auf demselben Durchmesser jenseits 010 in gleichem Abstande sich befindet.

Fig. 505.



Will man die Formen eines monosymmetrischen Krystalls auf eine zu {010} senkrechte Fläche projiciren, wobei die Symmetrieverhältnisse noch übersichtlicher hervortreten, so eignet sich hierzu am meisten die auf der Verticalaxe senkrechte Ebene, in welche also die Normalen aller Prismenflächen fallen, daher deren Pole im Grundkreis gelegen und direct durch ihre Winkel zu (100) oder (010) zu finden sind (s. Fig. 506). Da der Durchmesser 100 : $\bar{1}00$ den Zonenkreis der Querflächen darstellt, deren Pole sämmtlich 90° Abstand von 010 haben, so sind dieselben nach bekannter Construction leicht zu finden; man kann hierzu die Figur selbst benutzen, indem man die Winkel der Querflächen zu (100) von letzterem Pole aus nach links auf dem Grundkreise abträgt und die Endpunkte der entsprechenden Bögen mit dem Pole 010 verbindet. Der Zonenkreis 010, 101, $0\bar{1}0$ enthält die Pole aller vordern Hemipyramiden, deren erster und dritter Index gleich gross sind, also auch 111, welches ausserdem auf dem Zonenkreise 110, 001, $\bar{1}\bar{1}0$ liegt, wodurch sein Ort in der Projection

Fig. 506.



gegeben ist. Ebenso folgt die Lage von $\bar{1}11$ aus den Zonen [010, $\bar{1}01$, $0\bar{1}0$] und [$1\bar{1}0$, 001, $\bar{1}10$], diejenige von $\bar{2}21$ aus den Kreisbögen [$\bar{2}01$, 010] und [001, $\bar{1}10$] u. s. f. Dem Zonenkreise 010 : 001 : $0\bar{1}0$ gehören alle Klinodomen an; unter diesen ist 011 gegeben durch die Zone [100 : 111 : $\bar{1}00$], 021 (= q in Fig. 504) durch die Zone [110, $\bar{1}11$, $\bar{1}\bar{1}0$]. Durch Construction des Zonenkreises 100, 021, $\bar{1}00$ würde man ferner die Pole der Hemipyramiden {121} und {$\bar{1}21$} als Durchschnittspunkte mit den Zonenkreisen [101, 010] und [$\bar{1}01$, 010] finden u. s. f.

An der Hand der eben beschriebenen zweiten Art der Projection sollen nun die wichtigsten Berechnungsmethoden der monosymmetrischen Formen erläutert werden.

Zeigt ein monosymmetrischer Krystall keine anderen Flächen, als die Symmetrieebene und zwei Querflächen, so gestattet diese Combination nur die Bestimmung einer einzigen Grösse unter seinen Elementen, nämlich des Winkels β, wenn man die beiden beobachteten Querflächen als {100} und {001} nimmt, indem alsdann der gemessene Winkel zwischen beiden direct den Werth β darstellt. Tritt hierzu eine dritte Querfläche (s. Fig. 507 a, in welcher die vorherrschende Fläche die Symmetrieebene darstellt), so ist die Berechnung des Axenverhältnisses $a : c$ ermöglicht, indem man dieselbe, je nachdem sie den stumpfen oder den spitzen Winkel der beiden andern Querflächen abstumpft, als {101} oder {$\bar{1}01$} betrachtet. Die Berechnung ist alsdann eine einfache Aufgabe der ebenen Trigonometrie: Seien a, c, r in Fig. 507 b die Durchschnitte der drei Querflächen {001}, {100} und {$\bar{1}01$} mit der Symmetrieebene, so können die Winkel β = (100) : (001) und w = ($\bar{1}01$) : ($\bar{1}00$) gemessen und daraus das Längenverhältniss $c : a$ berechnet werden; liegt eine Abstumpfung der vorderen (stumpfen) Kante (100) : (001) vor, so handelt es sich um die Berechnung des Dreiecks $a\ c\ d$. Will man, z. B. wegen der Vergleichung mit der Krystallform eines anderen Körpers, die drei beobachteten Querflächen als {100}, {101} und {$\bar{1}01$} auffassen, so muss der Winkel β berechnet werden. In Fig. 507 b sind alsdann die Richtungen der drei Geraden d, c und r durch die gemessenen Winkel zwischen denselben, v und w, gegeben und die Richtung a gesucht, welche so liegt, dass r und d gleiche Strecken, vom Schnittpunkte der Axen a und c aus, auf derselben abschneiden. Setzt man

Fig. 507.

$$v' = 180^0 - v, \quad w' = 180^0 - w, \quad \beta' = 180^0 - \beta$$

so ist
$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(w' - \beta)}{\sin w} = \frac{\sin(v' - \beta')}{\sin v}$$

Die Entwickelung dieser Gleichung nach β giebt
$$\text{tang}\ \beta = \frac{2 \sin w \sin v}{\sin(w - v)}$$

Genau ebenso verfährt man, wenn die drei Querflächen als {101}, {001} und {$\bar{1}$01} genommen werden sollen, also die Richtungen *d*, *a*, (*r*) in Fig. 507*b* bekannt sind und die Richtung *c* gesucht wird.

In allen bisher betrachteten Fällen bleibt das Verhältniss der Symmetrieaxe *b* zu den beiden andern Axen unbekannt. Die Bestimmung dieser Grösse erfordert das Auftreten einer prismatischen Gestalt. Werde dieselbe als verticales Prisma {110} betrachtet und sei sie combinirt mit einer Querfläche, welche als Basis {001} genommen werden soll, so ist der halbe vordere Prismenwinkel gleich dem Bogen 100 : 110 (s. Fig. 506, auf folg. S. wiederholt); wurde nun ausserdem der Winkel (110) : (001) gemessen, so findet man in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke 100, 110, 001 den Bogen 100 : 001, d. i. β*), nach der Formel:

$$\cos\beta = \frac{\cos(001:110)}{\cos(100:110)}.$$

In demselben rechtwinkeligen Dreiecke berechne man nun den Winkel *A*, welchen die beiden Bögen 100 : 001 und 110 : 001 einschliessen, mittelst der Gleichung:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang}(100:110)}{\sin\beta}.$$

Denkt man sich die von den Flächen ($\bar{1}$00), (110) und (001) gebildete spitze Ecke des Krystalls (s. Fig. 508), so sieht man sofort ein, dass der der mit *c* bezeichneten Kante (110):($\bar{1}$00) gegenüberliegende ebene Winkel auf (001), d. h. der Winkel zwischen den Kanten 110 : 001 und 001 : $\bar{1}$00, gleich *A* (vergl. auch S. 211) und dass das Axenverhältniss $a : b = \operatorname{tang} A$. Hätte man die gemessene prismatische Form als Klinodoma {011} und die Querfläche als Orthopinakoid {100} genommen, so erhielte man auf demselben Wege das Axenverhältniss $c : b$. In jedem Falle gestattet eine derartige Combination nur die Berechnung zweier Parameter des Krystalls; zu derjenigen des dritten muss mindestens noch eine zweite gegen die Kanten der prismatischen Form geneigte Querfläche vorhanden sein. Stumpft diese die vordere Ecke der Figur 508 ab, so hat man dieselbe als {101} zu nehmen, erscheint sie an der hinteren Ecke (wie z. B. in der Figur 537 des essigsauren Blei), als {$\bar{1}$01}, und findet dann mittelst der oben angegebenen Methode aus dem Winkel derselben zur Basis das

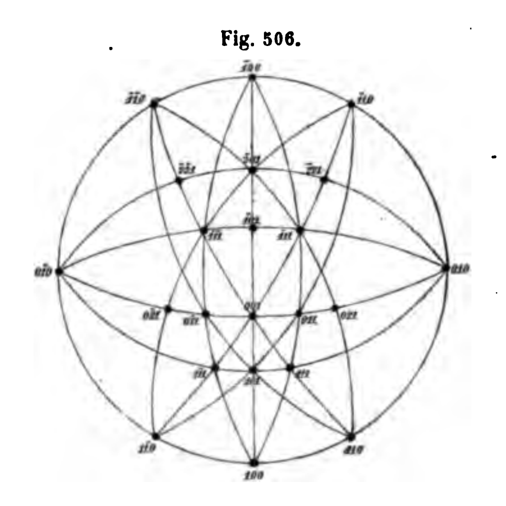
Fig. 508.

*) Ist die vordere Prismenkante durch (100) abgestumpft, und gestattet diese Fläche eine ebenso gute Messung wie (110), so messe man direct (100):(001) $= \beta$, weil ein Beobachtungsfehler in dem Winkel (110):(001) einem grösseren Fehler in dem daraus berechneten β entspricht, und zwar um so mehr, je grösser der Winkel (100):(110). Man kann dann nach obiger Gleichung (001) : (110) aus den beiden andern Winkeln berechnen und als Controlwinkel benutzen, indem man den so gefundenen Werth mit dem beobachteten vergleicht und dadurch einen Maassstab für die Genauigkeit der Fundamentalwerthe erhält.

Parameterverhältniss $a : c$. Will man die Combination als {110}, {101}, {$\bar{1}$01} ansehen, so berechnet man aus den gemessenen Winkeln 100 : 110 und 110 : 101 den Winkel 100 : 101 (falls dieser nicht mit Hülfe einer gut ausgebildeten Fläche (100) direct gemessen werden kann) und findet aus diesem und dem beobachteten Werthe 101 : $\bar{1}$01 durch Subtraction der Summe beider von 180° den Winkel $\bar{1}$01 : $\bar{1}$00. Hiermit sind nunmehr die in Figur 507 *b* mit v und w bezeichneten Winkel gegeben, so dass die Berechnung von β und die des Axenverhältnisses $a : c$, wie früher angegeben, erfolgen kann, während sich $a : b$ aus dem Prismenwinkel in der oben erwähnten Weise ergiebt. Analog wäre das Verfahren, wenn die Combination {001}, {110}, {101}, {$\bar{1}$01} (s. z. B. die Figur 538 der Oxalsäure) vorläge.

Besteht eine monosymmetrische Combination aus zwei prismatischen Formen — wie die des Gypses Fig. 522, an welcher noch die Symmetrieebene erscheint —, so ist die Berechnung am einfachsten, wenn man die eine derselben als {110}, die andere als {011} nimmt. Seien die gemessenen Winkel: (011) : (010) (= dem halben Winkel des Klinodoma), (110) : (010) (= dem halben Prismenwinkel) und (110) : (011), so sind damit in dem sphärischen Dreieck 010, 011, 110 die drei Seiten bekannt; der an 010 anliegende Winkel dieses Dreiecks ist gleich dem Bogen 001 : 100, d. h. $= \beta$; hat man letzteres berechnet, so ist man nach Obigem mit Hülfe der bekannten Bögen 100 : 110 und 001 : 011 im Stande, die Parameterverhältnisse $a : b$, resp. $c : b$ abzuleiten. Den vierten, an einer solchen Combination vorhandenen Winkel (011) : ($\bar{1}$10) findet man nunmehr mittelst des Dreiecks 010, 011, $\bar{1}$10, dessen Seiten 010 : 011 und 010 : $\bar{1}$10 nebst dem dazwischen liegenden Winkel (= 180° — β) bekannt sind; derselbe dient als Controlwinkel (ebenso hätte man ihn natürlich auch statt 011 : 110 zur Rechnung und letzteren Winkel zur Controle benutzen können).

Fig. 506.



Will man die eben betrachtete Combination als {110}, {111} auffassen, wie es bei der Fig. 522 des Gypses geschehen ist, so kennt man in dem sphärischen Dreiecke 010, 111, 110 die drei Seiten, kann also den Winkel zwischen den Zonenkreisen [010 : 111] und [010 : 110], sowie denjenigen zwischen [110 : 111] und [110 : 010] berechnen. Das Supplement des letzteren ist der Winkel, unter dem die Bögen 110 : 111 und 110 : 100 einander schneiden, d. h. ein Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks 110,

100, 001, in welchem ausserdem die Seite 110 : 100 bekannt ist; hieraus findet man 100 : 001 = β. Der vorher ebenfalls berechnete Winkel zwischen den Zonenkreisen 010 : 111 und 010 : 110 ist gleich dem Winkel (101): (100), welcher, da nunmehr β bekannt ist, das Parameterverhältniss $a : c$ ergiebt, während $a : b$ aus dem Prismenwinkel und der Axenschiefe in bekannter Weise hergeleitet werden kann.

Eine Vereinfachung der Messung und Berechnung eines Krystalls, welcher die Combination eines Prismas mit einer Hemipyramide zeigt, tritt dann ein, wenn die mit beiden in eine Zone fallende Querfläche (d. i. die Basis, wenn erstere Formen als {110} und {111} oder {$\bar{1}$11} betrachtet werden), ausgebildet ist. Einen derartigen Fall stellt die Fig. 533 der Hornblende dar. Alsdann genügt nämlich die Messung zweier Zonen: der prismatischen und derjenigen zwischen Prisma und Basis. In dem in Fig. 533 dargestellten Beispiele sind alsdann folgende Winkel durch Messung gegeben: (110):(010), (110):(001), (001):($\bar{1}$11). Aus den beiden ersteren werden nach der S. 484 angegebenen Methode $a : b$ und β berechnet; der Winkel zwischen den Bögen 001 : $\bar{1}$11 und 001 : $\bar{1}$01 ist gleich demjenigen zwischen 001 : 110 und 001 : 100, d. h. $= A$, wenn tang $A = a : b$; mit Hülfe dieses Winkels und des gemessenen Bogens 001 : $\bar{1}$11 können also in dem rechtwinkeligen Dreiecke 001, $\bar{1}$01, $\bar{1}$11 sowohl die Seite 001 : $\bar{1}$01, aus welcher sich das Axenverhältniss $a : c$ ergiebt, als auch die Seite $\bar{1}$01 : $\bar{1}$11 berechnet werden, deren doppelter Werth gleich dem Controlwinkel $\bar{1}$11 : $\bar{1}\bar{1}$1 ist.

Es erübrigt nur noch der S. 475 erwähnte Fall der Berechnung des Axenverhältnisses eines monosymmetrischen Krystalls aus den Winkeln der Axenebenen und denen der Grundform gegen zwei derselben. Es sei ausser β, d. i. (100):(001), gemessen (111):(100) und (111):(010); alsdann sind in dem Dreieck 100, 010, 111, dessen eine Seite $= 90^0$, aus den drei Seiten die beiden Winkel an 010 und 100 zu berechnen; der erstere ist gleich 100 : 101, giebt also mit Hülfe von β das Axenverhältniss $a : c$; der andere ist, wie leicht einzusehen (vergl. S. 211), das Supplement des ebenen Winkels zwischen den Kanten 100 : 010 und 100 : 111, d. h. seine cotang ist $= c : b$.

§. 101. **Die physikalischen Eigenschaften der monosymmetrischen Krystalle.** Die directen Messungen des Elasticitätscoëfficienten nach verschiedenen Richtungen, welche bisher an Krystallen dieses Systems angestellt worden sind (s. Gyps und Glimmer unter den Beispielen), zeigen, dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie entsprechend, Symmetrie dieser Verhältnisse nach dem Klinopinakoid und nach keiner andern Ebene. Das Gleiche ist der Fall in Bezug auf Cohäsion und Härte. Was die erstere betrifft, so hat dieselbe am häufigsten, wie schon §. 97 bemerkt, ein Minimum in der Richtung der Symmetrieaxe. es sind also zahlreiche monosymmetrische Krystalle spaltbar nach der Symmetrieebene, und zwar gehören hierher viele Fälle der vollkommensten Spaltbarkeit (Gyps). Ziemlich häufig ist eine solche nach einer Querfläche; alsdann liegt das

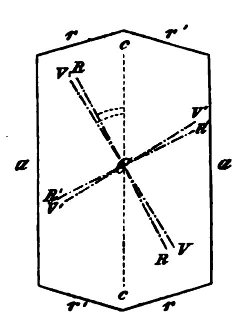
nimum der Cohäsion in der Symmetrieebene; giebt es in dieser noch eine
eite Minimalrichtung, so findet nach einer zweiten, krystallonomisch
glichen Querfläche Spaltbarkeit statt: da aber in der Symmetrieebene
ine gleichwerthigen Richtungen existiren, so sind jene beiden Minimal-
htungen auch keine solchen, d. h. die Spaltbarkeit nach den beiden da-
normalen Ebenen ist nicht gleich vollkommen. Existirt endlich ein Mi-
mum der Cohäsion nach einer Richtung, welche einen schiefen Winkel
t der Symmetrieebene bildet, so fordert das Grundgesetz der physikali-
hen Krystallographie ein genau gleichwerthiges Minimum in der zu jener
mmetrischen Richtung; in diesem Falle ist der Krystall spaltbar nach
ner prismatischen Form, und zwar nach beiden Flächenpaaren derselben
gleicher Vollkommenheit. Dieser Symmetrie entsprechen nun vollkommen
e Verschiedenheiten der Härte nach verschiedenen Richtungen, für welche
nauere Bestimmungen namentlich in dem bereits mehrfach citirten Werke
n Exner enthalten sind; sie betreffen folgende Körper: Gyps, rothes
utlaugensalz, das analog zusammengesetzte Cobaltidcyankalium und Rohr-
cker. Bei allen diesen hat sich ergeben, dass in der Symmetrieebene
eichwerthige Richtungen nicht existiren, so dass die auf {010} erhaltene
rtecurve nach keiner Richtung in symmetrische Hälften zerfällt. Unter-
cht man dagegen die Härte auf einer Querfläche, so zeigt sich dieselbe
eich jedesmal in zwei Richtungen, welche gleichen Winkel mit der Sym-
etrieebene einschliessen, d. h. die Härtecurve ist symmetrisch zu zwei auf
ander normalen Richtungen, die eine parallel der Symmetrieaxe, die an-
re der Symmetrieebene, in diesen beiden aber ungleich. Hieraus ersieht
n also, dass die Cohäsion sich nur nach der geometrischen Symmetrie-
ene symmetrisch ändert mit der Richtung im Krystall.

Gehen wir nunmehr über zu den optischen Eigenschaften der mono-
mmetrischen Krystalle, so folgen dieselben unmittelbar aus dem in §. 97
wiesenen Umstande, dass eine Hauptschwingungsrichtung für alle Farben
sammenfällt mit der Symmetrieaxe, die beiden anderen, dispergirt für die
rschiedenen Farben, in der Symmetrieebene liegen. Da die Lage der letz-
en jedoch im Uebrigen eine gesetzmässige Beziehung zu der Krystallform
cht besitzt*), so ist zur Bestimmung der optischen Constanten für eine ge-
sse Farbe die Messung des Winkels nöthig, welchen eine optische Elasti-

*) Eine gewisse Abhängigkeit ihrer Lage von der Cohäsion scheint zu existiren, da
ter den Krystallen, welche eine vollkommene Spaltbarkeit nach einer Querfläche be-
zen, auffallend viele vorkommen, deren optische Elasticitätsaxen nahe parallel und
krecht zur Spaltungsebene liegen; namentlich ist es sehr häufig, dass die erste Mittel-
ie der optischen Axen fast genau senkrecht auf der Spaltungsfläche steht (das auffälligste
ispiel dieses Verhaltens ist der Glimmer, das unter allen Substanzen am vollkommen-
n spaltbare Mineral, dessen Mittellinie so wenig von der Normalen zur Spaltungs-
che verschieden ist, dass die Abweichung lange unbemerkt geblieben und der Glimmer,
tz seiner monosymmetrischen Form, zu den rhombischen Substanzen gezählt wor-
n ist).

citätsaxe oder Hauptschwingungsrichtung für dieselbe Farbe bildet mit irgend einer ebenfalls in der Symmetrieebene liegenden Kante. Hierzu nimmt man gewöhnlich die zur Verticalaxe c gewählte Kante. Kennt man den Winkel einer Hauptschwingungsrichtung mit dieser, so ist auch die Richtung der zweiten in der Symmetrieebene liegenden Elasticitätsaxe gegeben, denn sie ist normal zur ersten; die dritte aber ist zu beiden senkrecht und parallel der Symmetrieaxe; durch die Bestimmung jenes Winkels ist somit die Richtung aller drei optischen Elasticitätsaxen für die betreffende Farbe krystallographisch bestimmt. Betrachten wir einen nach der Symmetrieebene tafelförmigen Krystall im parallelen polarisirten Lichte, so durchsetzen ihn die Strahlen in der Symmetrieaxe, also sind ihre Schwingungsrichtungen beim Austritt genau die beiden der Ebene {010} parallelen Hauptschwingungsrichtungen; beim Drehen wird die Platte also jedesmal dunkel werden (vier mal bei einer ganzen Drehung), wenn diese beiden Richtungen den Polarisationsebenen der gekreuzten Nicols parallel sind. Denken wir uns z. B. einen solchen Krystall (in Fig. 509 auf die Symmetrieebene projicirt dargestellt), welcher ausser von {010} noch von drei Querflächen a, r, r' begrenzt ist, wobei, wie es zuweilen vorkommt, r und r' nahe symmetrisch zu a liegen (Winkel $a:r$ nahe gleich $a:r'$), so steht dieser Krystall einem rhombischen in geometrischer Beziehung sehr nahe, ja er kann sogar durch eine Temperaturänderung vorübergehend genau die Gestalt eines solchen annehmen, da die Winkel $a:r$ und $a:r'$ eine ungleiche Aenderung durch die Wärme erfahren. Von einem wirklichen rhombischen Krystall können wir einen solchen nun sofort dadurch unterscheiden*), dass bei jenem die beiden der Tafelebene parallelen Hauptschwingungsrichtungen genau parallel und normal zur Fläche a, und zwar identisch für alle Farben, bei einem in Wahrheit monosymmetrischen Krystall dagegen schief gegen die Fläche a liegen und für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen (RR in Fig. 509 sei z. B. die eine Hauptschwingungsrichtung für Roth, $R'R'$ die andere; VV und $V'V'$ die entsprechenden für Violett). Meist ist der Winkel der Dispersion (zwischen RR und VV) nur klein, selten über 2^0.

Fig. 509.



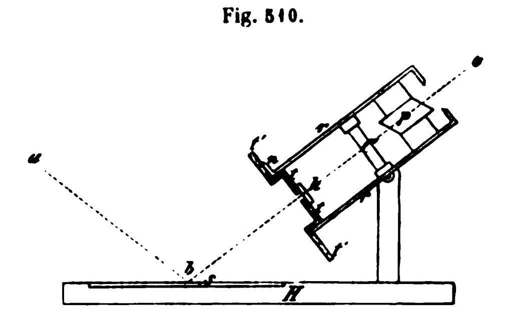
Stellt man einen rhombischen Krystall so auf dem Polarisationsinstrument (für paralleles Licht) ein, dass die Verticalaxe cc Fig. 509 genau einem der gekreuzten Nicols parallel ist, so erscheint er sowohl im weissen, wie im monochromatischen Lichte vollkommen dunkel. Nicht so der monosym-

*) Falls dies nicht etwa schon durch eine Spaltbarkeit, entweder nach r oder nach r' allein, möglich ist, welche natürlich eine Ungleichwerthigkeit dieser beiden Querflächen beweisen würde.

metrische Krystall, welchen die genannte Figur eigentlich darstellt; bei diesem bedarf es einer Drehung um den Winkel *RCc* bei Beleuchtung mit rothem Licht, einer solchen um den Winkel *VCc* bei Beleuchtung mit violettem einfarbigen Lichte, um ihn dunkel erscheinen zu lassen. Ist der drehbare Krystallträger des Instrumentes mit einer Kreistheilung versehen, so kann man jene Drehung messen und kennt dadurch den Winkel, welcher nach Obigem genügt, um die Lage aller drei Elasticitätsaxen, einmal für Roth, das andere Mal für Violett, zu bestimmen. Da jedoch das Eintreten der Dunkelheit bei einem doppeltbrechenden Krystall während des Drehens allmählig geschieht, so ist die Einstellung auf das Maximum derselben nur angenähert, im günstigsten Falle auf 2—3° genau, möglich; man wird auf diese Weise allerdings in allen Fällen, wo nicht etwa zufällig der Winkel *RCc* kleiner als 2—3° ist, den monosymmetrischen Krystall durch das Vorhandensein der Schiefe der Auslöschungsrichtung gegen die Verticalaxe von einem rhombischen unterscheiden können, aber doch nur eine sehr ungenaue Bestimmung der Richtung der Elasticitätsaxen erhalten, meistens auch nicht bestimmen können, in welcher Weise dieselben für die verschiedenen Farben dispergirt sind, da deren Differenzen gewöhnlich weniger betragen, als der mögliche Fehler der Messung.

Um nun den Winkel, welchen eine Auslöschungsrichtung mit einer Krystallkante bildet, genauer zu bestimmen, bedient man sich eines besonderen, von v. Kobell erfundenen Instrumentes, des Stauroskops. Dasselbe ist ein Polarisationsapparat für paralleles Licht, wie er Fig. 50 S. 68 abgebildet ist, dessen Krystallträger durch eine undurchsichtige drehbare Metallplatte ersetzt ist, welche in der Mitte eine kleine kreisrunde Oeffnung hat. Auf dieser Platte ist eine Anzahl paralleler Geraden so eingeritzt, dass ihre Richtung genau parallel ist der Polarisationsrichtung des unteren Nicols, wenn die Kreistheilung am Rande dieser Metallscheibe auf 0° steht. An dem ursprünglichen Kobell'schen Instrument, Fig. 510 im Durchschnitt dargestellt, ist der Polarisator durch einen horizontalen Spiegel *s* von schwarzem Glase ersetzt, welcher das vom Himmel in der Richtung *ab* auffallende Licht, ziemlich vollkommen polarisirt, nach *o* hin reflectirt. Auf der Holzplatte *H*, in welche dieser Spiegel eingelassen ist, steht auf einem Fusse drehbar das Rohr *r*, welches vorn einen kleinen Nonius *n* trägt; in das vordere Ende dieses Rohres kann der Krystallträger *t*, welcher am Rande *t'* an der dem Auge (*o*) zugekehrten Seite eine Kreistheilung besitzt, eingesteckt und darin gedreht werden. Der mit *t*

Fig. 510.



bezeichnete vorspringende Theil desselben ist die oben bezeichnete, in der Mitte durchbohrte Metallplatte mit den eingerissenen Linien. Vor dem Einstecken wird nun der zu untersuchende Krystall *k* auf derselben so aufgeklebt, dass er mit seiner Symmetrieebene die Oeffnung ganz bedeckt und dass seine Verticalaxe (in Fig. 509 also die Kante der Querfläche *a* mit {010}, d. h. *cc*) den eingeritzten Linien so genau als möglich parallel ist. Im Innern des Rohres ist ferner eine senkrecht zur Axe geschnittene Kalkspathplatte *C* befestigt, und am Ende der analysirende Nicol *p*. Stellt man nun den drehbaren Krystallträger *t* so, dass der Nonius *n* auf demselben 0^0 anzeigt, so ist die Verticalaxe *cc* des Krystalls parallel der Schwingungsrichtung des oberen Nicols, also normal zu der des eintretenden Lichtes. Wäre nun *cc* zugleich eine Hauptschwingungsrichtung des Krystalls, also auch deren Normale eine solche, d. h. wäre der Krystall rhombisch, so könnten die eintretenden Strahlen eine weitere Zerlegung nicht erleiden, sondern würden nach dem Durchgang durch den Krystall noch dieselbe Polarisation besitzen, wie beim Eintritt; sie gehen dann durch den Kalkspath und endlich durch den Analysator; da nicht nur parallele, sondern auch etwas geneigte Strahlen durch das Instrument gelangen, so würde man von der Interferenzfigur des Kalkspathes den mittleren Theil, das schwarze Kreuz und die innersten Farbenringe, erblicken, ebenso, als wenn gar kein Krystall auf dem Träger *t* befestigt wäre. Nun ist aber der Krystall monosymmetrisch, d. h. die Schwingungsrichtungen desselben bilden einen mehr oder weniger grossen Winkel mit der Richtung *cc*; folglich erleidet das eintretende Licht eine Zerlegung im Krystall. Von den beiden entstehenden, senkrecht zu einander polarisirten Strahlen geht jedesmal nur ein Antheil durch den oberen Nicol; dieser Antheil würde, wenn er allein im eintretenden Lichte vorhanden wäre, im Kalkspath das complementäre Interferenzbild mit hellem Kreuz erzeugen; der im oberen Nicol vernichtete Antheil für sich allein dasjenige mit schwarzem Kreuz; es kann also ebenso wenig, als wenn der Kalkspath durch gewöhnliches Licht erleuchtet worden wäre (vergl. S. 67), ein Interferenzbild entstehen. Drehen wir aber nun den Krystallträger mit dem Krystall, so wird es eine Stellung geben, bei der das schwarze Kreuz mit den Farbenringen wieder sichtbar wird (daher der Name »Stauroskop«); dies ist offenbar diejenige, in welcher eine Schwingungsrichtung des Krystalls parallel der Schwingungsrichtung des eintretenden Lichtes; der Winkel, um welchen man gedreht hat, ist demnach die gesuchte Schiefe der Auslöschungsrichtung gegen die Verticalaxe *cc*, falls man nach rechts gedreht hatte, im entgegengesetzten Falle das Complement des zu bestimmenden Winkels. Die Einstellung auf den Punkt, an welchem das Interferenzbild der Kalkspathplatte am deutlichsten erscheint, ist genauer auszuführen, als diejenige auf die grösste Dunkelheit des Krystalls, namentlich, wenn man das Instrument mit monochromatischem Lichte beleuchtet, und man wird, wenn die Dispersion eine ziemlich grosse ist, hierdurch auch constatiren können, dass die Hauptschwingungs-

richtungen für die verschiedenen Farben divergiren. Eine grössere Genauigkeit, als etwa bis auf 1°, ist indess auch hierbei nicht zu erzielen, und es ist daher von Březina (s. Schrauf, Physikal. Mineralogie, II, S. 220) statt der einfachen Kalkspathplatte eine Doppelplatte angewendet worden, welche aus zwei ein wenig schief gegen die Basis geschliffenen Kalkspathlamellen besteht, welche so auf einander gelegt werden, dass die optischen Axen beider in einer Ebene, aber nach entgegengesetzter Seite geneigt sind. Diese Combination zeigt zwischen gekreuzten Nicols das Interferenzbild Fig. 511, sobald die Ebene, in welcher die optischen Axen der beiden Kalkspathe liegen, der Schwingungsebene eines Nicols parallel ist; wird nun die Polarisation des eintretenden Lichtes nur wenig geändert, wird z. B. ein eingefügter stauroskopisch zu untersuchender Krystall, welcher diejenige Stellung hat, dass eine Schwingungsrichtung desselben parallel der eines Nicols, um einen sehr kleinen Winkel gedreht, so bewegt sich der Mittelbalken aus seiner verticalen Stellung, und das Bild erscheint wie Fig. 512. Die Stellung des drehbaren Krystalls, in welcher seine Schwingungsrichtung die erforderliche Orientirung hat, in welcher also der Mittelbalken genau so erscheint, wie in Fig. 511, lässt sich namentlich dann mit grosser Schärfe ermitteln, wenn man zweimal die Kreistheilung des Krystallträgers abliest, einmal, wenn der dunkle Mittelbalken ein wenig links, einmal wenn er ebenso viel nach rechts gedreht erscheint, und das Mittel beider Ablesungen als Normalstellung annimmt.

Fig. 511.

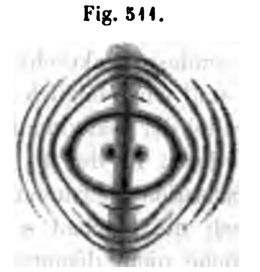


Fig. 512.

Mit Hülfe dieser Doppelplatte*) kann man mit dem Stauroskop die Lage der Hauptschwingungsrichtung bis auf wenige Minuten genau bestimmen, wobei man sich selbstverständlich des einfarbigen Lichtes bedienen muss. Dabei hat man jedoch noch einen Fehler in Rücksicht zu ziehen, welcher dadurch hervorgebracht wird, dass man die als Ausgangsrichtung dienende Kante des Krystalls nach dem Augenmaass nicht genau parallel den auf dem Krystallträger eingeritzten Linien machen kann, wenn man den Krystall auf diesen aufklebt. Aber nur, wenn dieser Parallelismus vollkommen erreicht ist, wird die Drehung von der Nullstellung bis zu der, bei welcher das Interferenzbild in der richtigen Weise auftritt, genau gleich dem Winkel zwischen der Schwingungsrichtung und der Verticalaxe des Krystalls sein. Wir werden in der III. Abth. eine Methode kennen lernen, durch

*) Andere Vorrichtungen zur genauen Einstellung der Schwingungsrichtungen werden in der III. Abth. Erwähnung finden.

welche auch dieser Fehler vermieden wird, und es demnach möglich ist, die Lage der optischen Elasticitätsaxen in einem Krystall mit grosser Genauigkeit zu bestimmen.

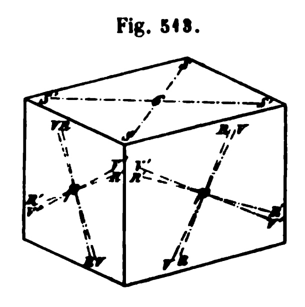
Während nach dem Bisherigen die monosymmetrischen Krystalle, im parallelen Lichte durch die Symmetrieebene betrachtet, Auslöschungsrichtungen zeigen, welche in keiner gesetzmässigen Beziehung zu den Krystallkanten stehen, verhalten sie sich anders, wenn wir sie durch eine Querfläche betrachten. Alsdann pflanzen sich die parallelen Strahlen in denselben in einer Richtung fort, welche der krystallographischen Symmetrieebene, also einem optischen Hauptschnitte, parallel ist; von den beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen muss somit der eine in dem Hauptschnitte, der andere senkrecht dazu schwingen, und dies gilt für alle Farben; der Krystall wird folglich jedesmal dunkel erscheinen, wenn seine Symmetrieaxe parallel der Schwingungsrichtung des einen der beiden gekreuzten Nicols ist. Werde z. B. der in Fig. 504 abgebildete Krystall so auf den Träger des Polarisationsinstrumentes mit parallelem Licht gebracht, dass die Strahlen durch die Flächen *a* hindurchgehen, so sind die Schwingungsrichtungen (welche nicht dispergirt sind, sondern für alle Farben zusammenfallen) für diese Flächen parallel den Kanten $a:p$ und $a:c$, die des Flächenpaares c parallel $c:q$ und $c:a$ u. s. w. auf allen Querflächen.

Betrachten wir endlich ein Flächenpaar, welches einer prismatischen Form angehört, z. B. p (110) mit seiner hinteren Gegenfläche ($\bar{1}\bar{1}0$) desselben Krystalls, so haben wir es beim Durchgange des Lichtes durch eine solche Platte mit Strahlen zu thun, welche schräg gegen die optischen Hauptschnitte gerichtet sind und deren Schwingungsrichtung daher nach der S. 105 gegebenen Regel bestimmt werden kann. Die Schiefe der Schwingungsrichtung einer solchen Fläche, z. B. p, gegen die Kanten derselben, wird somit verschieden sein je nach dem Winkel, welchen die Fläche mit der Symmetrieebene bildet, und es lässt sich für jede prismatische Zone eines Krystalles, dessen optischer Axenwinkel bekannt ist, herleiten, in welcher Weise die Auslöschungsschiefe sich ändert, wenn man sich die prismatische Fläche gedreht denkt aus der Lage der Symmetrieebene, in welcher die Auslöschungsschiefe den durch das Stauroskop bestimmten Werth besitzt, bis zu der 90° gegen letztere geneigten, zugehörigen Querfläche, wo die Auslöschungsschiefe Null wird. Je nach Lage der Zone zu den optischen Axen und je nach der Orientirung der letzteren ist die Auslöschungschiefe ein Maximum in der Symmetrieebene und nimmt stetig ab, je mehr man sich der Querfläche nähert, oder sie nimmt anfangs zu bis zu einem Maximum, dann erst ab und erreicht endlich den Werth Null in der Querfläche. Für die wichtigsten Zonen der am häufigsten in Gesteinen vorkommenden Mineralien hat Michel-Lévy diese Aenderungen berechnet und durch Curven dargestellt (s. Zeitschr. für Kryst. 3,217).

Da die optischen Axen für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen, so sind die Schwingungsrichtungen für eine Platte, welche von einem

Paare paralleler prismatischer Flächen gebildet wird, für die verschiedenen Farben ebenfalls dispergirt, aber um so weniger, je mehr sich ihre Schwingungsrichtung dem Parallelismus mit der Zonenaxe nähert. Da ferner die optischen Axen stets symmetrisch zum Klinopinakoid liegen, so ergiebt sich die Auslöschungsschiefe und die Dispersion derselben für zwei einer prismatischen Form angehörige Flächenpaare wegen deren symmetrischer Lage nothwendigerweise genau gleich und entgegengesetzt. Liege z. B. die Combination Fig. 513 vor, welche einem Rhomboëder gleicht (unter Umständen kann die Differenz der Winkel $c:p$ und $p:p$ einmal so gering sein, dass sie durch Messung nicht zu constatiren), und wollen wir die Querfläche c zur Basis, p zum verticalen Prisma nehmen, so ist die Deutung des Krystalls nur dann richtig, wenn auf jener Querfläche die Schwingungsrichtungen, SS und $S'S'$, keine Dispersion zeigen und genau den Diagonalen parallel sind, wenn sie dagegen auf jeder der Prismenflächen unsymmetrisch liegen und verschieden für Roth (RR und $R'R'$) und Violett (VV und $V'V'$), wobei aber ihre Lage und Dispersion auf beiden genau gleich und entgegengesetzt ist, wie es aus Fig. 513 ersichtlich. Zeigt ein derartiger Krystall dieses Verhalten, wenn man ihn nach allen drei Paaren paralleler Flächen im Stauroskop untersucht, so ist damit sein monosymmetrischer Charakter, sowie die Lage seiner geometrischen Symmetrieebene ohne Krystallmessung ganz unzweifelhaft dargethan. Dieses Verhalten lässt auch ein monosymmetrisches Prisma ohne Endflächen als solches erkennen und zugleich bestimmen, welche der Halbirungsebenen desselben der Symmetrieebene entspricht.

Fig. 513.

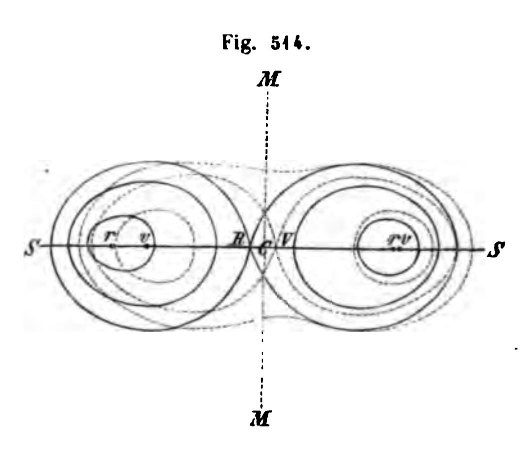


Nachdem so das Verhalten der monosymmetrischen Krystalle im parallelen polarisirten Licht für alle Fälle allgemein erkannt ist, können wir zu demjenigen in convergentem Licht übergehen, wobei es sich wesentlich nur um die Erscheinungen handelt, welche eine senkrecht zur ersten Mittellinie geschnittene Platte zeigt. Diese sind nun verschieden, je nach der Lage der optischen Axenebene, welche nach §. 97 entweder parallel der geometrischen Symmetrieebene, oder senkrecht dazu sein kann.

Sind die beiden in der Symmetrieebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen die Axen der grössten und kleinsten Elasticität, d. h. ist {010} die optische Axenebene, so hat man nach Ermittelung jener Richtungen durch das Stauroskop senkrecht zu beiden (zugleich normal zur Symmetrieebene) Querflächen anzuschleifen; diejenige der beiden Platten, welche senkrecht zur Halbirenden des spitzen Axenwinkels geschliffen ist, wird alsdann im Polarisationsapparat beide Axen in der Symmetrieebene liegend zeigen. Da aber die Mittellinien für die verschiedenen Farben dispergirt sind, fällt die Normale der Platte mit der Mittellinie nur für eine bestimmte Farbe

des Lichtes zusammen. Sei der Punkt im Gesichtsfelde des Polarisationsinstrumentes, wo die normal die Platte durchsetzenden Strahlen sich vereinigen, also der Mittelpunkt desselben, C Fig. 514, und mag deren Richtung der ersten Mittellinie für eine mittlere Farbe entsprechen, so ist die der Mittellinie für Roth nach der einen Seite, der für Violett nach der anderen geneigt, alle aber liegen in der Symmetrieebene, welche durch die Gerade SS angedeutet ist. Sei nun R der Punkt im Gesichtsfelde, wo sich alle Strahlen vereinigen, welche parallel der ersten Mittellinie für Roth durch die Krystallplatte gingen, und rr die beiden Axenpunkte für dieselbe Farbe, so stellen die ausgezogenen Lemniscaten diejenigen vor, welche auftreten, wenn das Instrument mit Licht von dieser Farbe erleuchtet wird. Ist V der Vereinigungspunkt der Strahlen, welche parallel der ersten Mittellinie für Violett durch den Krystall gingen, sind vv die Axenpunkte derselben Farbe, deren Axenwinkel natürlich ein anderer (in der Figur ist $\varrho > v$ angenommen), so sind die punktirten Lemniscaten diejenigen, welche im homogenen violetten Lichte erscheinen. Beobachtet man nun das Interferenzbild im weissen Licht, so geht aus Fig. 514 unmittelbar hervor, dass dasselbe zwar symmetrisch nach der Geraden SS, also oben und unten gleich sein muss, in keinem Falle aber nach der Geraden MM. Während das Axenbild einer rhombischen Krystallplatte (vergl. Fig. 78, S. 111) auch rechts und links symmetrisch ist, hört durch die Dispersion der Mittellinien hier die letztere Gleichheit auf, die Curven sind rechts und links in verschiedener Weise übereinander geschoben, es kann also die Farbenvertheilung in den Ringen rechts und links nicht gleich sein; in Folge dessen werden die Ringe beider Systeme verschieden gross und verschieden lebhaft gefärbt erscheinen, und die Reihenfolge der Farben in beiden eine andere sein; alles dies um so mehr abweichend, je grösser die Dispersion der Mittellinien ist. Wird der Krystall so gedreht, dass seine Symmetrieebene der Schwingungsrichtung eines der beiden Nicol'schen Prismen parallel ist, so erscheint der schwarze, der optischen Axenebene parallele Balken $\parallel SS$, wie bei einem rhombischen Krystall, ohne Farbensäume, da die optischen Axenebenen für alle Farben untereinander und mit der Symmetrieebene zusammenfallen. Die Interferenzerscheinung, welche eine Platte von Gyps bei dieser Stellung darbietet, ist in Fig. 6 der Tafel abgebildet, und ist hier der, namentlich für die innersten Farbenringe hervortretende Unterschied der beiden Systeme deutlich zu erkennen. Dreht man

Fig. 514.



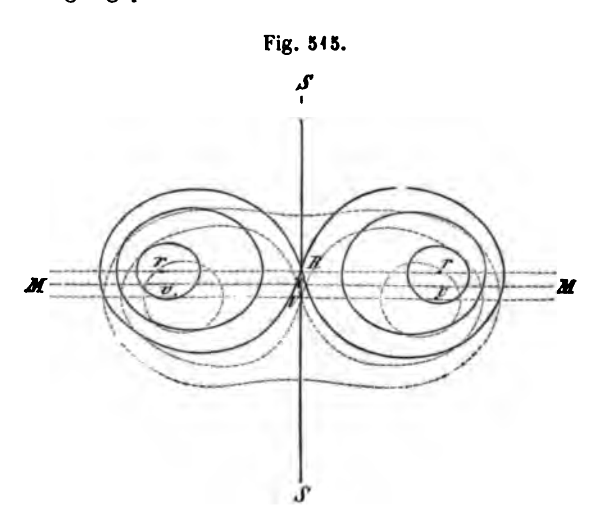
die Platte um 45°, so dass die dunklen Hyperbeln erscheinen, so tritt die Verschiedenheit noch mehr hervor; denn da wegen der Dispersion der Mittellinien die Punkte *r* und *v* (Fig. 514) rechts und links verschiedenen Abstand besitzen, so müssen die Farbensäume, welche die dunklen Hyperbeln zu beiden Seiten zeigen und die bekanntlich innerhalb des ersten Ringes am deutlichsten sind, bei beiden Hyperbeln von verschiedener Breite und verschiedener Lebhaftigkeit sein. Ist die Dispersion der Mittellinien gross und ebenso auch diejenige der Axen, d. h. ist der Axenwinkel sehr verschieden für Roth und Violett, welcher Fall in Fig. 514 realisirt ist, so liegt auf der einen Seite der Axenpunkt *r* für Roth innen, der für Violett *v* aussen, auf der andern Seite *r* aussen, *v* innen; da ferner die Abstände beider rechts und links sehr verschieden sind, so würde die linke Hyperbel innen roth, aussen blau, und zwar sehr breit, gesäumt erscheinen, während die rechte nur schmale Farbensäume, und zwar innen blau und aussen roth, zeigen würde. Wäre die Dispersion der Mittellinien etwas geringer, so würden die Axenpunkte für die verschiedenen Farben auf einer Seite fast ganz zusammenfallen; alsdann würde man in dem Interferenzbild statt zweier entgegengesetzt gefärbter Hyperbeln eine mit deutlichem Farbensaume und die andere ohne solchen erblicken. Bei einer kleineren Dispersion jedoch, wie sie häufiger vorkommt, ist zwar der Abstand von *r* und *v* rechts und links verschieden, diese liegen aber nicht umgekehrt, sondern entweder beide *v* aussen, oder beide nach innen. Alsdann erscheinen beide Hyperbeln nach aussen roth, nach innen blau gesäumt, oder umgekehrt, — aber mit verschiedener Farbennuance und verschiedener Lebhaftigkeit der Färbung. Diesen letzteren Fall stellt Fig. 7 der Tafel dar, welche sich auf dieselbe Gypsplatte wie Fig. 6 bezieht, nach einer Drehung von 45°. Man achte hierbei ausser auf die Verschiedenheit der beiden Hyperbelsäume, namentlich auf diejenige der inneren Seite des ersten Ringes rechts und links. Diese Art der Dispersion der Farben des Axenbildes wird, weil sie durch eine ungleiche Neigung der Hauptschwingungsrichtungen innerhalb der Symmetrieebene erzeugt wird, die geneigte Dispersion (»dispersion inclinée« Des Cloizeaux's) genannt.

Ist dagegen die optische Axenebene senkrecht zur geometrischen Symmetrieebene, so sind die Interferenzerscheinungen einer senkrecht zur Mittellinie geschliffenen Platte verschieden, je nachdem diese Mittellinie in der Symmetrieebene liegt oder zu derselben normal ist.

Im ersteren Falle, wo eine der beiden in der Symmetrieebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen den spitzen Winkel der Axen halbirt, ist die zu jener normale Fläche, nach welcher die Krystallplatte geschliffen werden muss, demnach wiederum eine Querfläche, senkrecht zur Symmetrieebene, also parallel der Symmetrieaxe, d. i. der zweiten Mittellinie. Da die Hauptschwingungsrichtungen in {010} dispergirt sind, so ist die Platte senkrecht zu einer solchen für mittlere Farben zu schleifen. Sei nun

Fig. 515 *C* wieder Mittelpunkt des Gesichtsfeldes im Apparat, d. h. der Vereinigungspunkt aller Strahlen, welche senkrecht durch die Krystallplatte hindurchgehen, so ist deren Richtung gleich der Mittellinie nur für eine mittlere Wellenlänge; diejenigen für andere Farben liegen anders geneigt in der Symmetrieebene, welche durch die Gerade *SS* gehen soll. Sei nun *R* der Punkt, in welchem sich alle Strahlen vereinigen, die im Krystall parallel der Mittellinie für Roth laufen, und *r r* die Axenpunkte für dieselbe Farbe, so muss die Verbindungslinie *r r* normal zu *S S* und von dieser halbirt sein, da *M M* als Symmetrieaxe die Richtung der zweiten Mittellinie vorstellt. Für Violett muss der Punkt, in welchem sich die der Mittellinie parallelen Strahlen kreuzen, jenseits *C*, also etwa in *V* liegen, und die Axenpunkte *v v* ebenfalls rechts und links symmetrisch zu *S S*, aber in anderem Abstande, da der Axenwinkel für diese Farbe ein anderer als für Roth. Die optischen Axen für Roth und Violett liegen also in zwei verschiedenen Ebenen, die der übrigen Farben in zwischenliegenden; alle diese Ebenen schneiden sich jedoch in der Symmetrieaxe, der allen gemeinschaftlichen zweiten Mittellinie. Es ist nun leicht aus Fig. 515 zu ersehen, wie die Interferenzfigur im weissen Licht aussehen muss; dieselbe wird vollkommen symmetrisch sein in Bezug auf die Gerade *S S*, indem die rechte und linke Seite ganz gleiche und entgegengesetzte Farbenvertheilung besitzen wird. Nicht so die obere und untere Hälfte, da die Ringe für die verschiedenen Farben nicht gleichmässig zu beiden Seiten von *MM* liegen; die Farbenringe werden somit an ihrer oberen und unteren Seite verschiedene Farben zeigen. Sind die optischen Axenebenen des Krystalls parallel einem der beiden gekreuzten Nicols des Apparates, so wird sich die Verschiedenheit derselben für die verschiedenen Farben am deutlichsten documentiren an dem dunklen Mittelbalken, welcher die Lage der Axenebene angiebt und nun, da diese nicht dieselbe ist für alle Farben, oben und unten einen farbigen Saum zeigt, entweder, wie in dem in Fig. 515 dargestellten Falle, oben blau (weil daselbst der schwarze Balken für rothes Licht gelegen ist) und unten roth, oder umgekehrt. Dieser farbige Saum bei der erwähnten Stellung des Krystalls ist das empfindlichste Mittel, um diese Dispersion zu erkennen, welche man, weil bei derselben die Farbenvertheilung auf den verschiedenen

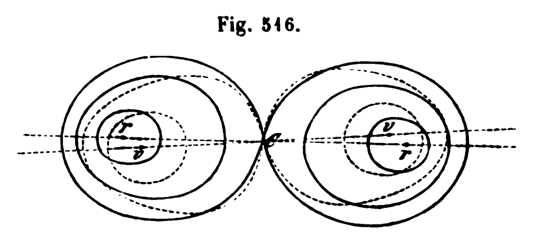
Fig. 515.



Horizontallinien eine abweichende ist, die **horizontale** (»dispersion horizontale« **Des Cloizeaux's**) genannt hat. Fig. 8 der Tafel stellt das Interferenzbild eines Feldspathkrystalles in der Stellung dar, in welcher seine Axenebenen einem Nicolhauptschnitt parallel sind, in welcher also die farbigen Säume zu sehen sind, Fig. 9 das Interferenzbild derselben Platte, wenn ihre Axenebene 45° mit den Nicols bildet.

Der zweite Fall, der möglich ist, wenn die optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene steht, ist der, dass die eine in letzterer Ebene liegende Hauptschwingungsrichtung die zweite Mittellinie und die Normale derselben, die Orthodiagonale, die erste ist. Da letztere als Symmetrieaxe allen Farben als Mittellinie gemeinsam, die erstere aber dispergirt sein muss, so sind die Axenebenen für verschiedene Farben zwar verschieden, schneiden einander jedoch alle in der Halbirenden des spitzen Axenwinkels; die zu dieser normale Fläche, das Klinopinakoid, ist also senkrecht auf der ersten Mittellinie für alle Farben. Wenn an einem derartigen Krystall die Symmetrieebene vorherrschend ausgebildet ist, so bietet er unmittelbar die gewünschte Platte dar, andernfalls ist jene Ebene anzuschleifen. Werde der Krystall nun auf den Objectträger des Polarisationsinstrumentes mit jener Fläche aufgelegt, so sei in Fig. 516 wieder C der Mittelpunkt des Gesichtsfeldes; dieser entspricht der ersten Mittellinie für alle Farben. Seien $r\,r$ ferner die Axenpunkte für Roth, die ausgezogenen Curven die Lemniscaten für diese Farbe, so bezeichnet die Gerade $r\,r$ die Lage der Axenebene für Roth.

Fig. 516.



Für eine andere Farbe, z. B. Violett, ist zwar die erste Mittellinie dieselbe, aber die zweite nimmt in der Symmetrieebene eine andere Lage ein, also ist die optische Axenebene für diese eine andere, um einen gewissen Winkel um C gedrehte; ihre Lage sei durch die Gerade $v\,v$ repräsentirt, die beiden Punkte $v\,v$ seien die Axenpunkte und die punktirten Curven die Lemniscaten für Violett. Die Axenebenen für die mittleren Farben liegen natürlich zwischen $r\,r$ und $v\,v$. Hieraus geht hervor, dass das Axenbild nur in monochromatischem Lichte eine Symmetrie zeigen kann, in weissem Lichte dagegen nach keiner Richtung; vielmehr ist rechts und links die Farbenvertheilung verschieden, ebenso oben und unten; sie muss aber gleich sein rechts unten mit links oben, sowie rechts oben mit links unten. Da die Axenebenen alle um C gedreht sind, so muss der schwarze Mittelbalken bei paralleler Stellung mit einem Nicol auch hier farbig gesäumt erscheinen, aber rechts und links verschieden, also entweder rechts oben und links unten roth und links oben und rechts unten blau, oder umgekehrt. Diese kreuzweise übereinstimmende Färbung des Mittelbalkens lässt diese Dispersion, welche man die **gekreuzte** (»dispersion croisée ou

tournante« Des Cloizeaux's) nennt, am leichtesten erkennen Die in dieser Stellung von einer Boraxplatte hervorgebrachte Interferenzerscheinung zeigt Fig. 10 der Tafel, während Fig. 11 diejenige nach einer Drehung der Platte um 45⁰ darstellt.

Wenn der optische Axenwinkel eines Krystalls so wenig von 90⁰ verschieden und seine Brechungsindices so klein wären, dass man die Axen sowohl durch eine Platte senkrecht zur ersten, als durch eine senkrecht zur zweiten Mittellinie, noch sehen könnte, so ist es klar, dass die eine dieser Platten die Erscheinung der horizontalen, die andere die der gekreuzten Dispersion zeigen würde, wenn die Axenebenen derselben senkrecht zur Symmetrieebene stehen. Eigentlich sind also die beiden letzterwähnten Arten der Dispersion an solchen Krystallen stets vereinigt, nur dass man meist wegen des zu grossen stumpfen Axenwinkels nur die eine derselben beobachten kann.

Diese Dispersionserscheinungen sind nun deshalb von besonderer praktischer Bedeutung, weil sie ein sehr empfindliches Mittel zur Erkennung der Dispersion der Mittellinien darbieten. Da eine solche im rhombischen System nicht existirt, so leuchtet ein, dass die so einfache Beobachtung derselben dazu dienen kann, einen Krystall als einen zur monosymmetrischen Abtheilung gehörigen zu erkennen, wenn etwa seine Krystallform derjenigen eines rhombischen geometrisch sehr nahe steht, wie dies zuweilen vorkommt. In der That hat man für eine Reihe von Substanzen, deren Krystalle derart beschaffen und nicht sehr genau messbar waren, die vorhandenen Winkeldifferenzen für Ungenauigkeit der Messung gehalten und dieselben als rhombisch krystallisirend angenommen, bis man das Vorhandensein einer monosymmetrischen Dispersion und durch Revision der Messungen alsdann auch die Form als eine monosymmetrische erkannte. Um die Beseitigung derartiger Irrthümer bei verschiedenen Mineralien hat sich namentlich A. Des Cloizeaux verdient gemacht.

Die Absorptionsverhältnisse gestalten sich im monosymmetrischen System wegen des Nichtzusammenfallens der optischen Hauptschnitte für verschiedene Farben sehr complicirt. Nehmen wir an, dass für eine bestimmte Farbe die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Absorption mit den Hauptschwingungsrichtungen zusammenfallen, und betrachten wir eine Platte, senkrecht zu einer der beiden in der Symmetrieebene gelegenen Schwingungsrichtungen geschliffen, im weissen Lichte, so wird, weil für die andern Farben die betreffenden Hauptschwingungs- und Absorptionsrichtungen geneigt zur Platte liegen, die Färbung der letzteren sich verschieden ändern, wenn wir sie um die Symmetrieaxe einmal nach rechts, das andere Mal nach links drehen. Eine solche Verschiedenheit, welche natürlich nur an sehr stark pleochroïtischen Krystallen bemerkbar werden kann, wies Laspeyres (Zeitschr. f. Kryst. 4,456) am Manganepidot nach, bei welchem die erwähnte Ungleichheit so gross ist, dass eine senkrecht zur Axe der kleinsten Elasticität geschnittene, dunkel gelbroth durchsichtige Platte beim Drehen

um 20° nach der einen Seite immer gelber, beim Drehen nach der andern Seite immer röther wird; die Richtungen der grössten Farbendifferenz (»Absorptionsaxen« Laspeyres') in der Symmetrieebene liegen anscheinend senkrecht zu einander und circa 20° gegen die Hauptschwingungsrichtungen geneigt. Diese Abweichung ist, verglichen mit der Dispersion der Hauptschwingungsrichtungen selbst, eine so grosse, dass die obige Annahme des Zusammenfallens der Hauptabsorptionsrichtungen mit den Hauptschwingungsrichtungen für das Licht derselben Farbe jedenfalls noch einer Prüfung durch genaue Messungen bedarf. Bei dem Manganepidot zeigen auch die Interferenzbilder im convergenten Lichte eine unsymmetrische Färbung des Gesichtsfeldes zwischen den Farbenringen.

Unter den thermischen Eigenschaften sind es zunächst diejenigen der Wärmeleitung, welche unter Umständen eine praktische Bedeutung erlangen können, namentlich zur Unterscheidung monosymmetrischer Krystalle von rhombischen, wenn dieselben undurchsichtig sind, daher die optischen Methoden keine Anwendung finden können. Es handelt sich hierbei hauptsächlich um die Ermittelung der Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Leitungsfähigkeit des Krystalls für die Wärme; aus dem Grundgesetz S. 217 folgt, dass eine dieser drei Richtungen stets mit der Symmetrieaxe zusammenfällt, die beiden andern, auf einander und zu jener senkrecht stehend, müssen demnach irgend eine Lage in der Symmetrieebene einnehmen, welche jedoch keine gesetzmässige Beziehung weder zu den Krystallkanten, noch etwa zu den optischen Hauptschwingungsrichtungen darbietet. Ihre Lage wird ermittelt durch das Sénarmont'sche Experiment (S. 159), indem man dieses auf dem Klinopinakoid in Anwendung bringt; es zeigt sich als Schmelzfigur eine schief gegen die Kante der Platte stehende Ellipse, deren grosse und kleine Axe die gesuchten Richtungen sind. Auch auf den prismatischen Flächen stehen die Axen der isothermen Curven schief gegen die Kanten, dagegen auf den Querflächen ist die eine horizontal, die andere vertical, d. h. die erstere parallel der Symmetrieaxe, die letztere parallel der Symmetrieebene. Die Lage der grossen und kleinen Axe der bei diesem Versuch entstehenden Ellipse auf den verschiedenen Flächen ist folglich das vollkommene Analogon der Schwingungsrichtungen des Lichtes.

Von noch grösserer Wichtigkeit ist das Verhalten der monosymmetrischen Krystalle in Bezug auf die Ausdehnung durch die Wärme. Es wurde bereits in §. 97 dargethan, dass von den auf einander senkrechten Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Ausdehnung stets eine mit der Symmetrieaxe zusammenfallen, folglich die beiden andern der Symmetrieebene parallel sein müssten. Da die letzteren, in der Symmetrieebene gelegenen, thermischen Axen keine durch ein allgemeines Gesetz bestimmte Lage in Bezug auf den Krystall besitzen, so ist keine Ursache für die Constanz ihrer Lage innerhalb verschiedener Temperaturintervalle vorhanden, ebensowenig wie für die Coincidenz der Hauptschwingungsrichtungen ver-

schiedener Farben. Wie die Lage der optischen Elasticitätsaxen eine Function der Wellenlänge, so hat man anzunehmen, dass auch die Orientirung der Hauptausdehnungsrichtungen in der Symmetrieebene von der Temperatur abhänge. Die Drehung dieser Richtung bei steigender Erwärmung des Krystalls scheint allerdings bei den bisher untersuchten Substanzen (Gyps, Adular) so gering zu sein, dass sie innerhalb der Fehlergrenze fällt, ihr Vorhandensein ist aber deshalb nicht zu bezweifeln, weil dieselbe bei einem asymmetrischen Körper sicher nachgewiesen worden ist (s. Beckenkamp, über die Ausdehnung monosymmetrischer und asymmetrischer Krystalle durch die Wärme; Zeitschr. f. Kryst. 5,436; ferner L. Fletcher, über die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme, ebenda 4,337, 8,455).

Die Art und Weise, wie sich die verschiedenen Kantenwinkel eines monosymmetrischen Krystalls mit seiner Temperatur ändern, ergiebt sich nun unmittelbar aus den Sätzen über die Winkeländerung zweiaxiger Krystalle S. 169 f. Das Klinopinakoid ist ein thermischer Hauptschnitt; alle Querflächen stehen dazu normal, sie sind einer thermischen Axe parallel; folglich bleiben sie nach S. 169 bei allen Temperaturen normal zur Symmetrieebene; es ändert sich jedoch ihre gegenseitige Neigung, da keine derselben einem thermischen Hauptschnitt parallel ist. Eine beliebige der Querflächen wählt man bekanntlich zum Orthopinakoid, eine andere zur Basis, und da der Winkel, unter welchem diese einander schneiden, mit der Temperatur variabel ist, so folgt hieraus, dass von den drei Axenwinkeln α, β, γ eines Krystalls zwar α und γ ($= 90^0$) Constante, β aber eine Function der Temperatur ist.

Die prismatischen Formen sind keiner thermischen Axe parallel, ihre Neigungen müssen sich somit nach S. 170 ändern, sowohl gegen die Symmetrieebene, als auch gegen sämmtliche Querflächen. Da aber zwei zu einander symmetrisch liegende Flächen, z. B. die rechte und die linke Fläche eines vertical gestellten Prismas, gleichgeneigt sind gegen die drei thermischen Axen, so müssen die entsprechenden Winkel beider mit jenen Axen gleichartig variiren. Man denke sich zu der Fläche MNO Fig. 110, S. 170, diejenige hinzu, welche in Bezug auf einen thermischen Hauptschnitt zu ihr symmetrisch liegt, so hat man den in Rede stehenden Fall; denn zwei Flächen einer prismatischen Form sind zu einander symmetrisch in Bezug auf {010}, d. i. auf einen thermischen Hauptschnitt. Die Parameter der Fläche MNO, aufgetragen auf die thermischen Axen, waren m, n, o, diejenigen der symmetrischen Fläche müssen die gleichen sein und, da ihre Richtungen dieselben sind, sich mit der Temperatur um gleich viel ändern. Es sind somit $m(1+\beta)$, $n(1+\gamma)$, $o(1+\alpha)$ die Parameter sowohl der ersten, als der zweiten Fläche nach einer Temperaturerhöhung um 100^0, d. h. die beiden Flächen sind auch dann noch symmetrisch zu einander in Bezug auf den thermischen Hauptschnitt, in Bezug auf welchen sie es vorher waren. Da dies für eine beliebige prismatische Form gilt, so folgt allgemein: alle prismatischen Formen ändern ihre Neigung gegen

die Symmetrieebene und gegen die Querflächen, bleiben aber stets symmetrisch gegen das Klinopinakoid, welche Temperatur auch der Krystall habe. Der Winkel derselben wird demnach stets von {010} halbirt, und da alle Querflächen normal zu dieser bleiben, wenn der Krystall gleichmässig erwärmt oder abgekühlt wird, so geht daraus hervor, dass die Symmetrie eines monosymmetrischen Krystalles in Bezug auf jene ausgezeichnete Ebene, welche wir Klinopinakoid nannten, von seiner Temperatur völlig unabhängig ist.

Wir haben S. 488, Fig. 509, einen Krystall betrachtet, dessen Querflächen r und r' sehr nahe symmetrisch zu a lagen und daher fast ein rhombisches Prisma bildeten. Nach dem Vorhergehenden müssen die beiden sehr ähnlichen Winkel $a:r$ und $a:r'$ sich in verschiedener Weise beim Erwärmen ändern, ihre Differenz wird also entweder grösser oder kleiner werden. In letzterem Falle wird es also eine Temperatur geben, bei der sie genau gleich sind; dadurch ist nun zwar a in geometrischer Beziehung eine Symmetrieebene geworden, aber nicht in physikalischer, denn die Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes sind derselben keineswegs nunmehr parallel, auch verliert sich der Charakter der geometrischen Symmetrieebene, sobald die Temperatur variirt. Demnach ist der Krystall durch jene Winkeländerung kein rhombischer geworden, denn zu dessen Wesen gehört, wie wir sahen, die physikalische Symmetrie nach drei auf einander senkrechten Ebenen und die Bewahrung dieser Symmetrie für alle Wärmegrade des Krystalls.

Da eine gleichmässige Temperaturerhöhung des Krystalls niemals seine Symmetrie aufhebt, so müssen auch alle durch dieselbe hervorgebrachten Aenderungen der optischen Eigenschaften innerhalb der Grenzen bleiben, welche durch jene Symmetrie gezogen sind. Die eine der drei Hauptschwingungsrichtungen muss stets der Axe b parallel sein, die beiden andern dem Klinopinakoid; aber der Winkel, welchen diese beiden mit irgend einer prismatischen Kante bilden, wird variiren mit der Temperatur. Diese Variation ist indess stets so klein, dass sie erst bei erheblichen Temperaturunterschieden messbar wird. Weit grösser ist gewöhnlich diejenige des Winkels der optischen Axen, hervorgebracht durch eine ungleiche Aenderung der drei Hauptbrechungsindices. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden. Ist die Symmetrieaxe die erste Mittellinie, so bleibt sie es nach Obigem auch beim Erwärmen; die optischen Axen mögen sich also dabei von ihr entfernen oder sich ihr nähern, jedenfalls müssen dies beide um gleich viel thun, ihre Bewegung eine genau gleiche und entgegengesetzte sein. Da aber zugleich die zweite Mittellinie ihre Richtung ändert, so wird dies eine Drehung der Axenebene um die erste Mittellinie zur Folge haben. Ist dagegen eine der beiden, der Symmetrieebene parallelen Hauptschwingungsrichtungen die Halbirende des spitzen Axenwinkels, und ist die Ebene der optischen Axen normal zum Klinopinakoid, so müssen zwar auch, wenn der

Axenwinkel beim Erwärmen kleiner wird, beide Axen sich um gleich viel der Symmetrieebene nähern, es wird sich jedoch die Ebene derselben um die Orthodiagonale drehen, indem die erste Mittellinie innerhalb der Symmetrieebene ihre Richtung ändert; dies giebt im Gesichtsfelde des Polarisationsapparates eine Parallelverschiebung der Axenebene. Ist endlich die Ebene der optischen Axen die Symmetrieebene selbst, so variirt die Lage der Mittellinie mit der Temperatur innerhalb der Axenebene. Wird z. B. der Axenwinkel beim Erwärmen kleiner und bewegt sich dabei die Mittellinie nach rechts, so muss offenbar die links gelegene Axe sich schneller nach der Normalen zur Platte hin bewegen, als die rechte, um stets gleich weit von der Mittellinie entfernt zu bleiben. Am besten kann man diese Erscheinung beobachten am Gyps, dessen Axenwinkel derart mit der Temperatur variirt, dass er für blaues Licht schon etwa bei 100° Null ist und bei weiterer Temperaturerhöhung die Axen in der zur Symmetrieebene normalen Ebene auseinandergehen. Erwärmt man eine senkrecht zur ersten Mittellinie für mittlere Farben geschnittene Gypsplatte in einem mit dem Polarisationsinstrument verbundenen Apparate, welcher in der III. Abtheilung beschrieben werden soll, bis auf 100°, so beobachtet man deutlich, dass die eine Axe sich der Mitte des Gesichtsfeldes weit schneller nähert, als die andere, so dass sie schliesslich an einem Punkte zusammenkommen, der von der Mitte nicht unbeträchtlich abweicht (s. u. Gyps im folgenden §). Schon bei verhältnissmässig niedrigen, aber wegen der starken Dispersion für die verschiedenen Farben merklich verschiedenen Temperaturen tritt die Einaxigkeit ein beim Glauberit; s. Laspeyres, Zeitschr. f. Kryst. 1,529.

§. 102. Beispiele monosymmetrisch krystallisirender Substanzen:*)

Fig. 517.

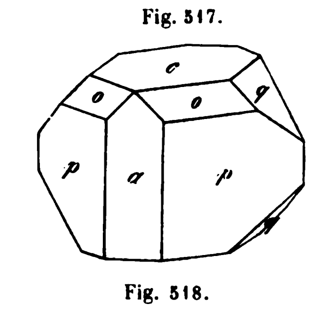
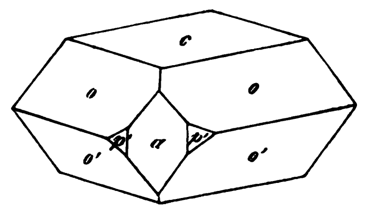


Fig. 518.



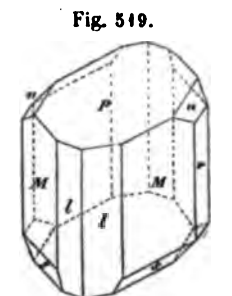
Schwefel $= S$ (dimorph, vergl. S. 450), aus dem geschmolzenen Zustande erstarrt. $a : b : c = 0,9958 : 1 : 0,9998$, $\beta = 84^0\ 14'$ Mitscherlich. Combination Fig. 517: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $q = \{011\}$ (das Zeichen ergiebt sich aus den Zonen qcq und aoq).

Selen $= Se$. $a : b : c = 1,6208 : 1 : 1,6003$, $\beta = 75^0\ 54'$ Mitscherlich. Combination Fig. 518: $c = \{001\}$, $a = \{100\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{\bar{1}11\}$ (dass die vordere und hintere Hemipyramide die gleichen Indices haben, geht aus den Zonen oao' und coo' hervor), $p' = \{210\}$.

*) Bei den folgenden Beispielen sind die Resultate der optischen Untersuchung, soweit solche bis jetzt vorliegen, aufgenommen; sehr oft ist nun von dem Beobachter

Arsensulfür (nat. Realgar) = AsS. $a:b:c = 1{,}4403 : 1 : 0{,}9729$, $\beta = 66^0\ 5'$ Marignac. Combination Fig. 519: $M = \{110\}$, $l = \{210\}$, $P = \{001\}$, $n = \{011\}$, $r = \{010\}$, $s = \{\bar{1}11\}$. Spaltbar nach $\{010\}$. Optische Axenebene = Symmetrieebene, die erste Mittellinie liegt im stumpfen Winkel der Krystallaxen a und c und bildet mit ersterer 103^0, mit letzterer 11^0; Doppelbrechung —, stark; $2H = 96^0\ 20'$ roth, $= 92^0\ 58'$ gelb, also starke Dispersion; die der Mittellinien (geneigte) ebenfalls stark (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 166).

Fig. 519.



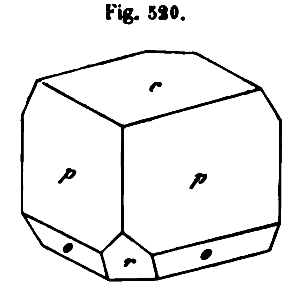
Ferrocyankalium (gelbes Blutlaugensalz) = $K^4Fe(CN)^6 + 3H^2O$. $a:b:c = 0{,}3962 : 1 : 0{,}4008$, $\beta = 89^0\ 27'$ Wyrouboff. Dicke Tafeln nach $\{010\}$, begrenzt von $\{110\}$ und $\{011\}$; da die Kanten dieser beiden Formen einander fast rechtwinkelig schneiden und ihre Neigung zu $\{010\}$ fast gleich ist, so erscheint die Combination wie die einer spitzen tetragonalen Pyramide mit vorherrschender Basis. Spaltbar $\{010\}$ vollkommen. Die gewöhnlichen Krystalle bestehen aus zahlreichen Lamellen nach $\{010\}$ mit gekreuzten Axenebenen, zeigen daher die in Fig. 96 S. 130 abgebildete Erscheinung oder das Interferenzbild einaxiger Krystalle. Aus warmer Lösung von chromsaurem Kalium erhält man homogene Krystalle (Wyrouboff, Ann. chim. phys. (4] 6).

Ferricyankalium (rothes Blutlaugensalz) = $K^3Fe(CN)^6$. $a:b:c = 1{,}2876 : 1 : 0{,}8011$, $\beta = 89^0\ 54'$ Marignac. Combination $\{110\}$ vorherrschend, am Ende $\{111\}$ oder $\{111\}$, $\{\bar{1}11\}$. Meist Zwillinge nach $\{100\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, 1. Mittellinie 4^0 gegen die Verticalaxe geneigt.

$2E = 71^0\ 20'$ Roth
75 52 Gelb (Des Cloizeaux).

Chlorsaures Kalium = $KClO^3$. $a:b:c = 0{,}8256 : 1 : 1{,}2236$, $\beta = 70^0\ 4'$ Rammelsberg. Combination Fig. 520: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $r = \{\bar{1}01\}$ (gerade Abstumpfung der Kante der Hemipyramide). Häufig Zwillinge nach $\{001\}$ und mit derselben Fläche verwachsen. Spaltbarkeit nach $\{110\}$. Optische Axenebene $\perp\{010\}$; $2E = 28^0$ ungefähr.

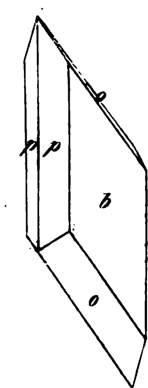
Fig. 520.



die Dispersion der Hauptschwingungsrichtungen nicht bestimmt, sondern nur ihre Lage für mittlere Farben gemessen worden; alsdann ist im Folgenden nur eine Zahl hierfür angegeben.

Kohlensaures Natrium (Soda) = $Na^2CO^3 + 10H^2O$. $a:b:c = 1,1486:1:1,4828$, $\beta = 57^0\ 40'$ Mohs. Combination Fig. 521 : $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, tafelartig nach der Symmetrieebene. Spaltbarkeit nach $\{100\}$. Optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene, liegt im stumpfen Winkel der Axen und bildet mit a 22⁰, mit c 100⁰; Axe b ist erste Mittellinie, Doppelbrechung —; $2E = 69^0$ ungefähr; schwache gekreuzte Dispersion.

Fig. 521.



Schwefelsaures Natrium (Glaubersalz): $Na^2SO^4 + 10H^2O$. $a:b:c = 1,1161:1:1,2382$, $\beta = 72^0 15'$ Haidinger. Combination: $\{100\}, \{001\} \{\bar{1}01\}, \{011\}, \{111\}, \{\bar{1}11\}$ u. a. Oft sehr flächenreiche Krystalle. Spaltbar $\{100\}$ vollkommen. Optische Axenebene senkr. zu $\{010\}$, Axe b 1. Mittellinie;, 2. Mittellinie bildet mit Axe c 31⁰ f. Roth, 26½⁰ f. Blau; $2E = 122^0\ 48'$ roth, $122^0\ 42'$ blau (Des Cloizeaux).

Fig. 522.

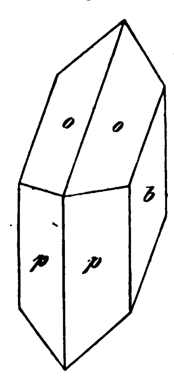
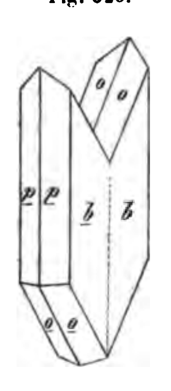


Fig. 523.



Schwefelsaures Calcium (Gyps = $CaSO^4 + 2H^2O$. $a:b:c = 0,6895 : 1 : 0,4132$, $\beta = 81^0\ 2'$ Beckenkamp. Combination Fig. 522: $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \{111\}$. Nicht selten Zwillinge nach $\{100\}$, s. Fig. 523. Spaltbarkeit $\{010\}$ sehr vollkommen, $\{\bar{1}11\}$ deutlich, $\{100\}$ unvollkommen. Sehr grosse Verschiedenheit der Elasticität innerhalb der Symmetrieebene, wie aus Fig. 524 hervorgeht, in welcher die Curve dargestellt ist, deren Radien proportional der Biegung eines entsprechenden Stabes; es bedeutet: 1 ‖ t die Richtung $\{\bar{1}01\}$, d. h. die des sogen. Faserbruches, gebildet von den beiden Spaltungsflächen $(\bar{1}11)$ und $(\bar{1}\bar{1}1)$; 2 die Richtung der ersten Mittellinie der optischen Axen, 3 die Normale zu $d\{101\}$, 7 die Normale zu $c\{001\}$, 10 die Normale zu $t\{\bar{1}01\}$, 11 die Richtung der zweiten optischen Mittellinie, 17 die Normale zu $a\{100\}$, 18 die Richtung der bei der Körnerprobe entstehenden Gleitfläche β $\{\bar{5}09\}$. S. Coromilas, Zeitschr. f. Kryst. 1, 409.

Brechungsexponenten bei 16,8⁰ C. nach V. von Lang:

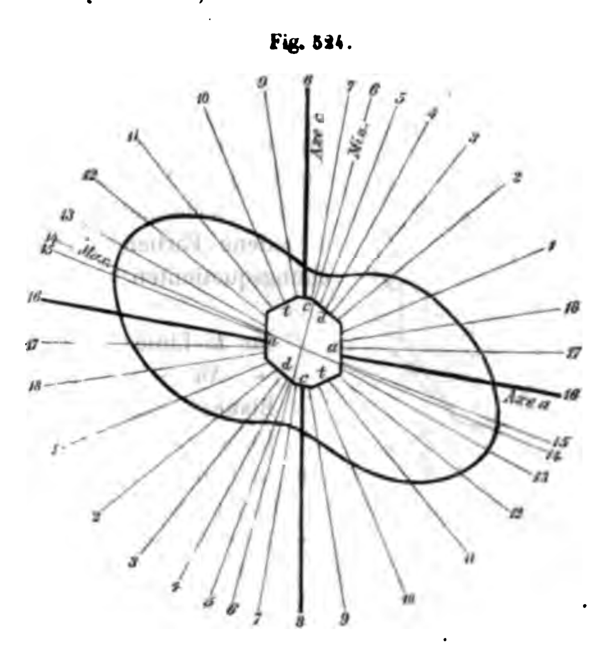
	α	β	γ
Linie C	1,5183	1,5204	1,5281
- D	1,5207	1,5228	1,5305
- E	1,5237	1,5258	1,5335
- F	1,5263	1,5284	1,5361

Der optische Axenwinkel hat für D ein Maximum und auch die Dispersion

der optischen Elasticitätsaxen ist anormal (s. V. v. Lang, Sitz. Ber. d. Akad. Wien. Dec. 1877, Zeitschr. f. Kryst. 2, 499).

Optische Axenebene bei gewöhnlicher Temperatur parallel der Symmetrieebene, mit starker geneigter Dispersion (s. Fig. 6 und 7 der Tafel); bei 9° C. liegt die erste Mittellinie im stumpfen Winkel der Axen und macht mit a 23° 43′, dabei ist $2V = 61° 24′$. Beim Erwärmen nähert sich diejenige Axe, welche weitere Ringe und an der Hyperbel aussen Violett, innen Blau hat, weit schneller der Mitte des Gesichtsfeldes, als die andere, deren Hyperbelsäume aussen roth, innen blaugrün sind. Des Cloizeaux fand für rothes Licht

Fig. 524.



$2E =$ 75° 58′	bei 47°	Cels.
59 19	- 71,5	-
39 4	- 95,5	-
0	116	-

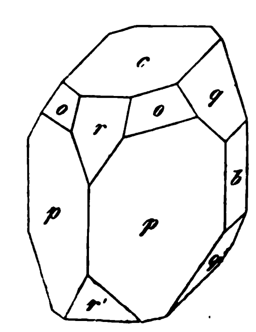
Bei letzterer Temperatur waren die Axen für Blau schon merklich getrennt in der zu {010} normalen Ebene; bei etwas höherer Erwärmung liegen alle Axen in Ebenen, senkrecht zur Symmetrieebene, ihre horizontale Dispersion ist jedoch gering. Zwischen 20° und 95° dreht sich eine Axe (für Roth), nach der Mitte zu um 33° 55′, die andere um 22° 38′, folglich ändert die Mittellinie ihre Lage um 5° 38′. Doppelbrechung —. Die thermische Ausdehnung des Gypses ist mit der Richtung beträchtlich verschieden, daher die Winkeländerungen beim Erwärmen nicht unbedeutend; nach Beckenkamp's neuesten Messungen (Zeitschr. f. Kryst. 6, 450) sind die Elemente:

bei 0° C.	$a : b : c =$ 0,689724 : 1 : 0,413411,	$\beta =$ 81° 3′ 42″
50 - - - -	0,689301 : 1 : 0,413072,	81 0 1
100 - - - -	0,688596 : 1 : 0,412661,	80 56 31

Darnach ist die Symmetrieaxe Richtung der grössten thermischen Ausdehnung, die der kleinsten liegt im stumpfen Axenwinkel β und bildet mit der Verticalaxe 45—46°.

Schwefelsaures Eisen (Eisenvitriol) = $FeSO^4 + 7H^2O$. $a:b:c = 1,1828 : 1 : 1,5427$, $\beta = 75^0\ 44\frac{1}{2}'$ von Zepharovich. Combination Fig. 525: $p = \{110\}$, $c = \{001\}$ (manchmal nur diese beiden, eine rhomboëderähnliche Form bildend), $r = \{101\}$, $r' = \{\bar{1}01\}$, $o = \{111\}$ (Zonen *oro* und *cop*), $q = \{011\}$, $b = \{010\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$ vollkommen, $\{110\}$ unvollkommen. Optische Axenebene $\{010\}$, Doppelbrechung +; erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel macht mit c $62^0\ 28'$ und divergirt für verschiedene Farben nur einige Minuten. Hauptbrechungsquotienten:

Fig. 525.



	α	β	γ
für *Li*-Linie:	1,4681	1,4748	1,4824
- *Na* - :	1,4713	1,4782	1,4856
Blaues Glas:	1,4794	1,4861	1,4928

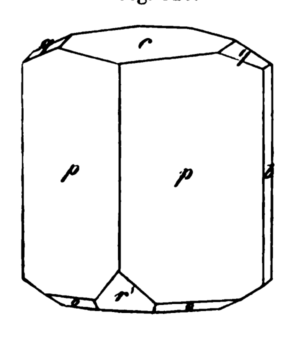
Direct bestimmt durch Messung des spitzen und stumpfen Winkels der optischen Axen in Oel:

Roth:	$2V = 85^0\ 31'$
Gelb:	85 27
Grün:	85 23

(Erofejeff, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 56. Bd. II, 63). Sehr ähnliche Werthe fand Des Cloizeaux (Nouv. Rech. 173).

Schwefelsaures Kalium-Magnesium = $K^2Mg(SO^4)^2 + 6H^2O$. $a:b:c = 0,7420 : 1 : 0,5003$, $\beta = 75^0 5'$ Murmann. Combination Fig. 526: $p = \{110\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $r' = \{\bar{2}01\}$, $b = \{010\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, Doppelbrechung +, schwach; die erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel, von a nur circa 1^0 abweichend (für Roth weniger als für Blau). Mittlerer Brechungsexponent:

Fig. 526.



$\beta = 1,468$ roth
1,470 gelb
1,476 blau.

$2V = 48^0 21'$, Dispersion $\varrho > v$. (Murmann und Rotter, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 34, 144).

Schwefelsaures Ammonium-Magnesium = $(NH^4)^2Mg(SO^4)^2 + 6H^2O$. $a:b:c = 0,7376 : 1 : 0,4891$, $\beta = 72^0 54'$ Murmann. Combination gleich der vorigen. Optische Axenebene $\{010\}$, Doppelbrechung +, schwach; erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel, bildet mit a 5^0.

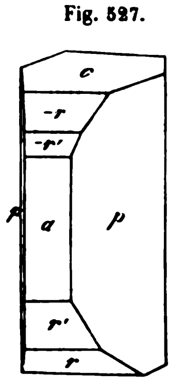
β	$2V$	
$\beta = 1,4677$	$2V = 50^0\ 27'$	roth
1,4737	50 14	gelb
1,4787	49 47	grün
1,4846	48 54	violett

(Heusser, Poggend. Ann. d. Physik, 91. Bd. Murmann und Rotter, l. c.). Ueber die analog zusammengesetzten Salze:

$$(NH^4)^2 Mn(SO^4)^2 + 6H^2O$$
$$K^2 Fe(SO^4)^2 + 6H^2O$$
$$(NH^4)^2 Fe(SO^4)^2 + 6H^2O$$
$$K^2 Ni(SO^4)^2 + 6H^2O$$
$$(NH^4)^2 Ni(SO^4)^2 + 6H^2O$$
$$K^2 Co(SO^4)^2 + 6H^2O$$
$$(NH^4)^2 Co(SO^4)^2 + 6H^2O$$
$$K^2 Zn(SO^4)^2 + 6H^2O$$
$$(NH^4)^2 Zn(SO^4)^2 + 6H^2O$$
$$K^2 Cu(SO^4)^2 + 6H^2O$$
$$(NH^4)^2 Cu(SO^4)^2 + 6H^2O,$$

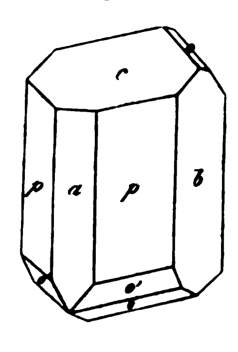
welche sämmtlich gleiche Krystallform und sehr ähnliche optische Eigenschaften haben, s. Murmann und Rotter, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 34, 148—172.

Fig. 527.



Phosphorsaures Ammonium-Natrium (Phosphorsalz $= (NH^4)NaHPO^4 + 4H^2O$. $a : b : c = 2{,}8828 : 1 : 1{,}8616$, $\beta = 80^0 42'$ Mitscherlich. Combination Fig. 527: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $-r = \{101\}$, $-r' = \{201\}$, $r = \{\bar{1}01\}$, $r' = \{\bar{2}01\}$.

Fig. 528.



Borax $= Na^2B^4O^7 + 10H^2O$. $a : b : c = 1{,}0997 : 1 : 0{,}5394$, $\beta = 73^0 25'$ Rammelsberg. Combination Fig. 528: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $o' = \{\bar{2}21\}$. Optische Axenebene normal zu $\{010\}$, Doppelbrechung —; Symmetrieaxe ist erste Mittellinie, die zweite liegt im spitzen Winkel der Axen und bildet mit c $55^0 33'$ für Roth, $54^0 45'$ für Grün, daher die sehr deutliche gekreuzte Dispersion, welche in Fig. 10 und 11 der Tafel dargestellt ist; die zweite Mittellinie und somit die Axenebene für jede Farbe dreht sich beim Erwärmen von 21^0 auf 86^0 Celsius um $3\frac{1}{2}^0$. Optische Constanten:

	α	β	γ	$2V$	$2E$*)
Für Li-Linie:	1,4442	1,4657	1,4686	$39^0 52'$	$59^0 53'$
- Na - :	1,4468	1,4686	1,4715	— 36	— 23
- blaues Glas:	1,4535	1,4756	1,4785	— 22	

(Tschermak, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 57.Bd. II, 641).

Epidot $= H^2Ca^4Al^6Si^6O^{26}$. $a : b : c = 1{,}5807 : 1 : 1{,}8057$, $\beta = 64^0 36'$ von Kokscharow. Combination Fig. 529: $a = \{100\}$, $c = \{001\}$,

* Direct bestimmt.

$r = \{\bar{1}01\}$, $p = \{110\}$, $o = \{\bar{1}11\}$; stets nach der Symmetrieaxe prismatisch verlängert und gewöhnlich nur an einem Ende ausgebildet. Häufig Zwillinge nach a $\{100\}$, s. Fig. 530 a—c (gerade Projectionen auf die Symmetrieebene); Fig. 530 a stellt einen einfachen Krystall dar, an dessen Ende $o\{\bar{1}11\}$ vorherrscht; in dem symmetrischen Zwilling Fig. 530 b bilden die beiden oberen Flächen $o\underline{o}$ einen einspringenden, die unteren $o\underline{o}$ einen ausspringenden Winkel; sind die letzteren so gross, dass sie allein die Endigung des nach der Symmetrieaxe prismatischen Zwillings bilden, so erscheint derselbe wie ein einfacher monosymmetrischer Krystall, dessen Symmetrie-

Fig. 529.

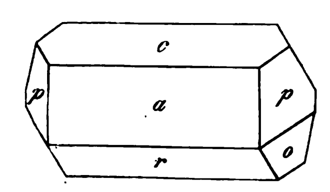
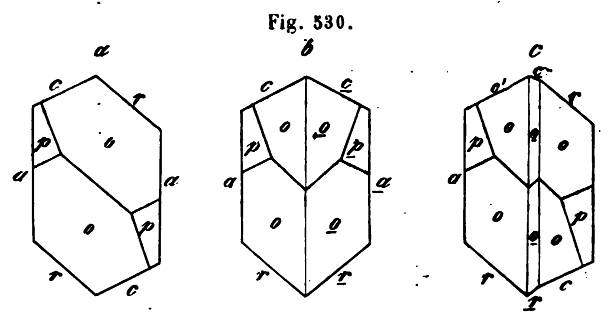


Fig. 530.



ebene a ist; $o\underline{o}$ bildet eine Hemipyramide, aber zu dem vorderen prismatischen Flächenpaar $r\underline{r}$ fehlen hinten die parallelen (da $c\underline{c}$ einen andern Winkel einschliessen), wodurch der Zwilling sogleich erkannt ist. Sehr häufig ist der in Zwillingsstellung befindliche zweite Krystall dem ersten nur als dünne Lamelle eingelagert, wie Fig. 530 c zeigt. Spaltbarkeit $\{001\}$ vollkommen, $\{100\}$ deutlich. Optische Axenebene $\{010\}$, Doppelbrechung —; erste Mittellinie, bei der gewählten Stellung fast vertical, liegt im spitzen Winkel und bildet mit c 2° 56′ für Roth, 2° 26′ für Grün, daher deutliche geneigte Dispersion;

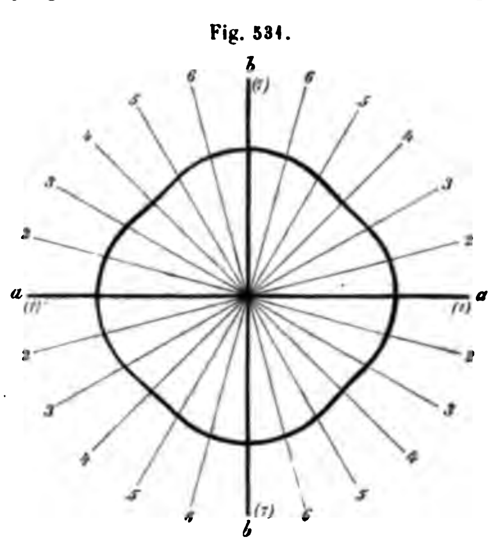
2V = 73° 36′	β =	1,7544	Roth
— 26		1,7570	Gelb
— 13		1,7621	Grün
α = 1,7305,	γ =	1,7677	Roth.

(Klein, N. Jahrb. f. Mineralogie, 1874). Der optische Axenwinkel ändert sich wenig mit der Temperatur.

Glimmer $= KH^2Al^3(SiO^4)^3$. $a:b:c = 0,578:1:3,276$, $\beta = 90^\circ\,0'$ G. vom Rath. Sechsseitige Tafeln nach $\{001\}$, selten mit gut ausgebildeten Randflächen. Zwillinge nach $\{110\}$, deren Verwachsungsfläche aber stets $\{001\}$ ist (s. Tschermak, Zeitschr. f. Kryst. 2, 14). Höchst vollkommene Spaltbarkeit nach $\{001\}$ (über die Verwendung dünner Glimmerplatten zu optischen Zwecken s. S. 125 f.); durch Eintreiben einer scharfen Spitze

in eine Spaltungslamelle erhält man als Schlagfigur einen sechsstrahligen Stern, bestehend aus Sprüngen nach {010} und {$\bar{1}$11}, durch Druck mit einer stumpfen Spitze Knickungen nach drei Richtungen, welche die Winkel der Schlagfigur halbiren (Reusch, Poggendorff's Ann. d. Phys. 136, 130, Bauer. Zeitschr. d. d. geol. Ges. 26, 137, Tschermak l. c.). Die Elasticität für Richtungen innerhalb der Spaltungsfläche wird nach den Messungen von Coromilas (Zeitschr. f. Kryst. 1, 411) dargestellt durch die Curve Fig. 531, deren Radien vect. proportional sind der elastischen Biegung; 1 ist die Richtung der Symmetrieaxe (Maximum der Biegung, daher Minimum der Elasticität); 3, 3, 7 sind den Radien der Schlagfigur, 1, 5, 5 denen der Druckfigur parallel. Optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene, 1. Mittellinie $\frac{1}{2}^0$—2^0 gegen Axe c nach hinten geneigt (da in Folge dieser Orientirung eine Spaltungsplatte die optischen Axen fast genau symmetrisch zur Normale der Platte zeigt, so wurde der Glimmer lange Zeit für rhombisch gehalten, bis Hintze und Tschermak die erwähnte Abweichung nachwiesen). $2E = 60^0$—70^0, $\varrho > v$. Doppelbrechung —. Brechungsexponenten nach Bauer:

Fig. 531.

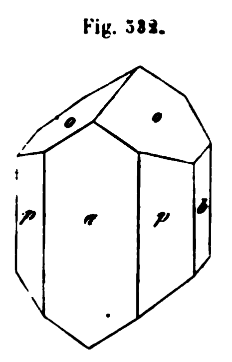


$\alpha = 1{,}537$ für rothes Glas
$\beta = 1{,}541$ - - -
$\gamma = 1{,}574$ - - -

Die angegebenen Werthe gelten für den Kaliglimmer oder Muscovit, während die anderen Glimmerarten (isomorphe Mischungen) grosse Verschiedenheiten in der Lage der optischen Axen zeigen (s. auch S. 151).

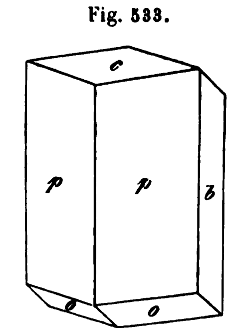
Augit = Mischung von $(MgFe)CaSi^2O^6$ und $MgAl^2SiO^6$. $a : b : c = 1{,}058 : 1 : 0{,}594$, $\beta = 90^0 22'$ von Kokscharow. Combination Fig. 532: $a = \{100\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \{122\}$. Optische Axen in der Symmetrieebene, Doppelbrechung +, stark. Bei den verschiedenen Mischungen, welche die Varietäten dieses Minerals bilden, macht die erste Mittellinie (im stumpfen Axenwinkel) mit c Winkel von 39^0 bis 54^0, der wahre Axenwinkel $2V = 61^0$—68^0; $\beta = 1{,}70$ ungefähr. Meist dunkelbraun durchsichtig mit mässigem Pleochroismus.

Fig. 532.



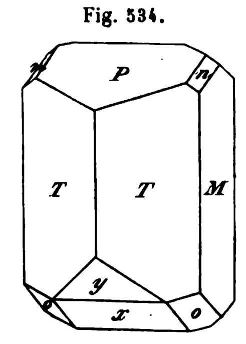
Hornblende, (chemische Zusammensetzung gleich Augit). $a:b:c = 0,5318:1:0,2936$, $\beta = 75^0 2'$ Des Cloizeaux. Combination Fig. 533: $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $o = \{\bar{1}11\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, Doppelbrechung —; erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel macht mit c 1^0—18^0; $2V = 80^0 - 85^0$; $\beta = 1,64$ ungefähr. Starker Pleochroismus; meist ist die Körperfarbe für die Schwingungsrichtung parallel der Axe der grössten Elasticität grün, die parallel der kleinsten braun; doch giebt es Varietäten, deren drei Axenfarben den grössten überhaupt vorkommenden Unterschied zeigen, sie sind nämlich: dunkelblau, violett und gelbgrün.

Fig. 533.



Orthoklas (Kalifeldspath) $= KAlSi^3O^8$. $a:b:c = 0,6585:1:0,5554$, $\beta = 63^0 57'$ G. vom Rath. Combination Fig. 534: $T = \{110\}$, $M = \{010\}$, $P = \{001\}$, $n = \{021\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $x = \{\bar{1}01\}$, $y = \{\bar{2}01\}$*. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen, $\{010\}$ ziemlich vollkommen. Die optischen Eigenschaften dieses Minerals variiren sehr, zum Theil in Folge chemischer Differenzen (Vertretung von K durch Na), besonders aber durch innere Spannungen, da sich meist verschiedene Stellen eines und desselben Krystalls abweichend verhalten. Doppelbrechung —; erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel, schliesst mit c 111^0—112^0 ein; optische Axenebene meist normal zu $\{010\}$, alsdann stets deutliche horizontale Dispersion (in Fig. 8 und 9 der Tafel dargestellt); Axenwinkel sehr verschieden, zuweilen so klein, dass für eine Farbe die Axen zusammenfallen und für einen Theil der Farben in $\{010\}$ aus einander gehen; für einzelne Varietäten liegen die Axen aller Farben in der Symmetrieebene. Beispiele:

Fig. 534.



Feldspath vom St. Gotthard, dessen optische Axenebene senkrecht zu $\{010\}$, mit grossem Axenwinkel, für Gelb:

$\alpha = 1,5190$, $\beta = 1,5237$, $\gamma = 1,5260$. $2V = 69^0 43'$, $2E = 121^0 6'$.

Feldspath (natronreich) von Wehr, dessen Axenebene für Roth normal zu $\{010\}$, für Blau diesem parallel; für Roth:

$\alpha = 1,5170$, $\beta = 1,5239$, $\gamma = 1,5240$. $2V = 13^0 34'$, $2E = 20^0 45'$,

für Blau:

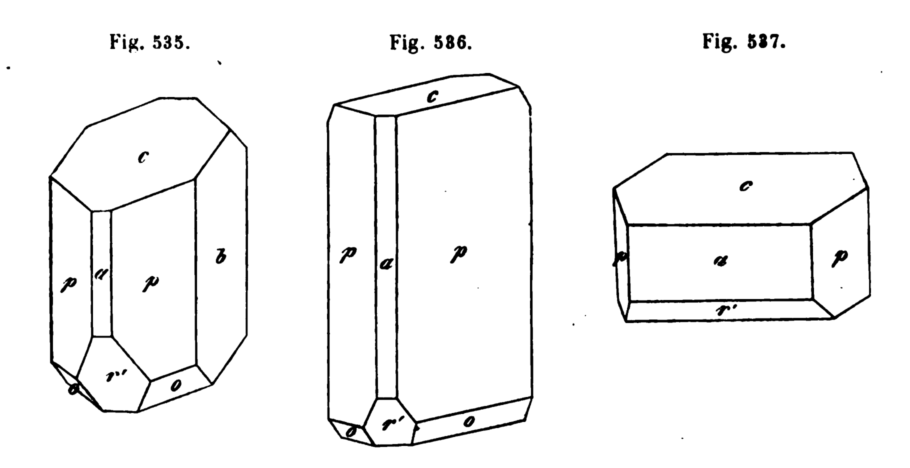
$\alpha = 1,5265$, $\gamma = 1,5356$, $\beta = 1,5355$. $2V = 11^0 51'$, $2E = 18^0 14'$.

Durch Erhöhung der Temperatur findet eine Abnahme des Winkels der Axen, wenn ihre Ebene normal zu $\{010\}$, und eine Zunahme statt, wenn sie in $\{010\}$ liegen; wird die Platte über 500^0 erhitzt, so kehren die Axen

*) Vergl. auch die Projectionen Fig. 505 und 506 S. 482.

nach dem Erkalten nicht ganz in ihre frühere Lage zurück (Des Cloizeaux, Man. d. Min. I, 330—335).

Essigsaures Natrium = $NaC^2H^3O^2 + 3H^2O$. $a : b : c = 1,1852 : 1 : 0,9964$, $\beta = 68^0 16'$ Brooke. Combination Fig. 535: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $r' = \{\bar{2}01\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$ und $\{001\}$. Optische Axenebene senkrecht zu $\{010\}$, erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel, mit c 55°; $2E = 99^0 11'$ roth, $101^0 50'$ violett; horizontale Dispersion kaum bemerkbar (Des Cloizeaux.).



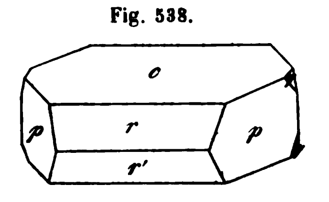
Essigsaures Kupfer (Grünspan) = $Cu(C^2H^3O^2)^2 + H^2O$. $a : b : c = 1,5320 : 1 : 0,8108$, $\beta = 63^0 34'$ Schabus. Combination Fig. 536: $p = \{110\}$, $c = \{001\}$, $a = \{100\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $r' = \{\bar{2}01\}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ und $\{110\}$. Starker Pleochroismus (spangrün bis dunkelblau).

Essigsaures Blei (Bleizucker) = $Pb(C^2H^3O^2)^2 + 3H^2O$. $a : b : c = 2,1791 : 1 : 2,4790$, $\beta = 70^0 12'$ Rammelsberg. Combination Fig. 537: $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r' = \{\bar{1}01\}$, $p = \{110\}$; häufig dünn tafelförmig nach $\{001\}$. Spaltbarkeit nach $\{100\}$ und $\{001\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, Doppelbrechung $+$; erste Mittellinie (für die verschiedenen Farben nur wenige Min. abweichend), im stumpfen Winkel, bildet mit c $55^0 18'$.

$2V = 83^0 27'$	$\beta = 1,570$	roth
83 55	1,576	gelb
87 24	1,584	blau

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 111).

Oxalsäure = $H^2C^2O^4 + 2H^2O$. $a:b:c = 1,6949 : 1 : 3,3360$, $\beta = 73^0 48'$ De la Provostaye. Combination Fig. 538: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $r' = \{\bar{1}01\}$, $q = \{011\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$. Optische Axenebene normal zu $\{010\}$ und fast genau senkrecht



zu {001}; erste Mittellinie || b, zweite Mittellinie im stumpfen Winkel gegen c 14° 43' (roth), 14° 56' (blau) geneigt;

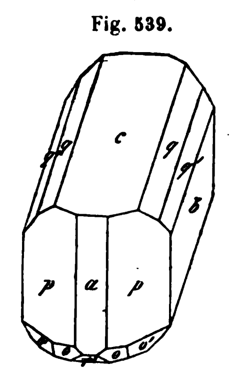


Fig. 539.

$2E = 117° 16'$ roth, 118° 33' blau (Des Cloizeaux).

Saures oxalsaures Kalium (Kleesalz) = $KHC^2O^4 + H^2O$. $a : b : c = 0,3360 : 1 : 0,8011$, $\beta = 46° 31'$ Marignac. Combination Fig. 539: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{021\}$, $r' = \{\bar{1}02\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $o' = \{\bar{1}21\}$ (Zone $o'ooo'$). Spaltbarkeit nach {100} vollkommen, {010} deutlich.

Weinsäure (Rechtsweinsäure) = $C^4H^6O^6$. $a : b : c = 1,2747 : 1 : 1,0266$, $\beta = 79° 43'$ De la Provostaye. Hemimorph. Combination Fig. 540: $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r = \{101\}$, $r' = \{\bar{1}01\}$, $p = \{110\}$, nur am rechten (antilogen) Pol: $q = \{011\}$. Spaltbarkeit {100} deutlich. Optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene, Doppelbrechung +; erste Mittellinie im spitzen Winkel β bildet mit c 71° 18' für Roth, 72° 10' für Blau; $2V = 78° 20'$ gelb (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 114). Brechungsexponenten nach W. Kohlrausch (s. Zeitschr. f. Kryst. 4, 621) für Na : $\alpha = 1,4948$, $\beta = 1,5345$, $\gamma = 1,6051$. Letztere Zahlen wurden mit dem Totalreflectometer gefunden und mit Hülfe dieses Instrumentes zugleich die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit in zahlreichen Richtungen, besonders innerhalb der drei optischen Hauptschnitte, ausgeführt, wobei sich eine

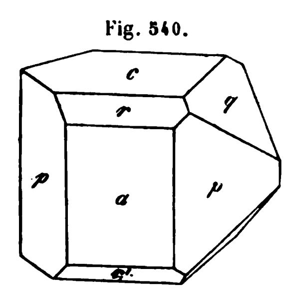


Fig. 540.

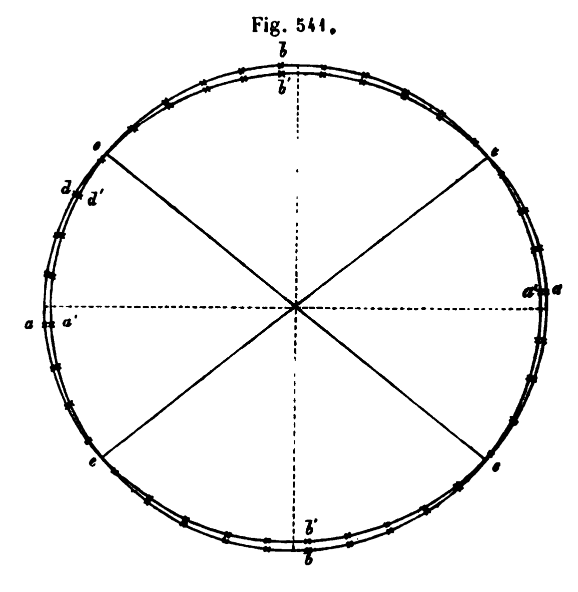


Fig. 541.

vollkommene Uebereinstimmung mit der Fresnel'schen Theorie herausstellte (vergl. S. 103). Um gegenüber den stark übertriebenen Figuren 63 S. 93) u. f. eine Vorstellung von der wirklichen Gestalt der Wellenfläche eines stark doppeltbrechenden Krystalles, wie der Weinsäure, zu verschaffen, ist in Fig. 541 der Durchschnitt derselben durch die optische Axenebene

gegeben. Ueber die polare Pyroëlektricität der Weinsäure s. Hankel, Poggendorff's Ann. d. Phys. 49.500.

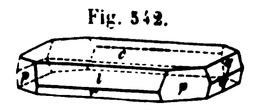


Fig. 542.

Benzoësäure = $C^6H^5.COOH$. $a:b:c = 1,0508 : 1 : 4,2084$, $\beta = 82^0\,55'$ Bodewig. Combination Fig. 542: $c = \{001\}$, $l = \{101\}$, $r = \{\bar{1}01\}$, $p = \{110\}$, $q = \{011\}$. Optische Axenebene $\{010\}$: eine optische Axe steht ungefähr senkrecht zu $c\{001\}$.

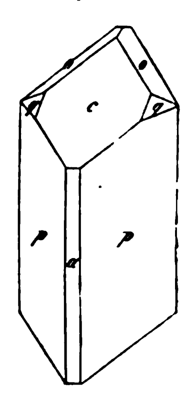


Fig. 543.

Salicylsäure: $C^7H^6O^3$. $a:b:c = 1,0298 : 1 : 0,4344$, $\beta = 88^0\,38'$ Marignac (vergl. Zeitschr. f. Kryst. 5,640). Combination Fig. 543: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $c = \{201\}$, $q = \{211\}$, $o = \{111\}$.

Chinon = $C^6H^4O^2$. $a:b:c = 1,0325 : 1 : 1,7100$, $\beta = 79^0\,0'$ Hintze. Combination Fig. 544: $c = \{001\}$, $m = \{110\}$, $r = \{\bar{1}01\}$; zuweilen noch $o = \{\bar{1}12\}$ (Fig. 545) und Zwillinge nach r (Fig. 546). Spaltbar nach $r\{\bar{1}01\}$ sehr vollkommen. Optische Axenebene $\{010\}$, die erste Mittellinie nahe senkrecht zu $r\{\bar{1}01\}$. Axenwinkel in Oel, beob. durch eine Spaltungsplatte:

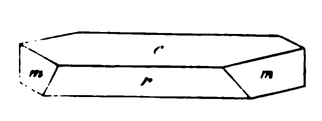


Fig. 544.

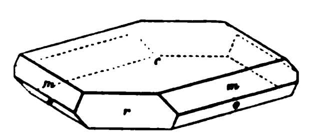


Fig. 545.

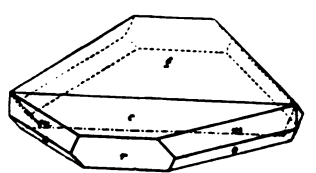


Fig. 546.

$2H_a = 73^0\,28'$ für Li
$74\;\;1$ - Na
$74\;\;38$ - Tl

Doppelbrechung stark, negativ (Henniges, Zeitschr. f. Kryst. 7,527).

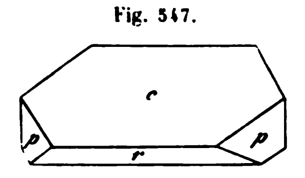


Fig. 547.

Naphtalin = $C^{10}H^8$. $a:b:c = 1,3951 : 1 : 1,4278$, $\beta = 56^0\,31'$ Groth. Combination Fig. 547: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $r = \{\bar{2}01\}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen. Optische Axenebene $\parallel \{010\}$, durch die Spaltungsblättchen eine Axe sichtbar (Groth, unveröff. Beob.).

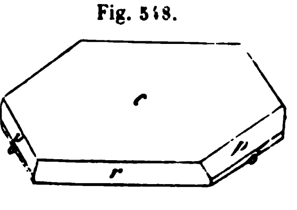


Fig. 548.

Anthracen = $C^{14}H^{10}$. $a:b:c = 1,422 : 1 : 1,878$, $\beta = 55^0\,36'$ Groth. Combination Fig. 548: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $r = \{\bar{2}01\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$. Optische Axenebene $\parallel \{010\}$, durch $\{001\}$ eine Axe sichtbar (Groth, unveröff. Beob.).

wir nunmehr ein bestimmtes Beispiel, den in Fig. 552 dargestellten asymmetrischen Krystall, so ist demnach das Verfahren das folgende: Wir wählen drei beliebige Flächen des Krystalls, z. B. a, b und c, zu Axenebenen, eine beliebige vierte, z. B. o, welche nicht in der Zone zweier von jenen liegt, zur Grundform, und berechnen auf die in S. 197 angegebene Art die Elemente des Krystalls, so erhalten wir drei schiefe Axenwinkel (daher der gewöhnlich gebrauchte Name »triklinisches System«) und ein selbstverständlich irrationales Parameterverhältniss. Von den Kanten der drei zu Axenebenen gewählten Flächen, d. h. den drei Axen, stellen wir eine ($a : b$ Fig. 552), mit c bezeichnet, vertical und nennen sie Verticalaxe, von den beiden anderen lassen wir diejenige, welcher der kürzere Parameter der Grundform entspricht ($b : c$), nach vorn abwärts geneigt, auf den Beobachter zulaufen und nennen sie Brachydiagonale (a); endlich wird die dritte querlaufende Axe b (= der Kante $a : c$) die Makrodiagonale genannt. Bei der Aufzählung der Elemente eines Krystalls sollen die Axenwinkel α, β, γ stets im rechten oberen vorderen Oktanten angeführt werden.

Nach der so getroffenen Wahl der Axen und einer Grundform sind wir im Stande, alle übrigen Flächen des Krystalls einfach durch ihre Indices, oder durch Zeichen, deren Ableitung eine ganz analoge ist, wie in den beiden vorhergehenden Systemen, zu bezeichnen, wie es im folgenden § geschehen soll.

§. 104. Ableitung und Bezeichnung der asymmetrischen Formen. Die zur Grundform gewählte, alle drei Axen in endlichem Abstand schneidende Fläche o ist offenbar das Analogon einer Pyramidenfläche des rhombischen Systems mit ihrer parallelen Gegenfläche, also eines Viertels einer rhombischen Pyramide; man nennt daher diese, sowie jede die drei Axen in endlichem Abstand schneidende Form eine Tetartopyramide. Die in Rede stehende primäre Tetartopyramide wird bezeichnet, wenn sie vorn oben rechts liegt, mit $P' = \{111\}$, wenn sie vorn oben links: $'P = (1\bar{1}1)$, vorn unten rechts (dies ist in Fig. 552 der Fall): $P_, = \{11\bar{1}\}$, vorn unten links (also hinten oben rechts ihre Gegenfläche): $_,P = (1\bar{1}\bar{1})$. Man kann nun an einem flächenreichen asymmetrischen Krystall leicht die Wahl der Axen so treffen, dass alle vier Tetartopyramiden mit denselben Parametern daran auftreten; es würde aber hier, wie im vorigen System betreffs der zusammengehörigen Hemipyramiden, eine völlig falsche Vorstellung erwecken, wollte man von dieser Combination als von der »vollständigen asymmetrischen Pyramide« sprechen; eine solche existirt nicht, sondern jene vier Formen stehen unter einander in keiner anderen Beziehung, als zu den übrigen Krystallflächen; gleiche Indices erhielten sie nur durch eine ganz willkürliche Stellung des Krystalls; bei jeder anderen, die ebenso berechtigt ist, erweisen sie sich als verschieden, so dass man z. B. ebenso gut drei davon zu Axenebenen und eine zur Grundform nehmen kann.

VI. Das asymmetrische Krystallsystem.

§. 103. **Einleitung. Wahl der Axen und der Grundform.** Das letzte Krystallsystem umfasst nach Früherem alle Krystalle, welche keine Symmetrieebene besitzen. Betrachten wir also irgend eine Fläche mit ihrer parallelen Gegenfläche, so wird zu derselben durch die Symmetrie keine weitere gefordert, um sie zu einer vollständigen einfachen Form zu ergänzen; jedes Paar paralleler Flächen ist also für sich eine einfache Krystallform. Es gehören aber wenigstens drei solcher Flächenpaare dazu, einen Raum abzuschliessen, ein asymmetrischer Krystall muss also mindestens eine dreizählige Combination sein, während im vorigen Systeme zwei Formen zur vollständigen Begrenzung eines Krystalls genügten. Im asymmetrischen System giebt es demnach nur eine einzige Art von Formen, nämlich Paare paralleler Flächen.

Da keine dieser Ebenen des Krystalls durch die Symmetrie irgendwie ausgezeichnet ist, so liegt keine Ursache dazu vor, dass irgend eine Richtung vorhanden sei, welche dadurch an Bedeutung hervorrage, dass sie für verschiedene physikalische Erscheinungen gleichzeitig von Wichtigkeit sei. Da nach dem S. 217 aufgestellten Grundgesetze die physikalischen Hauptrichtungen nur von der Symmetrie des Krystalls abhängen, eine solche aber hier nach keiner Ebene vorhanden ist, so sind jene Richtungen für die verschiedenen physikalischen Erscheinungen nicht nothwendig die gleichen. In der That ist dies auch nicht der Fall. Die drei auf einander senkrechten Richtungen der grössten, kleinsten und mittleren Lichtgeschwindigkeit für eine bestimmte Farbe stehen in keiner gesetzmässigen Beziehung zu denen des Minimum oder Maximum der Cohäsion, oder den Richtungen der grössten, kleinsten und mittleren Ausdehnung durch die Wärme u. s. w. Keine jener drei Richtungen fällt ferner zusammen für die verschiedenen Farben, alle drei Hauptschwingungsrichtungen sind dispergirt, und zwar ohne alle Regelmässigkeit.

Bei dem Mangel jeder geometrischen Symmetrieebene liegt bei den in Rede stehenden Krystallen im Allgemeinen gar kein Grund dafür vor, irgend eine bestimmte Wahl der Axenebenen für besonders empfehlenswerth zu halten, d. h. wir stehen hier vor dem allgemeinen Fall der Bestimmung eines Krystalls, welchen wir bereits S. 193 f. behandelt haben*). Betrachten

---

*) Selbstverständlich wird es sich empfehlen, die Axenebenen so auszuwählen, dass, auf sie bezogen, die Indices der übrigen Flächen möglichst einfache werden; dies ist besonders häufig der Fall bei den Spaltungsflächen, daher es üblich ist, solche durch die Molecularstructur ausgezeichnete Flächen zu Axenebenen zu nehmen. Handelt es sich aber darum, die Krystallform eines asymmetrischen Körpers mit derjenigen einer chemisch verwandten Substanz zu vergleichen, so hat man derselben diejenige Stellung zu ertheilen, in welcher die Beziehungen zu dem zweiten Körper auch in den Elementen ersichtlich werden.

wir nunmehr ein bestimmtes Beispiel, den in Fig. 552 dargestellten asymmetrischen Krystall, so ist demnach das Verfahren das folgende: Wir wählen drei beliebige Flächen des Krystalls, z. B. *a*. *b* und *c*, zu Axenebenen, eine beliebige vierte, z. B. *o*, welche nicht in der Zone zweier von jenen liegt, zur Grundform, und berechnen auf die in S. 197 angegebene Art die Elemente des Krystalls, so erhalten wir drei schiefe Axenwinkel (daher der gewöhnlich gebrauchte Name »triklinisches System«) und ein selbstverständlich irrationales Parameterverhältniss. Von den Kanten der drei zu Axenebenen gewählten Flächen, d. h. den drei Axen, stellen wir eine (*a* : *b* Fig. 552), mit *c* bezeichnet, vertical und nennen sie Verticalaxe, von den beiden anderen lassen wir diejenige, welcher der kürzere Parameter der Grundform entspricht (*b* : *c*), nach vorn abwärts geneigt, auf den Beobachter zulaufen und nennen sie Brachydiagonale (*a*); endlich wird die dritte querlaufende Axe *b* (= der Kante *a* : *c*) die Makrodiagonale genannt. Bei der Aufzählung der Elemente eines Krystalls sollen die Axenwinkel α, β, γ stets im rechten oberen vorderen Oktanten angeführt werden.

Nach der so getroffenen Wahl der Axen und einer Grundform sind wir im Stande, alle übrigen Flächen des Krystalls einfach durch ihre Indices oder durch Zeichen, deren Ableitung eine ganz analoge ist, wie in den beiden vorhergehenden Systemen, zu bezeichnen, wie es im folgenden § geschehen soll.

§. 104. Ableitung und Bezeichnung der asymmetrischen I

Die zur Grundform gewählte, alle drei Axen in endlichem Abstand schneide Fläche *o* ist offenbar das Analogon einer Pyramidenfläche des rho Systems mit ihrer parallelen Gegenfläche, also eines Viertels einer rhombi Pyramide; man nennt daher diese, sowie jede die drei Axen in endli Abstand schneidende Form eine Tetartopyramide. Die in Rede stel primäre Tetartopyramide wird bezeichnet, wenn sie vorn oben re liegt, mit $P' = \{111\}$, wenn sie vorn oben links: $'P = \{1\bar{1}1\}$, vorn rechts (dies ist in Fig. 552 der Fall): $P, = \{11\bar{1}\}$, vorn unten links hinten oben rechts ihre Gegenfläche): $,P = \{1\bar{1}\bar{1}\}$. Man kann nun an flächenreichen asymmetrischen Krystall leicht die Wahl der Axen so tr dass alle vier Tetartopyramiden mit denselben Parametern daran auftr es würde aber hier, wie im vorigen System betreffs der zusammen Hemipyramiden, eine völlig falsche Vorstellung erwecken, wollte dieser Combination als von der »vollständigen asymmetrischen Py sprechen; eine solche existirt nicht, sondern jene vier Formen st einander in keiner anderen Beziehung, als zu den übrigen Kr gleiche Indices erhielten sie nur durch eine ganz willkürliche Stellu Krystalls; bei jeder anderen, die ebenso berechtigt ist, erw als verschieden, so dass man z. B. ebenso gut drei davon zu Ax und eine zur Grundform nehmen kann.

Alle anderen, etwa noch vorkommenden Tetartopyramiden lassen sich nun ganz ebenso, wie im rhombischen System, von einer primären ableiten und dem entsprechend bezeichnen. Es wird also solche geben, welche eine verticale Ableitungsreihe bilden und, wenn sie vorn oben rechts liegen, folgendes allgemeine Zeichen haben:

$$mP' = \{hhl\} \quad (h > l;$$

oder:

$$\frac{1}{m}P' = \{hhl\}, \quad (h < l,$$

wenn sie dagegen vorn oben links gelegen sind:

$$m'P = \{hhl\} \quad (h > l,$$

oder:

$$\frac{1}{m}'P = \{hhl\} \quad (h < l,$$

u. s. f.

Von jedem Gliede einer solchen Reihe wird eine makrodiagonale Reihe von Tetartopyramiden abzuleiten sein, deren allgemeines Zeichen:

$$m\bar{P}'n = \{hkl\} \quad (h > k)$$

u. s. f.

Ebenso eine brachydiagonale Ableitungsreihe*) mit der Bezeichnung

$$m\breve{P}'n = \{hkl\} \quad (h < k$$

u. s. f.

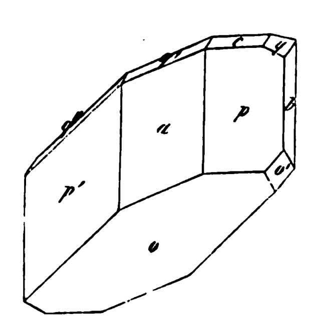


Fig. 552.

Die Endglieder dieser drei Arten von Reihen sind, wie im rhombischen System, Formen, welche einer Axe parallel laufen, da sie aber nur aus einseitig vorhandenen Flächen, je mit ihrer Gegenfläche, bestehen, können sie nicht »Prismen« und »Domen« benannt werden, sondern müssen die Namen »Hemiprismen« und »Hemidomen« erhalten.

Die primären Verticalreihen der Tetartopyramiden führen zum primären rechten Hemiprisma (*p* Fig. 552):

$$\infty P' = \{110\}$$

als gemeinschaftliches Grenzglied der rechten oberen und unteren Tetartopyramiden, deren gegenseitige Combinationskante von jenem abgestumpft wird, sowie zum linken primären Hemiprisma (*p'* Fig. 552):

$$\infty'P = \{1\bar{1}0\}$$

als gemeinsames Grenzglied der beiden Reihen der linken oberen und unteren Tetartopyramiden.

---

* Einer solchen gehört z. B. die Fläche $o' = \{13\bar{1}\}$ Fig. 552 an.

Abgeleitete verticale Hemiprismen entstehen durch rationale Vervielfältigung der Makrodiagonale:

$$\infty \bar{P}'_{,} n, \ \infty '_{,}\bar{P} n = \{h k 0\}, \ \{h \bar{k} 0\} \ (h > k)$$

oder durch eine solche der Brachydiagonale:

$$\infty \breve{P}'_{,} n, \ \infty '_{,}\breve{P} n = \{h k 0\}, \ \{h \bar{k} 0\} \ (h < k).$$

Die ersteren sind die Endglieder der Verticalreihen abgeleiteter Tetartopyramiden, welche n fache Makrodiagonale von derjenigen der Grundform besitzen, sich jedoch durch den Coëfficienten der Verticalaxe unterscheiden; die letzteren die Endglieder ähnlicher Reihen, deren einzelne Formen eine n fache Brachydiagonale im Vergleich mit den primären haben und sich durch die Verticalaxe unterscheiden. Es versteht sich von selbst, dass alle Prismen in der Zone der beiden verticalen Axenebenen *a*, *b* Fig. 552 liegen.

Eine makrodiagonale Ableitungsreihe von Tetartopyramiden führt bei wachsendem n endlich, wenn $n = \infty$ wird, auf ein vorderes makrodiagonales Hemidoma, allgemein:

$$m'\bar{P}'\infty = \{h 0 l\}$$

als gemeinschaftliche Grenzform der oberen rechten und oberen linken Flächen, oder zu einem hinteren makrodiagonalen Hemidoma

$$m{,}\bar{P}{,}\infty = \{\bar{h} 0 l\},$$

welches zugleich die letzte Form der Reihe der unteren rechten und unteren linken (vorn) Tetartopyramiden bildet. Das erstere liegt am Krystall vorn oben und hinten unten, es würde die stumpfe Kante der beiden Axenebenen *a*, *c* Fig. 552 abstumpfen; das letztere vorn unten und hinten oben, als Abstumpfung der scharfen Kante *a* : *c*. Die Endglieder derjenigen Reihen, welche sich von den primären Tetartopyramiden herleiten, sind das vordere primäre makrodiagonale Hemidoma

$$'\bar{P}'\infty = \{1 0 1\}$$

und das entsprechende hintere:

$$,\bar{P}{,}\infty = \{\bar{1} 0 1\}.$$

In ganz derselben Weise liefern die brachydiagonalen Ableitungsreihen brachydiagonale Hemidomen; diese sind entweder rechte (rechts oben und links unten die Kante der Axenebenen *b* und *c* abstumpfend), deren Zeichen

$$m{,}\breve{P}'\infty = \{0 k l\},$$

die gemeinschaftlichen Grenzformen der Reihen der rechten oberen und linken unteren Tetartopyramiden; oder es sind linke (links oben und rechts unten in der Zone *b c* liegend),

$$m'\breve{P}{,}\infty = \{0 \bar{k} l\},$$

die Grenzformen, sowohl der Reihen der linken oberen, als auch derjenigen der rechten unteren Tetartopyramiden.

Schliesslich können die drei Axenebenen selbst, als Grenzglieder von Ableitungsreihen aufgefasst, bezeichnet werden, und zwar die der Brachy-

diagonale und Verticale parallele b Fig. 552, das **Brachypinakoid**, als ein solches der brachydiagonalen Hemidomen, für den Fall $m = \infty$, also

$$\infty \breve{P} \infty = \{010\};$$

ferner die der Makrodiagonale und Verticale parallele Axenebene a Fig. 552, das **Makropinakoid**, als das entsprechende Grenzglied der Reihe der makrodiagonalen Hemidomen:

$$\infty \bar{P} \infty = \{100\}$$

und endlich die dritte, nach vorn und seitlich geneigte Ebene, welche den Axen a und b parallel ist, die **Basis** c Fig. 552, als untere Grenze der verticalen Reihe aller Tetartopyramiden ($m = 0$):

$$oP = \{001\}.$$

Das Schema, welches alle diese Ableitungsreihen versinnlichen würde, ist vollkommen identisch mit dem S. 437 gegebenen des rhombischen Systems, wenn die Accente hinzugefügt werden, welche angeben, in welchem Oktanten die Tetartopyramiden etc. liegen. Es gelten für die darin zusammengestellten Formen auch die gleichen Zonenverhältnisse, wie leicht zu übersehen: es liegen also z. B. alle verticalen Hemiprismen in der Zone des Makro- und des Brachypinakoids, alle makrodiagonalen Hemidomen in derjenigen des Makropinakoids und der Basis, endlich liegen alle brachydiagonalen Hemidomen mit parallelen Kanten zwischen $\{001\}$ und $\{010\}$. Diese drei Zonen entsprechen also ganz den drei prismatischen Zonen des rhombischen Systems, nur mit dem Unterschiede, dass die Zonenaxen sich schiefwinkelig, bei letzterem rechtwinkelig durchschneiden.

Dagegen hat hier der Zusammenhang der Ableitungsreihen und die darauf gegründete Bezeichnung der Formen eine weit geringere Bedeutung, als in den vorhergehenden Systemen, weil dieselbe ja nur von der willkürlich gewählten Stellung des Krystalles abhängt und man daher jede Fläche nach Belieben zur Tetartopyramide oder zum Hemiprisma, zum Hemidoma, zur Basis u. s. f. machen kann, indem man eine andere Aufstellung wählt.

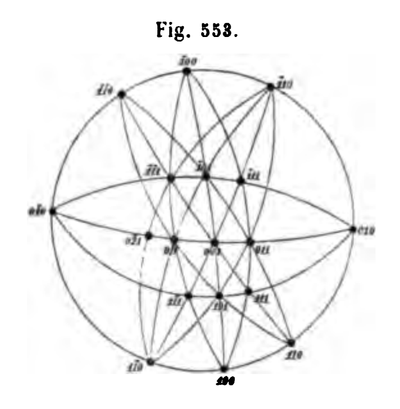
Endlich muss noch bemerkt werden, dass die **Naumann**'schen und **Miller**'schen Zeichen in der oben angegebenen Weise nur dann einander entsprechen, wenn die Brachydiagonale, d. h. die **kürzere** der beiden nicht verticalen Axen, als a-Axe gewählt wurde, wie es gewöhnlich geschieht. Erfordert jedoch die Vergleichung eines Körpers mit einem andern, chemisch verwandten, eine andere Orientirung, bei welcher die Makrodiagonale nach vorn gerichtet ist, so erhalten selbstverständlich die makrodiagonalen Hemidomen die Zeichen $m,\bar{P}'\infty = \{0kl\}$ u. s. f. (vergl. auch S. 481).

§. 105. **Projection und Berechnung der asymmetrischen Formen.** Die Projection eines asymmetrischen Krystalls stellt den allgemeinsten Fall einer solchen dar, welcher bereits S. 209 f. seine eingehende Behandlung erfahren hat. Es ist üblich, wie es bei dem l. c. gewählten Beispiele geschah, als Ebene des Grundkreises die zur Verticalaxe senkrechte Ebene

zu wählen, in welcher sich somit die Pole von {100}, {010} und die sämmtlicher Hemiprismen befinden. Nachdem diese mit Hülfe ihrer Winkel in den Grundkreis eingetragen sind, verfährt man weiter in der S. 210 angegebenen Weise.

Die Berechnung asymmetrischer Formen soll nun an der Hand der Projection Fig. 553, welche einem ähnlichen, aber noch flächenreicheren Krystall als Fig. 552 entspricht, erläutert werden.

Fig. 553.



Sind zur Herleitung der Elemente gemessen die drei Winkel zwischen den Axenebenen und diejenigen der Grundform zu zweien derselben, so gestaltet sich die bereits S. 197 angegebene Rechnung auf Grund der Projection folgendermaassen: gegeben die drei Bögen 100 : 010, 100 : 001, 010 : 001; in dem von diesen gebildeten sphärischen Dreiecke werden die drei Winkel berechnet; der an 100 anliegende ist der ebene Winkel auf dem Makropinakoid {100}, unter welchen die Kanten (100) : (001) und (100) : (010) einander schneiden, d. h. der Axenwinkel α, der an 010 anliegende ist $= \beta$, der an 001 anliegende $= \gamma$. Ferner sind gegeben die Bögen 111 : 100 und 111 : 010, welche mit 100 : 010 ein Dreieck einschliessen, dessen Seiten bekannt sind. Der an 100 anliegende Winkel desselben ist der ebene Winkel in {100}, unter welchem die Kanten (100) : (111) und (010) : (100) einander schneiden; letzterer gehört aber dem ebenen Dreieck an, welches von der ersteren dieser beiden Kanten und den Axenlängen b und c gebildet wird; da der Winkel zwischen den letzteren $= \alpha$ bekannt ist, so erfolgt die Berechnung des Axenverhältnisses $b : c$ nach der ebenen Trigonometrie. Aus dem Winkel zwischen den Bögen 010 : 100 und 010 : 111, d. i. dem ebenen Winkel der Kanten der gleichnamigen Flächen auf dem Brachypinakoid {010}, welchen man in demselben sphärischen Dreiecke wie vorher berechnet, ergiebt sich in der gleichen Weise das Axenverhältniss $a : c$. Es leuchtet ein, dass man bei der Berechnung ganz analog zu verfahren hat, wenn statt {111} eine andere Tetartopyramide, z. B. {$\bar{1}$11}, gemessen worden ist, indem man statt des Dreiecks 100, 010, 001 alsdann das von den Bögen $\bar{1}$00 : 010, $\bar{1}$00 : 001, 010 : 001 gebildete zu benutzen hat.

Je nach den an einem Krystall ausgebildeten Flächen ist jedoch oft zur Berechnung der Elemente ein anderer Weg einzuschlagen, und sollen im Folgenden die wichtigsten hierbei vorkommenden Fälle betrachtet werden.

Sind die drei zu Axenebenen gewählten Flächen ausgebildet und ihre Winkel gemessen, so dass die Berechnung von α, β, γ in der bereits angegebenen Weise erfolgen kann, ist aber keine Fläche vorhanden, welche gegen alle drei Axen geneigt ist, d. h. keine Tetartopyramide, so ist die

vollständige Bestimmung der Elemente nur möglich, wenn wenigstens noch zwei Flächen auftreten, welche verschiedenen Axen parallel gehen. Seien z. B. die Formen {110} und {011} ausgebildet und die Winkel (100) : (110) und (010) : (011) gemessen. Im Dreieck 100, 110, 001 sind alsdann bekannt die Seiten 100 : 110, 100 : 001 und der zwischenliegende Winkel = $180^0 - \alpha$; man berechne den Winkel an 001, d. i. den ebenen Winkel der Kanten 001 : 100 und 001 : 110 auf der Fläche (001); damit sind nunmehr in dem ebenen Dreieck, welches von den Axenlängen a und b und der Kante (001) : (110) gebildet wird, die drei Winkel bekannt, so dass das Axenverhältniss $a : b$ berechnet werden kann. Dasselbe Dreieck 100, 110, 001 dient auch zur Berechnung des Bogens 001 : 110, welcher als Controlwinkel zu benutzen ist. Ganz ebenso hat man in dem Dreieck 100, 010, 011 aus den Seiten 010 : 011 und 010 : 100 nebst dem zwischenliegenden Winkel den der Seite 010 : 011 gegenüberliegenden Winkel zu berechnen, welcher das Axenverhältniss $b : c$ liefert, während der Bogen 100 : 011 einen Controlwinkel bildet.

Es seien in einer Zone, deren gemeinsame Kantenrichtung man als diejenige einer Krystallaxe zu nehmen beabsichtigt, drei Flächen ausgebildet, von denen nur eine als Axenebene betrachtet werden soll, z. B. in der Zone der verticalen Formen nur {010}, {110} und {1$\bar{1}$0}. Alsdann ist zunächst die Lage der nicht ausgebildeten Fläche (100), d. h. die Richtung der Makrodiagonale aufzusuchen, welche dadurch bestimmt ist, dass (110) und (1$\bar{1}$0) auf ihr rechts und links gleiche Strecken abschneiden. Dazu ist nöthig die Kenntniss der Bögen 010 : 001, 110 : 001 und 1$\bar{1}$0 : 001, von denen aber nur zwei gemessen zu sein brauchen, da der dritte sich aus ihnen durch Rechnung ergiebt; mit Hülfe dieser und der ebenfalls bekannten Bögen 1$\bar{1}$0 : 110 und 110 : 010 ist man im Stande, in den beiden Dreiecken 1$\bar{1}$0, 001, 110 und 110, 001, 010 die beiden jedesmal an 001 anliegenden Winkel zu berechnen, von denen der des ersten Dreiecks gleich dem Supplement des ebenen Winkels, unter welchem die Kanten 001 : 1$\bar{1}$0 und 001 : 110 auf der Basis einander schneiden, der des zweiten Dreiecks gleich dem ebenen Winkel zwischen den Kanten 001 : 110 und 001 : 010. Diese beiden ebenen Winkel entsprechen aber den in Fig. 507 S. 483 mit $v + w$ und mit w bezeichneten, wenn wir Axe a statt c und b statt a einsetzen: die a. a. O. gegebene Formel liefert also den zwischen den beiden Axen liegenden Winkel, im vorliegenden Falle γ, da es sich um die Axenebene ab handelt. Der Axenwinkel γ entspricht aber im Dreieck 100, 001, 010 dem an 001 anliegenden Winkel, und da in diesem Dreieck noch der Bogen 001 : 010 und der an 010 anliegende Winkel bekannt sind, so ist nunmehr die Berechnung aller drei Axenwinkel α, β, γ möglich. Damit und mit dem Axenverhältniss $a : b$ kennt man folglich vier von den fünf Elementen des Krystalls und zwar auf Grund von vier Fundamentalwinkeln, nämlich zwei Winkeln zwischen den Flächen der prismatischen Zone und der Neigung zweier derselben zu {001} diejenige der dritten kann zwar auch zur Con-

trole gemessen worden sein, da sie aber von den beiden andern abhängig ist, so muss der aus letzteren berechnete Werth benutzt werden, weil man sonst einen, wenn auch bei gut messbaren Krystallen nicht bedeutenden Widerspruch in die Rechnung einführen würde). Zur Bestimmung der fünften Unbekannten unter den Elementen des Krystalls bedarf es nur noch einer Messung, sobald in einer der Zonen, welche durch die bisher benutzten Flächen bestimmt sind, eine weitere Fläche auftritt, z. B. (111) oder (011): durch die Lage des Pols derselben sind, wie aus der Projection unmittelbar zu ersehen, stets sphärische Dreiecke bestimmt, welche nach einer der vorher angegebenen Methoden die Berechnung des Axenverhältnisses $c : b$ gestatten.

Liegt eine Form vor, wie die des unterschwefligsauren Calcium Fig. 556, in welcher $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $p' = \{1\bar{1}0\}$, $q = \{011\}$, so kann die Vergleichung mit einem andern Körper es erfordern, dass c nicht als $\{001\}$, wie es S. 529 geschehen, sondern als $\{0\bar{1}1\}$ aufgefasst werde. Zur vollständigen Bestimmung des Krystalls bedarf es ausser der Messung der beiden Zonen [010, 110, $1\bar{1}0$] und [010, 011, $0\bar{1}1$] (vergl. Fig. 553), welche je zwei von einander unabhängige Winkelwerthe liefern, noch der Kenntniss der Neigung irgend einer Fläche der einen Zone zu irgend einer der andern, z. B. (011) : (110). Legt man diese der Rechnung zu Grunde, so sind die Seiten des Dreiecks 010, 011, 110 bekannt, daher dessen Winkel an 010 berechnet werden kann (derselbe ist zugleich der Axenwinkel β); mit Hülfe dieses Winkels kann man in dem Dreieck 010, 011, $1\bar{1}0$ den an 011 anliegenden Winkel, sowie in dem Dreieck 010, $0\bar{1}1$, 110 den an $0\bar{1}1$ anliegenden herleiten und kennt nun, da die gemeinschaftliche Fläche der Zonen [011, $1\bar{1}0$] und [$0\bar{1}1$, 110] das Zeichen (101) hat, in dem sphärischen Dreiecke 011, $0\bar{1}1$, 101 die Seite 011 : $0\bar{1}1$ und die beiden anliegenden Winkel, ist also im Stande, den Bogen 011 : 101 zu berechnen. Genau ebenso verfährt man bei der Berechnung des Bogens 011 : $\bar{1}01$, indem man von den Dreiecken 010, 011, $\bar{1}\bar{1}0$ und 010, $0\bar{1}1$, $\bar{1}10$ ausgeht. Sind diese beiden Rechnungen ausgeführt, so kennt man in dem Dreieck 101, 011, $\bar{1}01$ die beiden Seiten 101 : 011 und 011 : $\bar{1}01$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, kann also den an 101 anliegenden spitzen Winkel berechnen, welcher zugleich dem Dreieck 001, 101, 011 angehört; in dem letzteren sind demnach nun die Seite 101 : 011 und die beiden anliegenden Winkel bekannt, folglich auch der Winkel an 001, d. h. der Axenwinkel γ, überhaupt die Lage des Poles 001, aus welcher sich alle weiter nöthigen Stücke leicht ergeben.

Anmerk. Die im letzten Abschnitte auseinandergesetzte Methode der Berechnung liefert zwar zugleich eine Reihe von Winkeln am Krystall, deren Berechnung oft wünschenswerth, ist aber eine ziemlich umständliche. Weit kürzer erfolgt die Bestimmung der Lage der Basis {001} an der Combination {010} {110} {$1\bar{1}0$} {011} {$0\bar{1}1$} mittelst der S. 213 angedeuteten, auf der Rationalität des anharmonischen Verhältnisses beruhenden Methode, daher die betreffende Formel hier mitgetheilt werden möge:

Seien $P(hkl)$, $P'(h'k'l')$, $R(uvw)$, $Q(efg)$ vier in der angegebenen Reihenfolge in einer Zone liegende Flächen, und seien die Winkel PP' und PQ bekannt, so ist der Winkel PR gegeben durch die Formel:

$$\text{tang}\,(PR - \tfrac{1}{2}PP') = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}PP'\ \text{tang}\,(45^\circ + \delta)$$

worin

$$\text{tang}\,\delta = m\,\frac{\sin P'Q}{\sin PQ}$$

und m gleich dem Product von:

$$\frac{fl - gk}{fl' - gk'} = \frac{gh - el}{gh' - el'} = \frac{ek - fh}{ek' - fh'}$$

mit:

$$\frac{vl' - wk'}{vl - wk} = \frac{wh' - ul'}{wh - ul} = \frac{uk' - vh'}{uk - vh}.$$

Für die beiden Glieder des Productes m sind hier jedesmal drei identische Verhältnisse angegeben, weil häufig eines derselben gleich Null wird. In dem vorstehend betrachteten Falle z. B., in welchem $P = (010)$, $P' = (011)$, $Q = (0\bar{1}1)$ und R, dessen Position gesucht wird, $= (001)$, giebt jedesmal nur der erste der drei Ausdrücke einen von Null verschiedenen Werth, und zwar wird hier $m = \frac{1}{2}$. Für diesen speciellen Werth von m nimmt aber die allgemeine Formel folgende einfache Form an, in welcher $P\bar{Q} = 180^\circ - PQ$:

$$\text{tang}\,PR = \frac{2\sin P\bar{Q}\sin PP'}{\sin(P\bar{Q} - PP')}$$

d. h. in dem vorliegenden Falle:

$$\text{tang}\,(010:001) = \frac{2\sin(0\bar{1}0:0\bar{1}1)\sin(010:011)}{\sin(0\bar{1}0:0\bar{1}1 - 010:011)}.$$

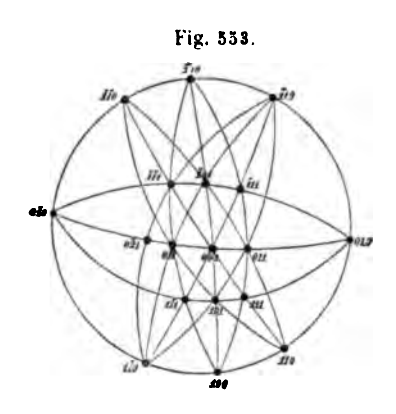
Diese Formel zur Bestimmung von PR, welche mit der S. 483 für den Fall eines monosymmetrischen Krystalls entwickelten identisch ist, kann statt des S. 521 angegebenen Weges dazu dienen, in der Combination der verticalen Flächen (010) (110) (1$\bar{1}$0) aus den Winkeln zwischen letzteren (010):(100), d. i. die Lage des Makropinakoids, zu berechnen, und ist wegen der weit grösseren Kürze der Berechnung vorzuziehen, wenn eine Berechnung der Bögen 110 : 001 und 1$\bar{1}$0 : 001 nicht nöthig ist; wird diese aber zur Vergleichung mit den beobachteten Werthen doch ausgeführt, so sind beide Methoden offenbar gleichbedeutend, da sie aus denselben Rechnungsoperationen, nur in anderer Reihenfolge, bestehen.

Verhältnissmässig einfacher, als oben auseinandergesetzt, gestaltet sich die Berechnung der Elemente des in Fig. 556 dargestellten Krystalls, wenn q und c als {111} resp. {1$\bar{1}$1} betrachtet werden. Man kann alsdann folgende Winkel der Rechnung zu Grunde legen (vergl. Fig. 553): 010 : 110, 110 : 1$\bar{1}$0, 010 : 111, 111 : 1$\bar{1}$1, 111 : 110, und daraus zunächst den Bogen 1$\bar{1}$1 : 1$\bar{1}$0 in dem Dreieck 1$\bar{1}$1, 1$\bar{1}$0, 010, in welchem zwei Seiten bekannt und der eingeschlossene Winkel leicht mittelst des Dreiecks 111, 110, 010 herzuleiten ist, berechnen, — oder den Winkel (1$\bar{1}$1) : (1$\bar{1}$0) an Stelle von 111 : (1$\bar{1}$1) zum Fundamentalwerth nehmen und den letzteren aus den übrigen ableiten, indem man 1$\bar{1}$1 : 010 im Dreieck 1$\bar{1}$1, 1$\bar{1}$0, 010 berechnet. Jedenfalls ist man im Stande, auf einem dieser Wege die Winkel zu bestimmen, welche die Zonenkreise 110 : 111 und 1$\bar{1}$0 : 1$\bar{1}$1 mit dem Grundkreise bilden; diese schneiden aber einander im Pole der am Krystall nicht ausgebildeten Basis, also ist durch das Dreieck 110, 1$\bar{1}$0, 001, in welchem

die Seite 110 : $1\bar{1}0$ und die beiden anliegenden Winkel bekannt sind, die Lage von 001 bestimmt und dadurch die vorliegende Aufgabe auf die früher behandelten zurückgeführt.

Ist endlich eine Combination von vier Formen gegeben, welche als $\{111\}$, $\{1\bar{1}1\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{1}\bar{1}1\}$ betrachtet werden sollen, ein Fall, wie ihn Fig. 561 unter Weglassung von *c* darstellen würde, so ist klar, dass die Ebenen, welche durch je zwei Kanten dieser Combination bestimmt sind, den Axenebenen entsprechen, z. B. die Ebene durch o' : $'o$ und $o_,$: $_,o$ dem Brachypinakoid u. s. w. Der Gang der Rechnung erläutert sich an der Projection Fig. 553 folgendermaassen: Gemessen sind die vier Seiten des sphärischen Vierecks 111, $1\bar{1}1$, $\bar{1}\bar{1}1$, $\bar{1}11$ und eine der Diagonalen desselben z. B. 111 : $\bar{1}\bar{1}1$; mittelst der beiden Dreiecke 111, $\bar{1}11$, $\bar{1}\bar{1}1$ und 111, $1\bar{1}1$, $\bar{1}\bar{1}1$ ist es nun leicht, alle Winkel des sphärischen Vierecks und aus 111 : $1\bar{1}1$, 111 : $\bar{1}11$ und dem zwischenliegenden Winkel auch die andere Diagonale $1\bar{1}1$: $\bar{1}11$, welche als Controlwinkel dient, zu berechnen. Denkt man sich die Bögen $\bar{1}11$: 111 und $\bar{1}\bar{1}1$: $1\bar{1}1$ nach vorn und die Bögen $1\bar{1}1$: 111 und $\bar{1}\bar{1}1$: $\bar{1}11$ nach rechts verlängert, so schneiden dieselben einander in 100, resp. 010; es können also die Dreiecke 100, 111, $1\bar{1}1$ und 010, 111, $\bar{1}11$ vollständig berechnet werden, da je zwei ihrer Winkel die Supplemente von Winkeln des vorerwähnten sphärischen Vierecks und die zwischenliegenden Seiten solche des letzteren sind. Aus den Bögen 111 : 100 und 111 : 010 nebst dem eingeschlossenen Winkel folgt aber 100 : 010, und da die Lage von 001 auf dem Zonenkreise 111 : $\bar{1}\bar{1}1$ leicht zu berechnen ist (z. B. durch Dreieck 111, $1\bar{1}1$, 001, in welchem die Seite 111 : $1\bar{1}1$ und die beiden anliegenden Winkel bekannt sind), so kann man ferner aus 001 : 111, 111 : 100 und dem zwischenliegenden Winkel den Bogen 100 : 001 und aus diesem, aus 100 : 010 und dem eingeschlossenen Winkel endlich den Bogen 010 : 001 ableiten, wodurch die Winkel der drei Axenebenen bestimmt sind und nunmehr mittelst zweier der drei Bögen 111 : 001, 111 : 010 und 111 : 100 das Axenverhältniss nach der S. 520 angegebenen Methode berechnet werden kann.

Fig. 553.



Bei der Rückberechnung der Winkel aus dem Parameterverhältniss ist für jeden einzelnen Fall der umgekehrte Weg einzuschlagen. Die den Fundamentalwinkeln entsprechenden Werthe der Controlwinkel ergeben sich zwar der Mehrzahl nach, wie aus den bisher angeführten Fällen hervorgeht, bereits bei der Berechnung der Elemente, aber es ist wünschenswerth, einige derselben direct aus den Elementen neu herzuleiten, um nicht nur die Genauigkeit der Winkelmessungen, sondern auch die Richtigkeit der

Berechnung der Elemente selbst einer vollständigen Controle zu unterziehen. Handelt es sich um die Berechnung des Winkels zwischen zwei beliebigen abgeleiteten Tetartopyramiden x und y, welcher Fall oben noch nicht betrachtet wurde, so berechnet man (analog dem S. 443 auseinandergesetzten Verfahren) die Winkel beider zu zwei Axenebenen, z. B. die Bögen x : 100, x : 010, y : 100, y : 010 und aus diesen und dem Bogen 100 : 010 jedesmal den an 100 anliegenden Winkel der beiden Dreiecke 100, 010, x und 100, 010, y; die Differenz dieser beiden Winkel gehört als Winkel dem Dreieck 100, x, y an, in welchem die beiden anliegenden Seiten bekannt sind, daher der gegenüberliegende Bogen x y, d. i. die gesuchte Grösse, berechnet werden kann.

§. 106. **Die physikalischen Eigenschaften der asymmetrischen Krystalle.** Für die Elasticität asymmetrischer Krystalle liegen bisher noch keine Bestimmungen vor; nach Analogie der übrigen Eigenschaften muss die Elasticitätsfläche eines hierher gehörigen Krystalls eine höchst complicirte und gänzlich unsymmetrische Gestalt haben. Von der Cohäsion erfahren wir durch die Spaltbarkeit, in welchen Richtungen dieselbe ein Minimum hat; es ist nun wegen des Mangels einer Symmetrieebene a priori anzunehmen, dass niemals nach zwei Richtungen eine gleichartige Spaltbarkeit existirt, weil zu keinem Minimum der Cohäsion ein zweites gleichwerthiges durch die Symmetrie gefordert wird. Dies ist nun auch nicht der Fall: die asymmetrischen Krystalle sind nach einer oder mehreren Richtungen spaltbar, welche natürlich stets krystallonomisch möglichen Flächen entsprechen, aber in letzterem Falle ist die Vollkommenheit derselben eine verschiedene. Welche Art von Flächen die Spaltungsebenen sind, ob Axenebenen, Hemiprismen o. a., ist natürlich hier ohne alle theoretische Bedeutung, da dies von der willkürlichen Wahl der Axen abhängt. Genaue Härtebestimmungen, durch welche man das Gesetz der Aenderung der Cohäsion mit der Richtung innerhalb einer Krystallfläche erkennen würde, sind bisher nicht angestellt worden, während gerade in dieses System ein Mineral, der Cyanit oder Disthen (s. S. 529), gehört, dessen Härte auf einer und derselben Fläche, derjenigen der deutlichsten Spaltbarkeit, den grössten Unterschied zeigt, welchen man kennt.

Gehen wir über zu den optischen Eigenschaften, so ist bereits bemerkt worden, dass die Richtungen der Hauptschwingungsaxen weder für die verschiedenen Wellenlängen des Lichtes zusammenfallen, noch in irgend einer Beziehung zu denjenigen der Krystallkanten stehen*). Im Allgemeinen ist also keine Krystallfläche einem optischen Hauptschnitt für eine bestimmte Farbe parallel, und in Folge dessen sind die Schwingungsrichtungen auf einer Platte, sie möge, von welchem Paar paralleler Flächen es auch sei, gebildet werden, schief gegen die Kanten gelegen und bilden mit diesen verschiedene Winkel, wenn die Farbe des einfallenden Lichtes eine andere ist. Es ist

*) S. S. 487 Anmerk.

klar, dass man die Lage der Hauptschwingungsrichtungen für eine bestimmte Wellenlänge finden kann, wenn man für eine Anzahl paralleler Flächenpaare jene Winkel mittelst des Stauroskopes bestimmt, denn die so gefundenen Schwingungsrichtungen für eine Krystallfläche sind parallel der grossen und kleinen Axe derjenigen Ellipse, welche der Durchschnitt der optischen Elasticitätsfläche mit jener Krystallfläche bildet. Grailich hat in seinem Werke: »Krystallographisch-optische Untersuchungen, Wien und Olmütz, 1858« S. 26 f. die Formeln hergeleitet, durch welche man aus den Schwingungsrichtungen der einzelnen Krystallflächenpaare die Lage der Axen der optischen Elasticitätsfläche in Bezug auf die krystallographischen Axen berechnen kann; es stellt sich hierbei heraus, dass es nöthig ist, die Schwingungsrichtungen für wenigstens vier Paare paralleler Krystallflächen festzustellen. Da dieser Weg ein sehr umständlicher ist und eine grössere Zahl sehr vollkommener Krystallplatten erfordert, ist er bisher bei den wenigen optisch untersuchten asymmetrischen Krystallen nicht eingeschlagen worden; man hat sich mit der Bestimmung der Schwingungsrichtungen für ein oder zwei vorherrschend ausgebildete Flächenpaare begnügt und hat die Lage der Elasticitätsaxen indirect, durch Aufsuchung der Lage der optischen Axen, bestimmt, bei manchen nur das letztere. Dies kann in der Weise geschehen, dass man den Krystall durch verschiedene Flächenpaare hindurch im convergenten Lichte betrachtet; ist er einigermaassen flächenreich, so wird man leicht zwei Flächenpaare finden, durch welche hindurch das Bild je einer Axe (bei sehr kleinem Axenwinkel auch beide durch ein einziges) noch innerhalb des Gesichtsfeldes gelangt. Berücksichtigt man nun die dabei stattgefundene Brechung, so kann man aus der bekannten Lage der Flächen (am besten durch eine sphärische Projection) ungefähr diejenige der ersten Mittellinie bestimmen; alsdann schleift man senkrecht zu dieser eine Platte, welche natürlich noch nicht genau richtig ist, daher sie das Interferenzbild nicht centrisch im Gesichtsfelde zeigt, bestimmt die Grösse und Richtung der Abweichung und corrigirt danach den Schliff der Platte, bis die Axenbilder genau gleich weit von der Mitte des Gesichtsfeldes abstehen und ihre Verbindungslinie durch diese geht; da nunmehr die Platte senkrecht zur ersten Mittellinie ist, so giebt die Messung der Winkel, welche sie mit den übrig gebliebenen natürlichen Krystallflächen bildet, die Lage jener, und da sie einem optischen Hauptschnitt parallel ist, so sind ihre beiden Schwingungsrichtungen zugleich die zweite und die dritte Hauptschwingungsrichtung; sie liefert also die Richtung der drei optischen Elasticitätsaxen und die Grösse des Axenwinkels. Da die richtige Lage der Schliffläche indess doch nur angenähert erreicht wird, so ist die hierdurch zu erzielende Genauigkeit keine sehr grosse. Ebenso genau, wie durch vollständige stauroskopische Untersuchung, lässt sich die Lage der drei Hauptschwingungsrichtungen auf folgende Art feststellen, wie sie z. B. beim Kupfervitriol (s. S. 528 im folgenden §) angewendet worden ist: Wenn man durch zwei oder mehr natürliche oder künstliche Flächen, welche ziemlich kleine Winkel mit

einander bilden, dieselbe optische Axe im Gesichtsfelde des Polarisationsapparates erblickt, so kann man den scheinbaren Winkel, welchen sie mit der Normalen jeder dieser Flächen bildet, nach einer in der III. Abtheilung zu erläuternden Methode messen; da aber die einer optischen Axe parallelen Strahlen den mittleren Brechungsexponenten β besitzen (vergl. S. 117), so kann man aus jenen scheinbaren die wahren Winkel berechnen, wenn man β kennt. Ein Prisma, welches zu der Bestimmung dieser Constante genügt, ist nun aber bei nur ungefähren Kenntniss der Lage der optischen Axenebene leicht anzufertigen; seine brechende Kante muss normal zur Ebene der optischen Axen sein, was man mit genügender Genauigkeit dadurch controliren kann, dass dasselbe, wenn es auf den Träger des Polarisationsinstrumentes so (mit Wachs) befestigt wird, dass einmal eine, einmal die andere Fläche oben horizontal, und die brechende Kante dem im Gesichtsfelde befindlichen Verticalstrich des Mikrometers parallel ist, jedesmal eine optische Axe nach rechts oder links abgelenkt, aber im Horizontalstrich liegend, zeigt. Hat man nun auf diese Art die wahren Winkel bestimmt, welche die Richtung der einen optischen Axe mit mehreren Krystallflächen einschliesst, so ist dadurch ihre Lage gegen die Krystallaxen gegeben. Bestimmt man nun in genau derselben Weise diejenige der anderen optischen Axe, so folgt daraus durch Rechnung die Lage der Axenebene und der ersten Mittellinie, d. h. der drei Hauptschwingungsrichtungen. Selbstverständlich ist bei dieser, wie bei der stauroskopischen Untersuchung, die Bestimmung derselben für homogene Farben getrennt vorzunehmen, da sie alle drei dispergirt sind.

Aus dieser Dispersion der drei Hauptschwingungsrichtungen folgt nun die Beschaffenheit des Interferenzbildes, welches eine senkrecht zur ersten Mittellinie (für mittlere Farben) geschnittene Platte im weissen Lichte zeigt, und welches in Fig. 12 und 13 der Tafel dargestellt ist. Dieses Bild, von einer Platte von doppeltchromsaurem Kalium (s. Beispiele), deren Körperfarbe gelbroth ist, hervorgerufen, zeigt Verschiedenheit der Farbenvertheilung in den Ringen nach allen Richtungen, so dass es nach keiner Seite hin Symmetrie aufweist.

Was die thermischen Verhältnisse betrifft, so ist namentlich die Ausdehnung durch die Wärme von Interesse. Nach Analogie mit allen andern physikalischen Eigenschaften ist von vorn herein anzunehmen, dass die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Ausdehnung in keiner gesetzmässigen Beziehung mit krystallographischen Richtungen stehen, ja dass ihre Lage für verschiedene Intervalle der Temperatur sogar von der letzteren abhängig und daher variabel sein könne. Da demnach von den natürlichen Flächen eines Krystalls keine einzige genau einer thermischen Axe parallel ist, so muss jede derselben ihre Lage gegen die drei thermischen Axen ändern; d. h. alle Winkel eines asymmetrischen Krystalls sind veränderlich mit der Temperatur desselben. Dies ist in der That bestätigt worden durch die Untersuchung des Axinit und

Anorthit (Beckenkamp, Zeitschr. f. Kryst. 5, 436), welche zugleich gelehrt hat, dass die thermischen Axen des letzteren mit der Temperatur eine sehr beträchtliche Aenderung ihrer Lage erfahren können.

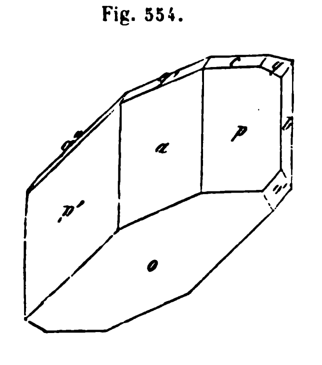
Dass die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Wärmeleitungsfähigkeit unsymmetrisch in den Krystallen gelegen sind, beweist der Umstand, dass die grosse und kleine Axe der isothermen Fläche, welche durch das Sénarmont'sche Experiment erhalten wird, stets schief gegen die Kanten der untersuchten Fläche stehen, wobei es natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass der Winkel dieser Schiefe auch einen sehr kleinen Werth annehmen kann. Dies ist z. B. beim Kupfervitriol der Fall, indem nach Pape's Untersuchung (s. Zeitschr. f. Kryst. 1, 507) dessen grösste Wärmeleitungsfähigkeit nahe parallel der Verticalaxe der Krystalle ist.

So zeigen uns die asymmetrischen Krystalle den höchsten Grad von geometrischer und physikalischer Unregelmässigkeit, welchen ein homogener krystallisirter Körper überhaupt haben kann. Während zwar für eine einzelne physikalische Eigenschaft, z. B. das Verhalten gegen Licht von einer bestimmten Farbe, vollkommene Symmetrie herrscht, indem die Lichtgeschwindigkeit nach drei auf einander senkrechten Richtungen ihren resp. grössten, mittleren und kleinsten Werth erreicht und sich dazwischen symmetrisch ändert, so sind doch diese drei physikalischen Hauptrichtungen verschiedene für jede einzelne physikalische Eigenschaft, und die Lage derselben für die eine steht in keiner nachweisbaren Beziehung zu derjenigen jener drei Richtungen für eine andere Eigenschaft.

§. 107. Beispiele asymmetrisch krystallisirender Substanzen.

Schwefelsaures Kupfer (Kupfervitriol) = $Cu\,SO^4 + 5H^2O$. $a:b:c = 0,5656 : 1 : 0,5499$; $\alpha = 97^\circ 39'$, $\beta = 106^\circ 49'$, $\gamma = 77^\circ 37'$ Kupffer.

Fig. 554.



Combination Fig. 554: $p = \{110\}$, $p' = \{1\bar{1}0\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{0\bar{1}1\}$, $q'' = \{0\bar{2}1\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $o' = \{13\bar{1}\}$. Durch Bestimmung des Winkels der optischen Axen mit mehreren Krystallflächen ergiebt sich, dass die erste Mittellinie im rechten hinteren Oktanten oben liegt und die zu derselben (für mittlere Farben) normale Ebene mit $\{111\}$ $72^\circ 53'$, mit $\{100\}$ $81^\circ 31'$, mit $\{120\}$ (Abstumpfung der Kante $p : b$) $43^\circ 41'$ einschliesst; $2V = 56^\circ 2'$; Dispersion $\varrho < v$, deutlich; Doppelbrechung —. Hauptbrechungsquotienten für die D-Linie:

$$\alpha = 1,5156, \quad \beta = 1,5394, \quad \gamma = 1,5464..$$

(Pape, Poggend. Ann. Ergänzungsbd. VI, 35).

Schwefelsaures Mangan (Manganvitriol) $= MnSO^4 + 5H^2O$, hat dieselbe Krystallform wie das vorige Salz und ganz ähnliche Winkel.

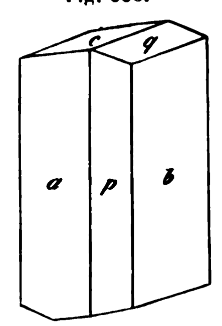


Fig. 555.

Dichromsaures Kalium $= K^2Cr^2O^7$. $a:b:c = 0{,}5575 : 1 : 0{,}5511$; $\alpha = 82^0\ 0'$, $\beta = 90^0\ 51'$, $\gamma = 83^0\ 47'$ Schabus. Combination Fig. 555: $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $p = \{110\}$. Spaltbarkeit $\{010\}$ sehr vollkommen, $\{100\}$ und $\{001\}$ deutlich. Optische Axenebene ungefähr senkrecht zur Brachydiagonale, durch die Spaltungsflächen $\{010\}$ ist eine Axe fast in der Mitte des Gesichtsfeldes sichtbar (über die optischen Eigenschaften solcher Platten s. E. Kalkowsky, Zeitschr. f. Kryst. 9, 488). Doppelbrechung +.

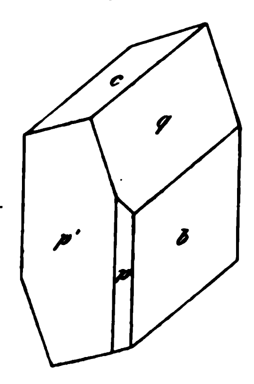


Fig. 556.

Unterschwefligsaures Calcium $= CaS^2O^3 + 6H^2O$. $a:b:c = 0{,}7828 : 1 : 1{,}5170$: $\alpha = 72^0\ 30'$, $\beta = 98^0\ 34'$, $\gamma = 92^0\ 46'$. Combination Fig. 556: $c = \{001\}$, $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $p' = \{1\bar{1}0\}$, $q = \{011\}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen. (V. von Zepharovich, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 45, 499.) Nach v. Kobell stehen die Schwingungsrichtungen auf allen Flächen schief gegen die Kanten; weitere optische Untersuchung fehlt.

Disthen (Cyanit) $= Al^2SiO^5$. $a:b:c = 0{,}8994 : 1 : 0{,}7090$; $\alpha = 90^0\ 5^1/_2{}'$, $\beta = 101^0\ 2'$, $\gamma = 105^0\ 44^1/_2{}'$ G. vom Rath. Prismatische Krystalle der Combination: $\{100\}$, $\{010\}$, $\{110\}$, $\{210\}$, $\{1\bar{1}0\}$, am Ende gewöhnlich nur $\{001\}$ matt. Interessant durch seine mannigfaltigen Zwillingsbildungen: ausser symmetrischen Verwachsungen nach $\{100\}$ finden sich, nach derselben Fläche verwachsen, unsymmetrische Zwillinge, deren Zwillingsaxe entweder die Verticale oder die Makrodiagonale ist. Spaltbarkeit nach $\{100\}$ vollkommen (auf dieser Fläche Minimum der Härte parallel der Verticalaxe, Maximum senkrecht dazu), nach $\{010\}$ weniger vollkommen; Gleitfläche $\{001\}$ (s. M. Bauer, Zeitschr. d. d. geol. Gesellsch. 1878, 30, 283). Optische Axenebene c. 30^0 zur Verticalaxe geneigt; 1. Mittellinie nahe senkrecht zu $\{100\}$; Doppelbrechung —.

Mikroklin (asymmetrischer Kalifeldspath) $= KAlSi^3O^8$. $a:b:c = 0{,}65 : 1 : 0{,}55$; $\alpha = 90^1/_3{}^0$, $\beta = 116^0$, $\gamma = 90^0$ circa Des Cloizeaux. Form gleich der des Orthoklas (Fig. 534, S. 510), zu welchem das Mineral im Verhältniss der Dimorphie steht, nur mit dem Unterschiede, dass die Winkel der rechten und linken Seite um kleine Grössen verschieden sind. Grösser sind diese Differenzen von der monosymmetrischen Form bei dem mit dem Mikroklin isomorphen folgenden Körper.

Albit (Natronfeldspath) = $Na\,Al\,Si^3O^8$. $a:b:c = 0{,}6333 : 1 : 0{,}5575$; $\alpha = 85^0 56'$, $\beta = 116^0 28'$, $\gamma = 88^0 8'$ Des Cloizeaux. Combination Fig. 557:

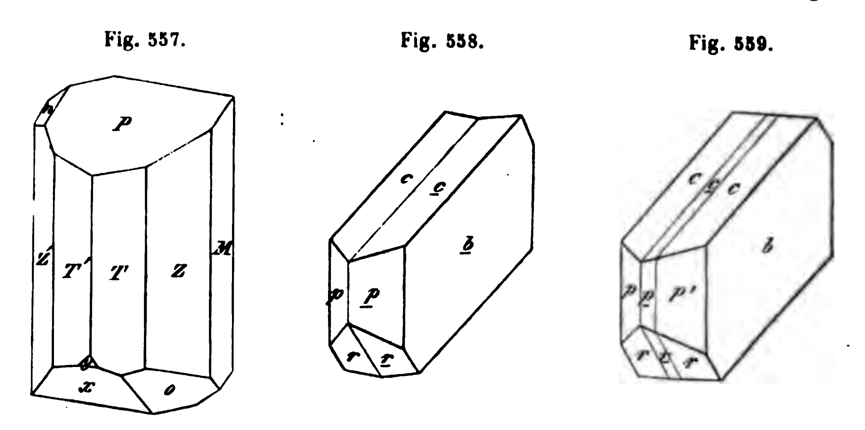


Fig. 557. Fig. 558. Fig. 559.

$P = \{001\}$, $M = \{010\}$, $T = \{110\}$, $T' = \{1\bar{1}0\}$, $z = \{130\}$, $z'\,\{1\bar{3}0\}$, $x = \{\bar{1}01\}$, $y = \{\bar{2}01\}$, $n = \{0\bar{2}1\}$, $o = \{11\bar{1}\}$. Gewöhnlich Zwillinge nach $\{010\}$, s. Fig. 558, worin $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $p' = \{110\}$ (in der Figur auf der Rückseite), $p = \{1\bar{1}0\}$, $r = \{10\bar{1}\}$; da der Winkel bc ungefähr $= 86^0$, so bilden die Flächen $c\underline{c}$ oben einen ein-, unten einen ausspringenden Winkel von 8^0; ebenso ist der Winkel $r\underline{r}$ oben an der Rückseite einspringend, unten vorn ausspringend. Die untere Hälfte, wenn sie allein ausgebildet ist, erscheint demnach vollständig, wie diejenige eines einfachen monosymmetrischen Krystalls, bestehend aus dem Prisma $p'\underline{p}'$, dessen Winkel in diesem Falle sehr ähnlich demjenigen $p\underline{p}$, den beiden stumpfen Hemipyramiden $c\underline{c}$ und $r\underline{r}$, mit der Symmetrieebene b. Nur durch die optische Untersuchung kann ein solcher Krystall mit Sicherheit als ein Zwilling erkannt werden, indem man nämlich, etwa durch eine senkrecht zu b geschliffene Platte, constatirt, dass seine beiden Hälften ungleich liegende Schwingungsrichtungen besitzen. Häufig kommt an solchen Krystallen eine Wiederholung der Zwillingsbildung vor, indem sich, wie in Fig. 559, an den zweiten Krystall ein dritter in Zwillingsstellung anlegt, oder, da dieser dem ersten parallel sein muss, indem eine Zwillingslamelle eingelagert erscheint. Folgt auf den dritten ein vierter, parallel dem zweiten, auf diesen ein fünfter Krystall, parallel dem ersten und dritten u. s. f., so entsteht eine polysynthetische Verwachsung (Viellingskrystall), welche man aber auch betrachten kann als einen Krystall, in welchen eine grosse Zahl unter einander paralleler, also demselben Krystall angehöriger Lamellen in Zwillingsstellung eingewachsen sind. Eine Spaltungsfläche von Natronfeldspath nach $c = \{001\}$ zeigt alsdann eine Streifung, parallel der Kante $c:b$, hervorgebracht durch das Alterniren der nach der einen und der anderen Seite geneigten Flächen c und $\underline{c}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen, $\{010\}$ deutlich. Die optische Axenebene schneidet $\{010\}$ in

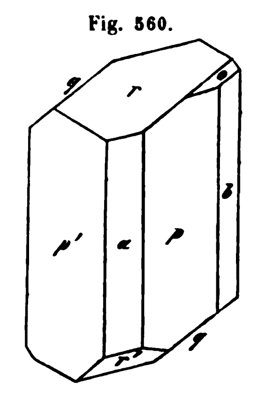
einer Geraden, welche 20° mit der Brachydiagonalen, 96½° mit der Verticalen macht; eine Fläche, normal zur ersten Mittellinie, ist auf die schärfere Kante (001 : 010) aufgesetzt und bildet mit {001} 78½°, mit {010} 15°, mit {110} 55°. Axenwinkel in Oel:

$2H =$	80°	39′	roth,
	81	35	grün,
	81	59	blau.

Starke geneigte Dispersion, eine andere nicht deutlich erkennbar. (Des Cloizeaux, Ann. d. chim. phys. 1875.)

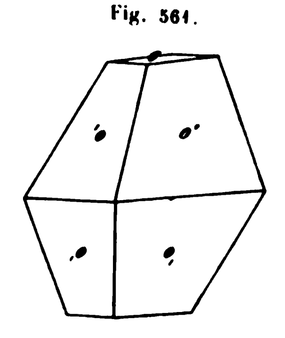
Traubensäure $= C^4H^6O^6 + 2H^2O$. $a : b : c = 0,8017 : 1 : 0,4911$; $\alpha = 75° 16'$, $\beta = 97° 59'$, $\gamma = 120° 22'$ De la Provostaye. Combination Fig. 560: $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $p' = \{1\bar{1}0\}$, $r = \{101\}$, $o = \{111\}$, $r' = \{10\bar{1}\}$, $q = \{0\bar{1}1\}$. Optische Axenebene fast genau parallel p; die erste Mittellinie also nahe in dieser Ebene, bildet (für mittlere Farben) mit der Verticalen 47° im unteren linken Oktanten vorn. Für mittlere Farben ist: $2V = 67° 10'$, $2E = 115° 10'$, $\beta = 1,526$; geringe Dispersion der Axen $\varrho > v$; von derjenigen der Mittellinien die geneigte zu erkennen (Groth, Poggend. Ann. 135, 648).

Fig. 560.



Bibromparanitrophenol $= C^6H^2.OH.NO^2.Br^2$. $a : b : c = 0,6114 : 1 : 1,8241$. $\alpha = 82° 36'$, $\beta = 90° 45'$, $\gamma = 89° 21'$ Arzruni. Combination Fig. 561: $c = \{001\}$, $'o = \{1\bar{1}1\}$, $o' = \{111\}$, $,o = \{\bar{1}11\}$, $o, = \{11\bar{1}\}$, d. h. alle vier Tetartopyramiden, deren Parameter die gleichen sind; die Combination ähnelt geometrisch ausserordentlich einer monosymmetrischen, in welcher das Makropinakoid Symmetrieebene wäre, und auch in optischer Beziehung ist dieselbe Aehnlichkeit vorhanden; die optische Axenebene steht nämlich fast genau senkrecht zu {100} und die erste Mittellinie fällt nahe in dieselbe Ebene; letztere ist fast normal auf dem Hemidoma {0$\bar{2}$1}, nach welchem die Krystalle sehr vollkommen spalten.

Fig. 561.



$2E =$	46°	40′	*Li*-Linie
	50	57	*Na*- -
	55	0	*Tl*- -

Ausser dieser starken Dispersion der Axen ist noch eine gekreuzte Dispersion der Mittellinien deutlich wahrzunehmen (Arzruni, Poggend. Ann. 152, 286).

Bijodparanitrophenol = $C^6H^2.OH.NO^2.J^2$. $a:b:c = 0{,}6155:1:1{,}6825$; $\alpha = 86^\circ\,43'$, $\beta = 90^\circ\,29'$, $\gamma = 92^\circ\,47'$ Arzruni. Combination = dem vorigen, nur statt ,*o* und *o'* häufiger flachere Tetartopyramiden, z. B. {112}, {113}. Spaltbarkeit {010} vollkommen. Die erste Mittellinie, für die verschiedenen Farben bis $1\frac{1}{2}^\circ$ verschieden, steht nahe senkrecht zu jener Spaltungsfläche; dagegen divergiren die zweiten Mittellinien für die verschiedenen Wellenlängen ausserordentlich; die Axenebene bildet nämlich mit der Brachydiagonale

$45\frac{1}{2}^\circ$	für die	*Li*-Linie	$(2E = 59\frac{1}{2}^\circ)$
37	- -	*Na*- -	$(- = 55\frac{1}{2})$
23	- -	*Tl*- -	$(- = 52\ )$

Darnach würden die Axenebenen für das äusserste Roth und das äusserste Violett des Spectrums um etwa 70° gegen einander gedreht sein, die stärkste bisher beobachtete Dispersion der Axenebenen. Dieselbe bewirkt folgende Erscheinung: bringt man eine Spaltungsplatte, welche also nahe senkrecht zur ersten Mittellinie ist, in paralleles polarisirtes Licht, so erscheint sie bei keiner Drehung dunkel; denn wenn ihre Hauptschwingungsrichtungen für Roth den gekreuzten Nicols parallel sind, so bilden diejenigen der andern Farben so grosse Winkel mit jenen, dass sie zum Theil im Maximum ihrer Intensität sind; es erscheint also stets eine Interferenzfarbe, welche gerade so wechselt, wie die Farbe einer Quarzplatte beim Drehen des Analysators (Arzruni, a. a. O.).

Anhang.

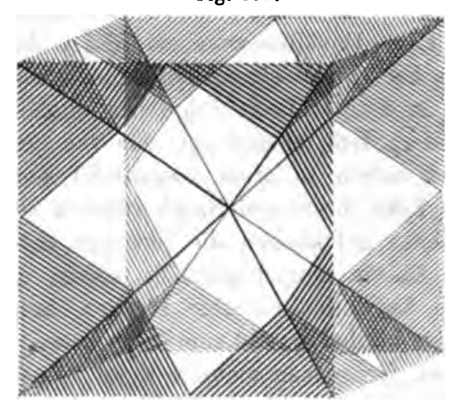
§. 108. **Unvollkommenheiten in der Ausbildung der Krystalle.** Es ist bereits in der Einleitung dieser Abtheilung, S. 190, als Ursache für die unvollständige Ausbildung eines Krystalles die mechanische Hinderung seines Weiterwachsens durch einen festen fremden Körper, z. B. einen anderen Krystall derselben Substanz, angeführt worden. Indess können auch ringsum ausgebildete Krystalle eine unvollständige Ausbildung zeigen, indem nämlich von den Flächen einer einfachen Form ein Theil fehlt, und somit solche zu Kanten zusammentreffen, welche andernfalls nicht benachbart wären. Ist eine derartige Unvollzähligkeit der Flächen eine regelmässige, d. h. tritt sie an allen Krystallen der Substanz nach demselben Gesetze auf, so fällt sie unter die Begriffe der Hemiëdrie oder der Hemimorphie. Diese beiden Erscheinungen können nicht als Unvollkommenheiten der Ausbildung betrachtet werden, da sie ganz bestimmten Gesetzen gehorchen und gewissen Körpern eigen sind, daher sie nicht von äussern Umständen bei der Bildung des Krystalls, sondern von seiner chemischen Natur selbst abhängen. Eine Unvollkommenheit bildet die Unvollzähligkeit der Flächen einer einfachen Form vielmehr nur dann, wenn sie eine unregelmässige ist; diese ist eine einfache Folge des ungleichen Abstandes der Flächen von einander; denn ebenso gut, wie von den acht Flächen eines regulären Oktaëders sieben so gross ausgebildet sein können, dass die achte die dreikantige Ecke ihrer drei Nachbarflächen als äusserst kleines Dreieck abstumpft, ebenso gut können die letzteren einander direct schneiden, und die achte Fläche einmal gänzlich fehlen; es kommt daher sehr häufig vor, dass an Krystallen einzelne Flächen ihrer Formen nicht ausgebildet sind, ohne dass hierbei irgend eine Gesetzmässigkeit obwaltet, wie man sogleich erkennt, wenn man mehrere Krystalle mit einander vergleicht. Dieser Art von Unvollkommenheit, welche offenbar nur durch äussere Verhältnisse bedingt wird, reihen sich noch folgende an:

Unterbrochene Raumerfüllung: Die Krystalle, welche sich z. B. aus einer Lösung absetzen, vergrössern sich je nach den äusseren Umständen in sehr verschiedener Weise; nur wenn diese so beschaffen sind, dass eine sehr allmähliche und ungestörte Volumvermehrung stattfindet,

wachsen die Krystalle gleichartig auf allen Flächen und zeigen eine vollkommene Erfüllung desjenigen Raumes, welcher durch ihre Kanten und Ecken gegeben ist. Bei schneller Ausscheidung dagegen, z. B. bei der Abkühlung einer heiss gesättigten Lösung, vergrössern sich die zuerst entstandenen kleinen und meist sehr einfachen Kryställchen häufig in der Weise, dass sich nach gewissen, krystallographisch bestimmten Richtungen (Wachsthumsrichtungen) reihenförmig kleine Krystalle derselben Form in paralleler Stellung anlagern, und so sternförmige Aggregate (Wachsthumsformen, Krystallgerippe) entstehen, welche bei fortgesetztem Wachsthum durch Ausfüllung der Zwischenräume zwischen den Strahlen die Form eines grösseren Krystalls nachahmen, von welchem jedoch nur Ecken und Kanten angedeutet, statt der Flächen treppenförmige Vertiefungen vorhanden sind. Als Beispiel eines solchen Krystallskeletts möge das in Fig. 562 dargestellte des regulären Chlorkaliums dienen, wie es sich beim Erkalten einer in höherer Temperatur gesättigten Lösung des Salzes bildet. Das Wachsthum der zuerst ausgeschiedenen kleinen Hexaëder findet vorwiegend statt an den Würfelecken, indem sich an diese neue kleine Hexaëder anlagern und so Balken bilden, welche den trigonalen Axen, d. i. den Normalen der Oktaëderflächen parallel gehen. Von den Würfelecken der diese Balken zusammensetzenden Kryställchen gehen dann von Neuem Ansätze nach denselben vier Richtungen aus, von denen jedesmal eine dem betreffenden Balken selbst entspricht, die drei anderen Anlass zur Bildung eines Balkensystems 2. Ordnung geben, wie es für das gleiche Beispiel in Fig. 563 schematisch dargestellt ist. Bestehen die einzelnen Kryställchen jedoch aus Oktaëdern, wie es beim Chlorammonium der Fall ist, so findet das Wachsthum besonders nach den Hauptaxen statt und es entstehen rechtwinkelig einander kreuzende, aus kleinen an einander gereihten Oktaëdern bestehende Stäbchen (hierher gehören auch die sogenannten »gestrickten« Formen der Metalle). Aendern sich während des schnellen Wachsthums die Verhältnisse der

Fig. 562.

Fig. 563.



Lösung derart, dass die sich ausscheidenden Krystalle eine andere Form annehmen, so ändern sich auch die Wachsthumsrichtungen. Diese Erscheinungen wurden an den erwähnten regulär krystallisirenden Salzen zuerst eingehend beobachtet und beschrieben von A. Knop, Molekularconstitution und Wachsthum der Krystalle, Leipzig 1867.

Eine Erklärung für die Entstehung der Krystallskelette wurde geliefert durch O. Lehmann in seiner Arbeit »über das Wachsthum der Krystalle« Zeitschr. f. Kryst. 1, 453. Durch Untersuchung zahlreicher Substanzen mit Hülfe des »Krystallisationsmikroskop's« (s. III. Abth.) wurde nachgewiesen, dass die Formen um so unregelmässiger werden nicht nur, je schneller das Wachsthum vor sich geht, sondern auch je zäher die Lösung und je schwieriger die Substanz löslich ist, dass ferner die Richtung intensivsten Wachsthums stets den Stellen stärkster Zuspitzung des Krystalls entspricht, also von der speciellen Ausbildung desselben abhängt. Dieses Verhalten ist lediglich Folge der Concentrationsverhältnisse in der den Krystall umgebenden Lösung; in derselben entsteht nämlich, wie Lehmann nachgewiesen hat, durch das Wachsthum eine Verdünnung, welche durch Diffusion wieder ausgeglichen werden muss. Findet das Wachsthum nun sehr schnell statt, oder wird die Diffusion durch Zähigkeit der Lösung verringert, so muss die Abscheidung der Substanz vorwiegend da erfolgen, wo der Diffusionsstrom am stärksten, d. h. die Unterschiede der Concentration auf kleine Abstände am grössten sind. Dies ist aber der Fall an den Krystallecken, denn die um den Krystall gedachten Flächen, auf denen gleiche Concentration herrscht, drängen sich an den Spitzen des Krystalls am dichtesten zusammen, da sie in grösserer Entfernung von demselben die Gestalt einer Kugel annehmen (auf einer solchen ist nämlich die Concentration nicht mehr merklich verschieden von derjenigen, welche noch weiter vom Krystalle entfernt herrscht).

Wenn ein auf die beschriebene Weise entstandenes Krystallgerippe durch Mangel an Stoff am Weiterwachsen gehindert wird, so resultirt demnach ein den Raum nur unvollkommen ausfüllender Krystall; findet aber in den späteren Stadien ein allmählicher weiterer Stoffabsatz statt, so füllt sich nach und nach der Raum zwischen den zuerst gebildeten Krystallreihen durch parallele Schichten aus, so dass schliesslich, wenn die Bildung ohne Störung lange genug dauert, ein vollkommen geschlossen ausgebildeter Krystall zu Stande kommen kann. Sehr häufig bleiben jedoch noch Theile der Flächen nicht ausgefüllt: andererseits setzen sich oft die ausfüllenden Schichten nicht unmittelbar auf einander, so dass Hohlräume der mannigfaltigsten Gestalt, oft erfüllt mit der Lösung, aus welcher sich der Krystall ausschied, entstehen. Diese Unvollkommenheiten der Raumerfüllung eines Krystalls, zu welchen auch der Einschluss eines festen fremden Körpers gehört, um welchen derselbe herumgewachsen ist, bilden namentlich Hindernisse der Untersuchung seiner physikalischen Eigenschaften. So muss man sich zur Bestimmung der optischen Erscheinungen nur solcher Krystalle

bedienen, welche möglichst frei von Poren und Einschlüssen sind, da an diesen eine Reflexion des Lichtes stattfindet und daher der Krystall, wenn er deren sehr viele enthält, vollkommen trübe wird. Ferner kommt es vor, dass Substanzen zahlreiche Einschlüsse eines fremden Körpers in paralleler Stellung enthalten, welche in ihrer Gesammtheit optische Erscheinungen hervorbringen, welche man leicht fälschlicherweise als solche des umschliessenden Krystalls auffassen kann. Endlich kann die Zusammensetzung eines Krystalls aus parallelen Schichten, welche einander nicht vollkommen berühren, zu der irrthümlichen Annahme einer Spaltbarkeit nach jenen Flächen verleiten, welche man dadurch prüfen muss, dass man untersucht, ob die Trennung parallel jenen Ebenen zu Stande kommt, an welcher Stelle des Krystalls dieselbe auch versucht werde, während sie bei einer schaligen Zusammensetzung natürlich nur in den Ebenen zu erhalten ist, in welchen bereits durch den Bildungsprocess eine Trennung vorhanden war.

Eine andere nicht minder erwähnenswerthe Unvollkommenheit der Ausbildung der Krystalle, als die unvollständige Raumerfüllung, beruht ebenfalls auf der Art ihres Wachsthums. Wenn ein solches stattfindet, so sind es offenbar die von den Oberflächentheilchen des bereits gebildeten Krystalls ausgehenden Kräfte, welche bewirken, dass sich nur Theilchen in paralleler Stellung anlagern. Würden diese Molekularkräfte ganz allein hierbei in Betracht kommen, so würden alle folgenden Theilchen in strengster Genauigkeit parallele Anordnung haben mit den zuerst abgesetzten und das Ganze, gleichviel ob es ein geschlossener Krystall oder ein Aggregat solcher, ein Krystallgerippe, ist, physikalisch als ein einziger Krystall zu betrachten sein. Dem ist aber nicht so; vielmehr wirken stets, wenn auch in geringem Grade, andere Kräfte mit auf die sich absetzenden Theilchen ein und beeinflussen ihre Lagerung, es entstehen Anomalien der Structur des Krystalls. Dieselben Ursachen, welche zur Bildung der Krystallskelette führen, bedingen auch diese Anomalien, indem sie mehr oder weniger die parallele Anlagerung der Theilchen hindern. Viscosität der Flüssigkeit und Schwerlöslichkeit der Substanz erschweren die Vereinigung der Moleküle, begünstigen also die Uebersättigung der Lösung und erweitern dadurch die Wirkungssphäre des Krystalls; aus je grösserer Entfernung aber die Krystallmoleküle auf die Krystalloberfläche auftreffen, mit um so grösserer Geschwindigkeit gelangen sie an, um so weniger werden sie vorher sich parallel richten können. Da die Richtungen der grössten Zuschärfung zugleich die des stärksten Wachsthums sind, so kann hier die Anomalie bis zu pinselartiger Verzweigung gehen, verbunden mit einseitiger Krümmung, wenn die Attraction durch unsymmetrische Endflächen einseitig vermehrt ist, wobei im Falle einer viscosen Lösung auch der Widerstand in Betracht kommt, welchen diese dem Wachsthum des Krystalls entgegensetzt. O. Lehmann (Zeitschr. f. Kryst. 1, 479) hat diese Erklärung durch zahlreiche Beobachtungen bei mikroskopischer Krystallbildung gestützt und die

mannigfachsten Fälle der Krümmung, Verzweigung und Sphärolithenbildung (s. S. 131) der Krystalle, namentlich durch Zähigkeit der angewandten Lösung, hervorgebracht.

Wirken, wie es fast niemals ganz ausgeschlossen ist, noch andere Kräfte, als die Anziehung der bereits abgelagerten Theilchen, bei dem Wachsthum eines Krystalls, so kann die Molekularanordnung einer später sich ausscheidenden Schicht des Krystalls nicht absolut parallel derjenigen der zuerst gebildeten sein, die einer dritten nicht parallel der zweiten u. s. f.; je länger demnach der Krystall zu seiner Bildung gebraucht hat, d. h. je grösser er ist, desto geringere Gewähr ist dafür geboten, dass er aus genau parallelen Theilen zusammengesetzt sei. Ausserdem ist jedoch die Fähigkeit, derartigen störenden Einflüssen zu folgen, bei den verschiedenen Substanzen eine sehr verschiedene, so dass es solche giebt, von denen kein Krystall von einiger Grösse gefunden werden kann, der nicht in seinen Theilen deutliche Abweichungen vom Parallelismus zeigte. Die Folgen einer solchen Zusammensetzung aus nicht genau parallelen Theilen sind z. B. Unregelmässigkeiten der optischen Erscheinungen, deren Erklärung nach Obigem ohne Schwierigkeit ist; einaxige Krystalle zeigen eine Trennung der Kreuzesarme des Interferenzbildes, als ob sie zweiaxig, mit sehr kleinem Axenwinkel, wären (Beryll, Zirkon u. A.); zweiaxige zeigen Differenzen des Winkels der optischen Axen, gemessen an verschiedenen Stellen einer Platte. Selbstverständlich werden durch die in Rede stehende Unvollkommenheit auch die Krystallwinkel beeinflusst. Dies geschieht in zweierlei Art: Entweder endigen mehrere nicht parallele Theile des Krystalls an einer Fläche; dann gehören deren einzelne Theile verschiedenen derselben an, haben also nicht dieselbe Richtung, die Krystallfläche erscheint gebrochen und liefert somit mehrere Einstellungen bei der Messung mit dem Reflexionsgoniometer, welche nicht selten um mehr als 1° differiren; man würde nun im Allgemeinen den Winkel zwischen zwei Flächen erheblich falsch finden, wenn man für beide die mittlere jener Einstellungen als richtig annähme, mit grösster Wahrscheinlichkeit dagegen den wahren Werth, wenn man diejenigen Flächentheile benutzt, welche unmittelbar in der Kante an einander grenzen. Die Zusammensetzung kann aber auch in der Weise stattfinden, dass der zuletzt gebildete Theil des Krystalls den ganzen Raum einer Fläche einnimmt, so dass diese vollkommen eben erscheint, aber in ihrer Richtung jener einzelnen Schicht, nicht dem übrigen Krystall, entspricht. Hierdurch entstehen zuweilen bei scheinbar vorzüglich ausgebildeten Krystallen Differenzen derjenigen Kantenwinkel, welche gleich gross sein sollen, von ziemlich beträchtlicher Grösse. Da diese Abweichungen durch zufällige äussere Störungen veranlasst sind, welche mit dem Wesen des Krystalls in keinem gesetzmässigen Zusammenhange stehen, so muss durch solche ein bestimmter Krystallwinkel einmal zu gross, ein anderes Mal zu klein ausfallen, d. h. man wird sehr nahe den wahren Winkel, welchen die betreffende Kante

haben würde, wenn der Krystall in allen seinen Theilen parallel wäre, erhalten, wenn man dieselbe an einer genügend grossen Zahl von Krystallen derselben Substanz der Messung unterzieht und alsdann das arithmetische Mittel aus den Resultaten nimmt. Dies ist in der That um so mehr der Fall, je grösser die Zahl der gemessenen Krystalle ist, wie durch folgende Erfahrung bewiesen wird: wählt man zur Untersuchung nur möglichst kleine Krystalle, welche nach S. 537 am meisten Gewähr für sehr nahe parallele Zusammensetzung darbieten, so wird man oft einen oder den anderen finden, der innerhalb der Beobachtungsfehler wirklich so zusammengesetzt ist, dessen Flächen also sehr genau die richtige Lage haben; die Winkel dieses Krystalls findet man alsdann um so genauer mit dem Mittel der übrigen übereinstimmend, je mehr der letzteren gemessen wurden.

Es wurde ebenfalls bereits in der Einleitung S. 190 erwähnt, dass sehr gewöhnlich die Krystalle dadurch unvollkommen ausgebildet erscheinen, dass ein fremder Körper, meist ein Krystall derselben Substanz, aber in anderer Lage, ihr Wachsthum nach gewissen Seiten verhindert hat, nach denen alsdann die Krystallflächen fehlen. Gewöhnlich beginnt eine Krystallisation an vielen Stellen ungefähr zu gleicher Zeit und unabhängig von einander, daher die einzelnen zuerst entstehenden kleinen Krystalle nicht einander parallel, sondern in den mannigfachsten Lagen sich befinden. Ist nun Material genug vorhanden, um ihr Wachsthum bis zur gegenseitigen Berührung zu ermöglichen, so verwachsen schliesslich dieselben mit einander, aber meist nach ganz unregelmässigen Flächen, da natürlich die zuletzt sich absetzenden und den Zwischenraum ausfüllenden Moleküle von denen beider Krystalle angezogen werden, also eine regelmässige Lage nicht mehr einnehmen können, es sei denn, dass nur noch der eine Krystall fortwachse, in welchem Falle seine Begrenzung gegen den andern gleichsam einen Abdruck von dessen Form darstellt. So entstehen Aggregate unregelmässig mit einander verwachsener Krystalle, in welchen sich nur an den Stellen, wo es an Stoff zur Krystallbildung fehlte, Hohlräume befinden, deren Wände aus theilweise frei hereinragenden Krystallen bestehen (Drusenräume). Von manchen Substanzen, namentlich in der Natur gefundenen, hat man nur solche, nicht ringsum ausgebildete Krystalle zur Verfügung, und hat also aus diesen, gleichsam Fragmenten, auf die vollständige Form zu schliessen. Dies ist eine leichte Aufgabe, wenn dieselben so frei ausgebildet sind, dass sie nur mit einem Ende festgewachsen erscheinen; sie kann aber sehr schwierig werden, wenn an jedem Krystall nur zwei oder drei von vielen daran auftretenden Flächen entwickelt sind, und daher, wegen der verschiedenen Lage der andern Krystalle, diese andere Flächen aufweisen, so dass die Zurückführung der einen auf die anderen oft ohne Zuhülfenahme der optischen Eigenschaften eine Unmöglichkeit wird.

Oft sind Krystalle zwar ringsum ausgebildet und gestatten doch nur eine unvollständige Bestimmung ihrer Form; wenn sie nämlich nach

gewissen Richtungen so geringe Dimensionen besitzen, dass ein Theil der Flächen zu klein ist, um eine Messung durch Reflexion des Lichtes zu gestatten; wenn dieser Mangel an räumlicher Ausdehnung nur nach einer Richtung hin stattfindet, so bilden die Krystalle sehr dünne Tafeln oder Blättchen, deren Randflächen zur Messung zu schmal sind; wenn sie dagegen nur nach einer Richtung eine merkliche Dimension besitzen, so erscheinen sie nadel- oder haarförmig, und dann sind die Endflächen ihrer geringen Grösse wegen nicht bestimmbar. Dass ein Krystall, wenn er überhaupt von äusserster Kleinheit ist, nicht mehr mit dem Reflexionsgoniometer gemessen werden kann, versteht sich von selbst; es kann ein solcher zwar noch mit dem Mikroskop untersucht werden, indem man die ebenen Winkel, welche die Kanten mit einander bilden, bestimmt, doch ist diese Messung (vergl. darüber §. 110 der III. Abth.) nicht derjenigen Genauigkeit fähig, welche mit dem Reflexionsgoniometer erreicht werden kann.

§. 109. **Beschaffenheit der Krystallflächen.** Es ist bisher angenommen worden, dass die Krystallflächen vollkommene Ebenen sind; und dies ist in gewissem Sinne auch wirklich der Fall. Wenn wir jedoch die Flächen eines natürlichen Krystalls betrachten, so werden wir sehr zahlreiche Ausnahmen von jenem Gesetze zu sehen glauben, Ausnahmen, welche indess nur scheinbare sind, indem bei oberflächlicher Beobachtung als eine einzige Fläche erscheint, was genau genommen mehreren angehört. Die in Rede stehenden Unvollkommenheiten der Flächen sind die folgenden:

Streifung der Flächen. Diese entsteht durch alternirende Ausbildung zweier, gewöhnlich gegen einander sehr stumpfwinkelig geneigter Flächen und heisst deshalb auch Combinationsstreifung. Die scheinbare Fläche, welche gestreift ist, besteht demnach aus treppenförmig absetzenden Streifen zweier verschiedener, mit einander abwechselnd, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man das Licht von den Flächentheilen der einen Art reflectiren lässt und alsdann eine Drehung ausführt, bis die zwischenliegenden, vorher dunkel bleibenden Streifen das Licht zurückwerfen. Man hat demnach bei der Messung zwei verschiedene Einstellungen auszuführen und gelangt dadurch zur Bestimmung zweier Krystallflächen*; da jedoch an stark gestreiften Krystallen gewöhnlich die Theile nicht vollkommen parallel sind, so gelingt es nur selten, von solchen genaue Messungen der Winkel zu erhalten. Aus dem Wesen der Streifung ist ersichtlich, dass dieselbe stets der Axe einer krystallographischen Zone parallel sein muss. Sie kann aber auch auf einer Fläche eine mehrfache sein, z. B. auf der eines Rhomboëders, wenn sie durch Flächen eines Skalenoëders hervorgebracht wird, welches dessen Polkanten zuschärft; alsdann resultirt eine zweifache federförmige Streifung parallel den beiden

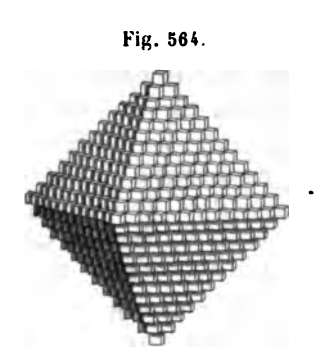
*) Bei sehr fein gestreiften Flächen ist dies jedoch nicht mehr möglich, wie in der III. Abth. gezeigt werden soll.

Polkanten, welche längs der Diagonale der Fläche zusammenstösst. Die Streifung kann zuweilen zur Erkennung der Hemiëdrie dienen: wenn ein Hexaëder durch die Flächen eines Pyramidenwürfels gestreift erscheint, so müssen vier in den Diagonalen rechtwinkelig an einander stossende, den Kanten parallele Streifensysteme auf jeder Fläche erscheinen; ist der Krystall aber pentagonal hemiëdrisch, so entsteht statt dessen auf jeder Würfelfläche nur ein Streifensystem, parallel den beiden gegenüberliegenden Kanten, und diese Streifen, gebildet von den Flächen eines Pentagondodekaëders, stehen auf je zwei benachbarten Flächen zu einander senkrecht.

Wenn nun auch die Streifung zu den Erscheinungen gehört, welche, wie das Auftreten gewisser Formen einer Krystallreihe, von den zufälligen äusseren Bedingungen bei der Bildung des Krystalls abhängen, so ist sie doch, wie das letztere, in verschiedenem Grade von jenen abhängig bei verschiedenen Substanzen, und es giebt deren solche, bei denen bestimmte Krystallflächen fast immer eine ganz bestimmte Streifung zeigen, welche man ihre »charakteristische Streifung« nennen kann, weil durch dieselbe die Flächen und ihre Stellung leicht erkannt werden können. So zeigen z. B. die natürlichen Quarzkrystalle (s. S. 382) auf ihren Prismenflächen $\{10\bar{1}0\}$ nie eine andere Streifung, als eine horizontale, gebildet von den Flächen steiler Rhomboëder, die Krystalle von Topas (s. S. 462) in der ganzen Prismenzone nur verticale Streifung u. s. f.

Drusige Beschaffenheit der Flächen. Diese ist ebenfalls nur eine scheinbare Ausnahme von dem Gesetz, dass die Krystallflächen Ebenen sind, denn die drusigen oder rauhen Flächen sind gar nicht eigentliche Krystallflächen, sondern bestehen aus zahlreichen Ecken kleiner paralleler Krystalle, welche so angeordnet sind, dass jene in einer Ebene liegen. So beobachtet man von Chlornatrium, Flussspath u. a. regulären Substanzen oft Uebergänge von Krystallskeletten zu regelmässigen Krystallen (vergl. S. 535), z. B. scheinbare Oktaëder, aufgebaut aus kleinen Würfeln, bei denen die drusigen Oktaëderflächen von den Ecken dieser Würfel gebildet werden, also als eigentliche Flächen nicht am Krystall auftreten (s. Fig. 564). Sind diese in je einer Ebene liegenden Ecken weit kleiner und zahlreicher, so erscheint die Krystallfläche zwar eben, aber matt, und zwischen diesen und vollkommen glänzenden Flächen sind alle möglichen Uebergänge vorhanden. Je matter eine solche nun ist, d. h. je weniger Licht sie reflectirt, desto schwieriger ist ihre Lage durch das Reflexionsgoniometer zu bestimmen, und ganz matte Flächen können hierzu natürlich gar nicht verwendet werden.

Fig. 564.



Es ist eine ganz allgemeine Erscheinung, dass an einem und demselben Krystall die Oberflächenbeschaffenheit aller Flächen einer einfachen Form

die gleiche ist, z. B. an der regulären Combination {111}, {100} alle Oktaëderflächen matt, alle Würfelflächen glänzend erscheinen; ebenso kommen aber von derselben Substanz Krystalle der nämlichen Combination vor, an denen alle Oktaëderflächen glänzend, alle Würfelflächen matt sind. Diese Gleichheit der Oberflächenbeschaffenheit gilt alsdann bei den hemiëdrischen Substanzen nur für die Hälfte der Flächen der holoëdrischen Gestalt, z. B. erscheinen die vier Flächen des einen Tetraëders glatt, die des andern sämmtlich matt oder gestreift, oder beide Tetraëder zeigen verschieden gerichtete Streifung u. s. f.

Krümmung der Flächen. Diese kann von verschiedenen Ursachen herrühren. Entweder können viele sehr schmale Flächen, welche sehr stumpfe Winkel mit einander bilden, in ihrer Gesammtheit den Eindruck einer einzigen krummen Fläche machen; hierher dürften z. B. die oft sehr gerundeten Flächen des Diamants gehören. Oder, und dies ist besonders häufig der Fall, eine und dieselbe Fläche erscheint in zahlreiche kleine Facetten zerlegt, deren Richtung von einer zur andern sich nur wenig ändert, weil die zugehörigen inneren Theile des Krystalls einander nicht vollkommen parallel sind (s. vorigen §, S. 537); wenn z. B. prismatisch ausgebildete Krystalle fächerförmig zu einem scheinbar einheitlichen Krystall verwachsen, so muss die Basis, wenn sie am Ende desselben auftritt, eine Krümmung zeigen. Endlich können auch dadurch Flächen gekrümmt erscheinen, dass die Krystalle solcher Substanzen, welche einen geringen Grad von Sprödigkeit besitzen, durch mechanische Kräfte verbogen wurden; es kann auch hier nicht mehr von eigentlichen Krystallflächen die Rede sein, da eine solche gebogene Fläche niemals ohne Entstehung von Rissen und Spalten zu Stande kommt und daher aus mehreren gegen einander gedrehten Ebenen zusammengesetzt ist. Es bedarf kaum noch der Erwähnung, dass die Neigung einer, durch irgend eine dieser Ursachen gekrümmten, Krystallfläche gegen andere um so weniger genau gemessen werden kann, je grösser der Grad ihrer Krümmung ist.

Bei leicht löslichen Substanzen, wie sie für chemisch-krystallographische Untersuchungen meist vorliegen, kommt es sehr häufig vor, dass durch Temperaturänderung der Lösung, ehe die Krystalle aus ihr entfernt wurden, wieder eine theilweise Auflösung stattgefunden hat, erkennbar durch die erfolgte Anätzung der Flächen oder Krümmung derselben durch Abrundung der Kanten und Ecken. Hierdurch sind oft die Flächen für die Messung mit dem Reflexionsgoniometer ganz unbrauchbar geworden, daher bei solchen Substanzen stets darauf zu achten ist, dass nicht vor dem Herausnehmen der Krystalle aus der Lösung die Temperatur der letzteren (durch Verbringen aus einem kalten in einen wärmeren Raum) gesteigert wird, sowie darauf, dass die auf den herausgenommenen Krystallen zurückbleibende Lösung sehr rasch mit weichstem Fliesspapier entfernt wird.

Vicinale Flächen. Nicht selten, namentlich bei Mineralien, kommt es vor, dass statt einer einfachen Ebene des Krystalls ein Complex anderer,

von ihr in der Lage nur sehr wenig abweichender Flächen vorhanden ist. So erscheint z. B. das primäre Rhomboëder r an Eisenglanzkrystallen von Elba, Fig. 321 (S. 358), fast immer ersetzt durch eine Reihe sehr wenig stumpferer Rhomboëder und durch ein Paar mit r fast zusammenfallender Skalenoëderflächen; bei dem Diacetylphenolphtaleïn S. 421 wurde bereits das Auftreten einer sehr flachen Pyramide an Stelle der Basis erwähnt; bei der »Adular« genannten Varietät des Orthoklas, z. B. vom St. Gotthard (s. S. 510), findet sich häufig eine Reihe von Flächen in der Prismenzone, sowie sehr spitze, fast der Verticalaxe parallele, Hemipyramiden, deren Messung auf sehr complicirte Indices führt. Nach dem Vorgange von Websky nennt man solche Flächen vicinale, wenn man anzunehmen hat, dass dieselben nicht durch Störungen der inneren Structur (s. S. 537) aus ihrer normalen Lage gerückte Flächen von einfachem Zeichen sind, sondern als wirkliche, mit der theoretischen Beschaffenheit der Substanz im Zusammenhang stehende Krystallflächen mit complicirten Indices betrachtet werden müssen, welche gewissen einfachen Formen sehr nahe liegen. Für die letztere Auffassung spricht besonders die an einigen Substanzen nachgewiesene Erscheinung, dass die Indices einer Anzahl solcher vicinaler Flächen die Glieder einer arithmetischen Reihe bilden (s. M. Websky, Zeitschr. d. d. geolog. Ges. 1863, 15, 677).

III. ABTHEILUNG.

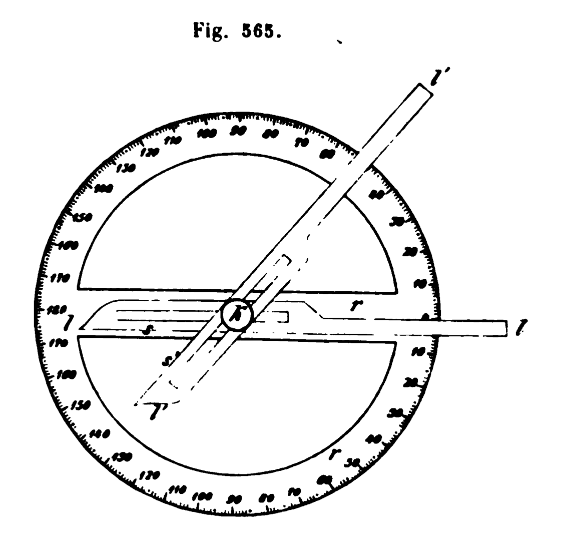
DIE APPARATE UND METHODEN ZU KRYSTALLOGRAPHISCH-PHYSIKALISCHEN UNTERSUCHUNGEN.

A. Goniometer und Refractometer.

§. 110. Contactgoniometer.

1) **Das Anlegegoniometer.** Das Instrument, mit welchem zuerst Krystallwinkel gemessen wurden, ist das Anlegegoniometer, welches im vorigen Jahrhundert von dem Künstler Carangeot, der für den französischen Krystallographen Romé de l'Isle Krystallmodelle anfertigte, erfunden wurde. Dasselbe, in Fig. 565 in einer der jetzt üblichen Formen abgebildet, besteht aus zwei Linealen, *ll* und *l'l'*, welche um eine zu ihrer Ebene normale Axe drehbar sind. Dieselben können mittelst des Knopfes *k* von dem Kreise *r*, um dessen Centrum sie drehbar sind, abgehoben werden Bringt man nun die zu messende Krystallkante so zwischen die beiden Schneiden *s* und *s'*, dass sie normal zu deren Ebene steht, und dreht die Schenkel der Lineale so weit, dass *s* auf der einen, *s'* auf der anderen Krystallfläche genau aufliegt (was man am besten sehen kann, wenn man das Ganze dabei gegen das Licht hält, so bilden die beiden Lineale offenbar denselben Winkel mit einander, welchen die beiden, in der zu messenden Kante einander schneidenden Krystallflächen einschliessen. Steckt man nun die Axe derselben wieder in die im Centrum des Kreises *r* befindliche kreisrunde Oeffnung und dreht sie, bis der eine Schenkel an den Stift *o* anschlägt, so zeigt die durch das Centrum gehende Schneide des anderen unmittelbar auf dem Kreise den gesuchten Winkel an. Oft verbindet man

Fig. 565.



auch das eine Lineal fest mit der Kreistheilung, nimmt aber alsdann nur einen Halbkreis. Um auch aufgewachsene Krystalle messen zu können, bei denen oft ein Auflegen der Schenkel wegen der benachbarten Krystalle nicht möglich wäre, kann man dieselben beliebig verkürzen durch Parallelverschiebung beider Lineale.

Dieses Instrument kann natürlich nur bei sehr grossen und ganz ebenen Flächen eine grössere Genauigkeit geben, als etwa auf 1°; es dient daher nur zur Anfertigung von Krystallmodellen, oder höchstens zur Orientirung an sehr grossen, für andere Goniometer etwa zu unbehülflichen Krystallen, während man sich sonst stets des Reflexionsgoniometers (s. S. 28) bedient. Dieses setzt aber voraus, dass die Flächen, deren relative Neigung man bestimmen will, spiegelnde seien, ist also nicht anwendbar, wenn es sich, wie es z. B. bei einzelnen Mineralien (Feldspath) der Fall ist, um matte, wenn auch ebene Flächen handelt. Man hat verschiedene Verfahren eingeschlagen, um solche Krystalle der Messung mit dem Reflexionsgoniometer zugänglich zu machen: entweder fertigt man von denselben Abdrücke, z. B. in Siegellack, an denen alsdann die Messung vorgenommen wird, oder man überzieht die Krystallflächen mit einer Harzlösung, welche nach dem Trocknen eine glänzende Oberfläche zeigt, oder endlich, man bedeckt sie mit Plättchen von dünnem Deckglase, welche durch möglichst wenig zwischengebrachten flüssigen Canadabalsam darauf festgehalten werden. Es leuchtet ein, dass die Genauigkeit der Messung bei Benutzung solcher künstlich hergestellter glänzender Flächen davon abhängt, bis zu welchem Grade die letzteren den eigentlichen Flächen des Krystalls parallel sind; die Abweichung beider vom Parallelismus kann unter Umständen eine recht beträchtliche sein, und es giebt kein Mittel, dieselbe genau zu bestimmen.

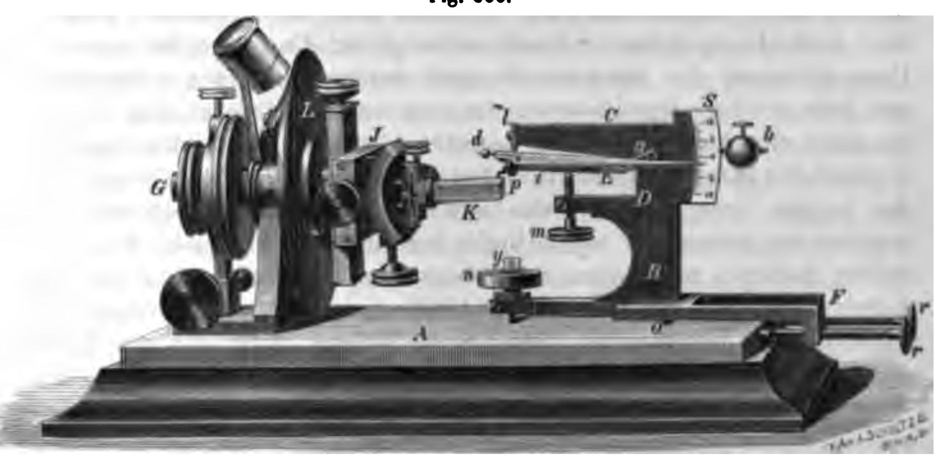
Ein anderes Verfahren, um spiegelungslose Flächen der Messung zu unterwerfen, hat J. Hirschwald (s. N. Jahrb. für Min., Geol. u. s. w. 1879, 301 u. 539, 1880, 156 und Zeitschr. f. Kryst. 4, 219, s. auch ebenda 8, 16) vorgeschlagen. Derselbe benutzt ein Mikroskop, welches in einer zu seiner Axe senkrechten Ebene parallel verschiebbar ist, und bestreicht damit die von oben beleuchtete Krystallfläche. Diese ist jener Ebene genau parallel, wenn sie bei der Verschiebung des Mikroskops von rechts nach links und von vorn nach hinten immer in gleicher Entfernung vom Objectiv bleibt, was man dadurch erkennt, dass ihre Umrisskanten und etwa auf der Fläche befindliche Unebenheiten, Aetzfiguren etc. oder ein darauf gestreutes feines Pulver immer in gleicher Schärfe sichtbar bleiben, während das Mikroskop mittelst zweier, in zu einander senkrechten Richtungen wirkender Schrauben über dieselbe hinbewegt wird. Hat man nun den Krystall centrirt und justirt (vergl. S. 28) auf der Axe eines Theilkreises angebracht, welcher mit dem Mikroskopträger in fester Verbindung steht, so kann man durch Drehung jener Axe eine zweite Krystallfläche in das Gesichtsfeld des Mikroskopes und auf gleiche Weise in dieselbe Lage bringen, welche vorher die erste Fläche einnahm. Werden nun beide

Stellungen des Kreises am Nonius abgelesen, so ist die Differenz beider Ablesungen offenbar der gesuchte Winkel. Es liegt aber auf der Hand, dass die Genauigkeit dieses Verfahrens davon abhängt, innerhalb welcher Grenzen die Entfernung der Fläche vom Objectiv des Mikroskopes variiren kann, ohne dass dieselbe aufhört, scharf sichtbar zu sein. Für manche Personen sind diese Grenzen sehr enge, für andere, welche eine grosse Accommodationsfähigkeit des Auges besitzen, ziemlich weite, daher die Genauigkeit der Messung mit diesem ziemlich complicirten, von seinem Erfinder »Mikroskopgoniometer« genannten Instrumente von subjectiven Verhältnissen abhängt.

Der geeignetste Apparat, um matte Flächen mit einer weit grösseren Genauigkeit, als mittelst des Anlegegoniometers, zu messen, ist das von R. Fuess erfundene »Fühlhebelgoniometer«, welches daher an dieser Stelle ausführlicher beschrieben werden soll.

2) **Das Fühlhebelgoniometer.** Auf einer matt und vollkommen eben geschliffenen Glasplatte, der »Grundplatte« *A* Fig. 566, ist ein Theilkreis *L*, dessen Ebene genau senkrecht zur Grundplatte steht, befestigt. Derselbe ist um eine zu *A* parallele Axe drehbar mittelst der grösseren der beiden links davon sichtbaren, am Rande gekerbten Messingscheiben oder mittelst der darunter befindlichen Feinstellschraube, wobei sich zugleich die innerste, durch den Knopf *G* auch unabhängig davon drehbare

Fig. 566.



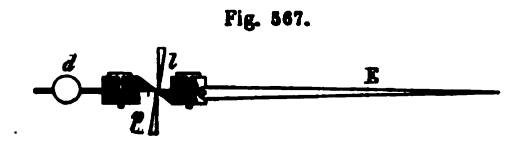
Axe mit bewegt, welche an ihrem andern Ende die Centrir- und Justirvorrichtung *J* und den Krystall *K* trägt. Die erfolgte Drehung kann an einem Nonius durch die mittelst eines Armes mit der Goniometeraxe verbundene Lupe abgelesen werden. Dieser Theil des Instrumentes ist vollkommen übereinstimmend mit dem im nächsten § zu beschreibenden gewöhnlichen Reflexionsgoniometer, daher die nähere Einrichtung desselben hier übergangen werden kann.

Hat man nun eine von zwei Krystallflächen gebildete Kante auf diesem Instrumente centrirt und justirt*), so ist man im Stande, durch Drehung des Limbus *L* einmal die eine, das andere Mal die andere Fläche der Grundplatte parallel zu stellen, und offenbar ist alsdann die Differenz der beiden Ablesungen am Nonius der gesuchte Winkel der Krystallkante. Es handelt sich also bei dieser Messung darum, den Parallelismus einer Fläche des am Goniometer befestigten Krystalls mit der horizontalen Grundplatte genau zu prüfen. Dies geschieht mit der Fuess'schen Fühlhebelvorrichtung, welche auf die rechte Seite der Grundplatte aufgesetzt wird. Dieselbe besteht aus einem Messingstativ *B*, welches mit drei konischen stählernen Füsschen, zwei festen *o* (von denen nur eines in der Figur sichtbar ist) und einem durch die Schraube *n* verstellbaren, auf der Grundplatte aufruht. Von dem Stativ *B* laufen nach links zwei Arme *C* und *D* aus, von denen der erstere am Ende ein Stahlstück *l* trägt, dessen unterster Theil eine horizontale, senkrecht zur Zeichnungsebene verlaufende Schneide bildet. Durch den Arm *D* geht die mit einem feinen Gewinde versehene Schraube *m*, auf welcher das Hebelsystem *i* aufruht. Dieses besteht aus zwei parallelen und gleich gestalteten, nach rechts aufgebogenen Stahlstäbchen, von denen das hintere in der Figur durch das vordere verdeckt ist, und welche bei *p* und *a* durch horizontale Querstücke verbunden sind; das erstere von diesen trägt in der Mitte eine Fortsetzung, welche in ein nach unten gebogenes Messingstiftchen, im Folgenden als »Fühler« bezeichnet, ausläuft, während auf ihrer Oberseite eine der Schneide *l* parallele, aber nach oben gerichtete Schneide befestigt ist; die rechte, bei *a* gelegene Querverbindung der Rahmentheile geht durch eine, unter *a* befindliche, nur halb sichtbare Durchbohrung des Statives *B*, welche so weit ist, dass sie jener eine kleine Bewegung gestattet, hindurch. Die beiden dem Arme *C* parallelen Stäbchen setzen noch fort bis zu einer ganz wenig rechts von der vorigen (siehe unter *a* rechts abwärts) befindlichen Durchbohrung, in welcher ein horizontaler Stahlcylinder befestigt ist, an dessen Enden die beiden Stäbchen mit kleinen Schraubenzapfen anliegen, so dass das ganze Hebelsystem *i* um die Axe jenes Stahlcylinders drehbar ist. Während der vordere Theil desselben an dieser Stelle aufhört, setzt sich der hintere nach rechts in einen langen Stahlstab fort, welcher die verschiebbare Kugel *b* trägt, mittelst deren das ganze Hebelsystem *i* balancirt werden

*) Dies geschieht bei diesem Instrumente mittelst eines in der Figur nicht mit abgebildeten Hülfsapparates, bestehend aus einer scharfen Stahlschneide, welche an einem Messingarme befestigt ist, dessen Untersatz auf drei Schrauben ruht, während eine seitliche Fortsetzung noch zwei horizontale Schräubchen trägt. Die Schneide befindet sich genau in der Richtung der Goniometeraxe, wenn man den kleinen Apparat so auf die Grundplatte aufsetzt, dass die beiden horizontalen Schrauben die vordere Randfläche desselben berühren. Der Krystall *K* wird nun mittelst der an *J* befindlichen Schrauben so gerichtet, dass die zu messende Kante die Stahlschneide fast berührt und ihr genau parallel läuft.

kann. Zwischen der an diesem befestigten und daher mit demselben beweglichen Schneide *p* und der früher erwähnten festen Schneide *l* befindet sich nun frei schwebend der eigentliche Fühlhebel *E*, dessen Construction aus Fig. 567 ersichtlich ist. Derselbe besteht aus zwei Stahlplatten (in der Figur ungleich schraffirt), welche durch Schrauben fest verbunden sind. Aus beiden ist in ihrem mittleren Theile auf gleiche Art ein viereckiges Stück mit drei senkrechten und einer schiefen Seitenfläche ausgeschnitten; die Platten sind so aneinander gelegt, dass die schiefen Seiten des ausgeschnittenen Theiles parallel sind und beinahe in eine Ebene fallen. An dem so gebildeten Rahmen ist an einer Seite ein circa 7 cm langer, aus Elfenbein hergestellter Arm, der »Zeiger«, befestigt, welcher auf der andern Seite durch eine kleine verschiebbare Metallkugel *d* balancirt werden kann. Die ganze Vorrichtung wird so zwischen die beiden Schneiden eingelegt, dass Schneide *l* auf der oberen Seite der unteren Platte und Schneide *p* auf der unteren Seite der oberen Platte aufliegt. Da die Schneide *l* fest ist, so bildet sie die Drehungsaxe des Hebels *E*, dessen beide Theile durch Verschiebung der Kugel *d* so balancirt werden, dass der linke ein sehr kleines Uebergewicht besitzt. Am Niedersinken wird derselbe dadurch verhindert, dass die bewegliche Schneide *p* von unten her ihn berührt, ein Contact, welcher durch die Stellung der Schraube *m* bewirkt wird (vergl. Fig. 566); das mit der Schneide *p* in Verbindung stehende Hebelsystem *i* ist durch die Kugel *b* so genau balancirt, dass die leiseste Berührung des an *p* befindlichen »Fühlers« sofort eine Hebung der linken und eine Senkung der rechten Seite zur Folge hat. Dadurch wirkt die Schneide *p* auf den Fühlhebel, indem sie dessen linke Seite hebt, und da der horizontale Abstand der beiden Schneiden *p* und *l* ein äusserst geringer ist, so entspricht einer sehr kleinen Aufwärtsbewegung der ersteren ein grosser Ausschlag des Zeigers *E* nach unten. Hat also die Schraube *m* diejenige Stellung, bei welcher die bewegliche Schneide *p* nur eben den Fühlhebel in der Lage schwebend erhält, dass der Zeiger *E* desselben auf den Nullpunkt der bei *S* auf dem Stativ angebrachten Theilung gerichtet ist, so genügt offenbar die leiseste Berührung des Fühlers, um einen merkbaren Ausschlag des Zeigers auf der Skala hervorzubringen*).

Fig. 567.



* Betreffs der Fig. 566 muss bemerkt werden, dass an den neuesten Fuess'schen Instrumenten sich der Nullpunkt am oberen Ende der Theilung, in der Mitte also 10 und unten 20, befindet, so dass die Gleichgewichtsstellung des Fühlhebels nicht, wie in der Figur, horizontal, sondern eine schräg nach rechts ansteigende ist. Da es sich nur um die Beobachtung von abwärts gerichteten Ausschlägen handelt, ist diese unerhebliche Aenderung der in Fig. 566 abgebildeten Anordnung vorzuziehen. Am unteren

Diese Empfindlichkeit wird nun benutzt, um den Parallelismus einer horizontal gestellten Krystallfläche mit der Grundplatte zu prüfen. Ist die zu messende Kante des Krystalls genau justirt, d. h. der Grundplatte parallel, so genügt es offenbar, den Parallelismus einer zur Kante senkrechten, in der Krystallfläche gelegenen Linie mit der genannten Platte zu constatiren. Zu diesem Zwecke kann man den ganzen Fühlhebelapparat von vorn nach hinten verschieben, wobei derselbe mit den Enden der beiden Stahlschrauben *r*, welche durch die Verlängerungen *F* des Statives *B* gehen, an der der Ebene des Theilkreises parallelen Seitenfläche der Grundplatte entlang gleitet. Dabei beschreibt der Fühler auf der Krystallfläche eine Gerade, welche die erforderliche, zur Kante senkrechte Richtung besitzt, und wird bei vollkommenem Parallelismus der Fläche mit der Grundplatte, welcher durch Drehung des Krystalls mittelst der Feinstellschraube bewirkt wird, an allen Stellen die Fläche eben berühren, vorausgesetzt, dass vorher dem Fühler durch Heben oder Senken mittelst der Schraube *n*, wobei sich der ganze Fühlhebelapparat um die beiden festen Stahlspitzen *o* dreht, die erforderliche Höhenstellung ertheilt ist. Ein solches Gleiten ist aber natürlich nur auf einer sehr glatten Fläche möglich. Die matten Flächen der hier in Betracht kommenden Krystalle besitzen nun häufig Hervorragungen und andere Unebenheiten und erfordern deshalb das folgende Verfahren: Der Fühler wird durch die Schraube *n* so hoch gestellt, dass er über alle Stellen der Fläche frei hinweg gehen kann, aber derselben stets sehr nahe bleibt; nun sucht man auf der Krystallfläche nahe der Kante und möglichst entfernt davon in der dazu senkrechten Richtung zwei möglichst ebene Stellen aus, bringt den Fühler über die eine und senkt ihn durch Drehung der Schraube *n* bis zur Berührung. *n* ist eine Mikrometerschraube, deren Windungen je 0,5 mm hoch sind und deren Rand in 100 Theile getheilt ist, so dass eine Hebung des Fühlers um 0,005 mm direct abgelesen und eine solche von 0,001 mm noch geschätzt werden kann; die ganzen Umdrehungen werden an dem in halbe Millimeter getheilten Index *y* abgelesen. Mittelst dieser Vorrichtung kann man also sehr genau bestimmen, um wie viel der Apparat gesenkt werden musste, um die Berührung des Fühlers mit der Krystallfläche hervorzubringen, wobei man die Genauigkeit noch durch mehrmalige Wiederholung des Versuches an mehreren nahe benachbarten Punkten und durch Mittelziehung der einzelnen Ablesungen erhöhen kann; alsdann wiederholt man das Gleiche nach einer entsprechenden Verschiebung des Fühlhebelapparates an der zweiten der beiden ausgesuchten Stellen der Krystallfläche. Ist die hier bis zur Berührung erforderliche Senkung die gleiche, so ist offenbar die Krystallfläche der Grundplatte parallel; andernfalls corrigirt man durch die

Ende der Skala ist ein Knöpfchen angebracht, welches über die Theilung hinausgehende Ausschläge des Zeigers verhütet.

feine Drehung der Goniometeraxe die Stellung des Krystalls so lange, bis beide Sondirungen genau das gleiche Resultat ergeben.

Ueber die bei derartigen Messungen zu erreichende Genauigkeit, sowie über die Prüfung des Instrumentes s. die Arbeit von A. Schmidt, über das Fuess'sche Fühlhebelgoniometer, Zeitschr. f. Kryst. 8, 1.

3) **Mikrogoniometer.** Zu den Contactgoniometern kann man endlich auch diejenigen Vorrichtungen rechnen, in denen die Winkelmessung mittelst eines optischen Contactes geschieht, und solche Vorrichtungen, »Mikrogoniometer«, sind es, welche besonders zur Messung mikroskopischer Krystalle benutzt werden. Da man unter dem Mikroskope nur die in einer Ebene liegenden Theile eines Krystalls scharf erblickt, so kann mit diesem Instrumente nur die Messung ebener Winkel vorgenommen werden, d. h. derjenigen, welche je zwei Kanten einer auf dem Tische des Mikroskopes horizontal liegenden Krystallfläche mit einander bilden. Hierzu benutzt man am einfachsten ein Mikroskop, in dessen Ocularsysteme ein rechtwinkeliges Fadenkreuz angebracht ist, welches man gleichzeitig mit dem Krystall im Gesichtsfelde erblickt, und dessen Tisch um seinen Mittelpunkt drehbar und so eingerichtet ist, dass man seine Drehung an einer am Rande desselben befindlichen Theilung ablesen kann. Die Drehungsaxe des Tisches muss mit der optischen Axe des Mikroskopes zusammenfallen, welche durch den Kreuzungspunkt der Fäden in der Mitte des Gesichtsfeldes bezeichnet ist. Behufs der Messung wird nun zunächst der Eckpunkt der Krystallfläche, in welchem die beiden Kanten, deren ebenen Winkel man sucht, einander schneiden, durch Verschiebung des Krystalls mit dem Kreuzungspunkte der Fäden zur Deckung gebracht; alsdann wird durch Drehung des Tisches mit dem darauf liegenden Krystall eine der beiden Kanten parallel eingestellt mit einem der beiden Fäden, was sich besonders genau erreichen lässt, wenn man die Kante ein wenig neben dem Faden einstellt, statt beide vollkommen zur Deckung zu bringen. Nachdem diese Stellung des Mikroskoptisches an dessen Theilung abgelesen worden ist, wird derselbe gedreht, bis die zweite Kante in gleiche Richtung gelangt ist, welche vorher die erste inne hatte, und dann wiederum abgelesen; die Differenz beider Ablesungen ist der gesuchte Winkel.

Diese Methode der Winkelmessung unter dem Mikroskope ist besonders wichtig für petrographische Untersuchungen, bei denen es sich oft um die Bestimmung der Gestalt von Krystallen handelt, von welchen in einem Gesteinsschliffe (s. S. 74) sehr dünne Querschnitte vorliegen. Obgleich deren Orientirung gegen die krystallographischen Axen unbekannt und natürlich für jeden Durchschnitt eine andere ist, so kann doch aus der Umrissfigur eines solchen Durchschnittes, d. h. aus den ebenen Winkeln desselben, wenn diese nach der angegebenen Methode gemessen worden sind, ein Schluss

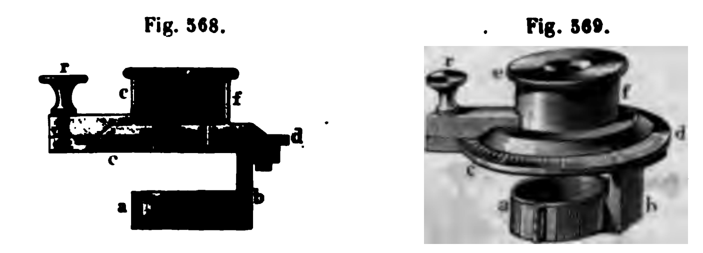
auf die Richtung der Durchschnittsebene und daraus auf die Form des Krystalls gezogen werden, namentlich wenn man noch andere Hülfsmittel hinzuzieht, z. B. die in derselben Weise zu bestimmende Richtung etwa sichtbarer Spaltungsrisse, die Schwingungsrichtungen des polarisirten Lichtes, einen etwaigen Axenaustritt im convergenten Lichte u. s. w. So würde man z. B. unter den in einem solchen Gesteinsschliff vorhandenen Krystallschnitten eines monosymmetrischen Minerals mit prismatischer Spaltbarkeit, durch das Vorhandensein von Spaltungsrissen nach einer einzigen Richtung, leicht diejenigen herausfinden, deren Ebene der Kante des Spaltungsprisma parallel geht, und unter diesen wieder die zur Symmetrieebene ungefähr senkrechten dadurch, dass in ihnen die Schwingungsrichtungen des polarisirten Lichtes den Spaltrissen parallel gehen. Bei Auffassung des Spaltungsprisma als {110} hätte man in einem Schnitte der letzterwähnten Art einen solchen nach dem Orthopinakoid {100} vor sich, dessen Gestalt, verglichen mit denen der andern verticalen Schnitte, d. h. derjenigen, in denen alle Spaltungsrisse parallel verlaufen, ein Urtheil über die an den Krystallen auftretenden Endflächen und deren ungefähre Winkel gestattet. Andererseits sind unter den Durchschnitten, in denen beide Spaltungsrichtungen beobachtet werden, diejenigen, in welchen dieselben ungefähr den Winkel des Spaltungsprisma mit einander bilden, offenbar annähernd senkrecht zur Kante dieses Prismas; die Gestalt der Umrisse liefert hier also direct die Winkel der am Krystall ausgebildeten verticalen Flächen. J. Thoulet hat für die petrographisch wichtigsten Mineralien (Pyroxene, Amphibole, Feldspäthe) die ebenen Winkel berechnet, welche die Spaltungsrichtungen in verschiedenen, den Hauptzonen der Krystalle angehörigen Ebenen bilden, und dadurch die Aufgabe, die Orientirung dieser Mineralien in Gesteinsschliffen zu bestimmen, sehr erleichtert (Annales d. mines (7) 1878, 14, 3).

Eine weniger häufig, als die vorstehend beschriebene, gebrauchte Methode der mikroskopischen Winkelmessung besteht darin, dass man, anstatt den Tisch des Mikroskopes drehbar zu machen, ein Fadenkreuz anwendet, dessen einer Faden um die Mitte drehbar ist und dessen Drehung an einer aussen am Oculare angebrachten Theilung abgelesen werden kann. Man bringt hierbei ebenso, wie bei der gewöhnlichen Methode, den Schnittpunkt der beiden Kanten des Krystalls in den Kreuzpunkt der beiden Fäden, stellt alsdann den beweglichen Faden einmal auf die erste, das andere Mal auf die zweite Kante der Krystallfläche ein und bestimmt am Kreise die dazwischen erfolgte Drehung. Eine solche Vorrichtung ist an dem mit dem Elasticitätsapparate (s. §. 125) verbundenen Mikroskope angebracht und soll deren Anwendung für bestimmte Zwecke a. a. O. erläutert werden.

Endlich werde noch eine von Leeson vorgeschlagene Einrichtung zur genauen Messung der ebenen Winkel mikroskopischer Krystalle beschrieben, welche in Fig. 568 im Durchschnitt, in Fig. 569 in perspectivischer

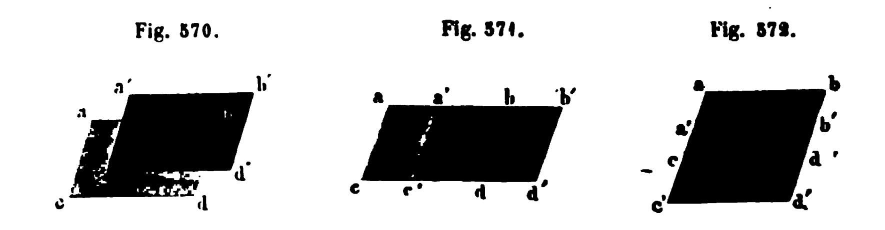
Ansicht dargestellt ist. Der Apparat wird auf dem Ocularrohr des Mikroskopes mittelst des Ringes *a* befestigt, welcher durch den Träger *b* mit dem getheilten Kreise *cd* fest verbunden ist; auf diesem ist eine abgeschrägte

Fig. 568. Fig. 569.



kreisförmige Platte mit der Hülse *ef* drehbar; die letztere enthält ein doppeltbrechendes Prisma von Quarz, dessen Dispersion dadurch beseitigt ist, dass ein ebenso stark dispergirendes Glasprisma mit demselben in umgekehrter Stellung verbunden ist. Durch diese Combination erblickt man daher die im Mikroskope sichtbaren Gegenstände doppelt, jedoch ohne störende Farbenzerstreuung. Befindet sich nun z. B. eine Krystallfläche von der Form eines Rhombus *abcd* eingestellt im Gesichtsfelde, so erscheint dieselbe doppelt, etwa wie Fig. 570. Durch Drehen des Quarzprismas mittelst des Knopfes *r* werden die beiden Bilder einmal in die gegenseitige Lage Fig. 571, das andere Mal in die Fig. 572 dargestellte gebracht, und

Fig. 570. Fig. 571. Fig. 572.

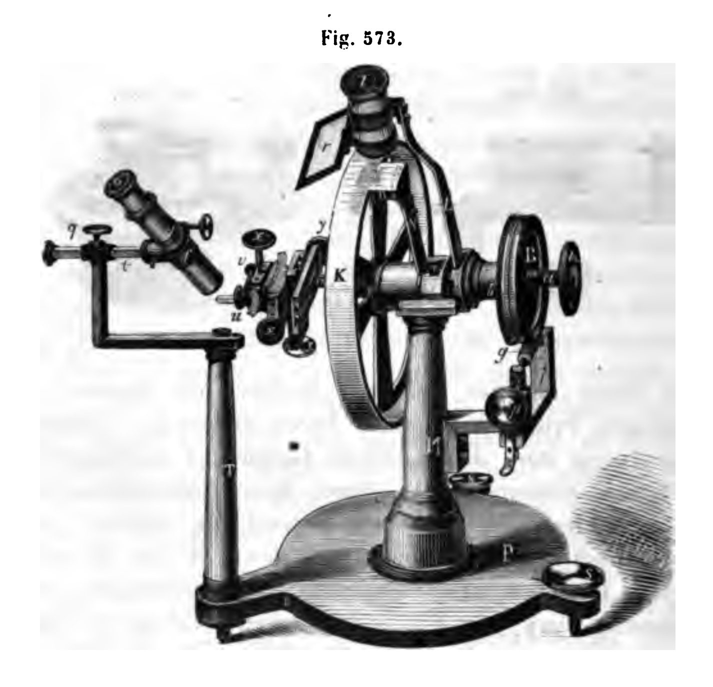


durch Ablesen beider Stellungen am Kreise die dazu erforderliche Drehung, welche offenbar dem Winkel des Rhombus gleich resp. supplementär ist, bestimmt. Es leuchtet ein, dass diese Messung des ebenen Winkels um so genauer ausfällt, je vollkommener es gelingt, das eine Mal die Kante *ab* mit *a'b'*, resp. *cd* mit *c'd'*, das andere Mal *ac* mit *a'c'* und *bd* mit *b'd'* in eine gerade Linie zu bringen.

§. 111. **Reflexionsgoniometer mit verticalem Kreise.** Das Reflexionsgoniometer, 1809 von Wollaston erfunden, wurde bereits S. 28 im Princip besprochen. Die Einrichtung eines solchen Instrumentes in verbesserter Form kann aus Fig. 573 ersehen werden.

Auf einer Metallplatte *P*, welche durch die Schrauben *ss* horizontal gestellt werden kann, ruht eine Messingsäule *M*, durch deren oberen ver-

Fig. 573.



stärkten Theil die Axe des drehbaren Theilkreises *K* geht. Diese Axe ist eine doppelte: 1) eine innere *a*, welche mittelst der am Rande gekerbten Messingscheibe *A* leicht gedreht werden kann, ohne dass sich der Kreis mit bewegt, und an deren anderem Ende sich die Vorrichtung zum Centriren und Justiren des Krystalls befindet: 2) eine äussere *b*, welche mit dem Kreise fest verbunden ist, daher mittelst der Scheibe *B* auch dieser in Drehung versetzt wird, an welcher natürlich die innere Axe *a* ebenfalls Theil nimmt. Die Drehung wird an dem festen Nonius *n*, welcher durch den Arm *N* mit der Messingsäule *M* verbunden ist, mittelst der Lupe *l* abgelesen. Damit jede Stelle der Theilung des Nonius in die Mitte des Gesichtsfeldes der Lupe gebracht werden kann, ist *L* innerhalb eines kleinen Kreisbogens beweglich. Durch das in einen Rahmen gespannte weisse Papier *r* endlich wird behufs leichterer Ablesung das Licht des Tages oder einer rechts vom Instrumente aufgestellten Beleuchtungsflamme auf die Theilung geworfen.

Die Centrirvorrichtung bestand bei den älteren Wollaston'schen Instrumenten einfach aus einem senkrecht zur Axe *a* verschiebbaren Schlitten und einem in einer Hülse normal zu beiden verschiebbaren Stift, auf dessen in eine Platte auslaufendem Ende der Krystall mit Wachs befestigt wurde; diese zwei zu einander senkrechten Bewegungen gestatteten, die ausserhalb der Axe befindliche Krystallkante parallel sich selbst so weit zu

verschieben, bis sie beim Drehen der Axe an ihrem Orte verblieb und der Krystall dabei gleichsam um dieselbe rotirte. Die Justirung geschah durch Drehung des letzterwähnten Stiftes in seiner Hülse und durch ein Gelenk in dem Bügel, welcher, auf dem Centrirschlitten befestigt, die Hülse trug. Diese beiden Drehungen fanden in zwei senkrecht zu einander stehenden Ebenen statt, daher man durch dieselben die irgendwie schief gegen die Ebene des Kreises stehende Krystallkante senkrecht gegen diese stellen konnte. Da sowohl die Verschiebungen behufs der Centrirung, als die Drehungen behufs der Justirung aus freier Hand ausgeführt werden mussten, so gestatteten diese älteren Instrumente nur nach oftmaligem Hin- und Herprobiren eine ungefähre Richtigstellung des Krystalls zu erreichen.

Man hat deshalb an die Stelle der soeben beschriebenen Centrir- und Justirvorrichtung eine solche gesetzt, welche die Parallelverschiebung des Krystalls in zwei zu einander senkrechten Richtungen durch zwei Schlitten erlaubt, deren Bewegung mittelst Schrauben (yy in Fig. 573) erfolgt; ebenso wird die Justirung durch zwei Schrauben xx ausgeführt, welche eine Neigung des Krystalls in zwei zu einander senkrechten Ebenen bewirken. Die nähere Construction dieser Vorrichtung, welche eine leichte und sichere Einstellung des Krystalls in die gewünschte Orientirung ermöglicht, soll im folgenden § vermittelst eines Durchschnittes erläutert werden. Das Ende derselben bildet eine kleine, durch das Schräubchen v darin befestigte gestielte Metallplatte, das Tischchen u, auf welches der Krystall mit Wachs aufgeklebt wird.

Bei den älteren, einfachen Reflexionsgoniometern wurde nun, nachdem die Krystallkante soweit centrirt war, dass dieselbe bei einer Drehung der Axe um 360° ihren Ort nicht merklich änderte, die Justirung so ausgeführt, dass ein entfernter Gegenstand, welcher als Signal diente (ein Fensterkreuz, eine Dachkante u. dergl.), in beiden Flächen nach einander gespiegelt beobachtet wurde, wobei das Auge der spiegelnden Fläche sehr stark genähert werden musste; war die Fläche nicht normal zu der senkrechten Kreisebene, so erschienen horizontale Linien des Bildes schräg gestellt, und die Neigung der Fläche musste durch die Justirungsbewegungen so lange geändert werden, bis jene Linien im Bilde horizontal erschienen. War dies bei beiden Flächen erreicht, so war die zwischen ihnen befindliche Kante justirt. Es wurde dann einmal das von der einen, das andere Mal das von der andern Fläche gespiegelte Bild des Signals mit einer in der Sehrichtung auf dem Stativ des Instrumentes befindlichen Linie (oder mit dem Spiegelbild desselben Signals, welches eine feste, am Stativ passend angebrachte, kleine schwarze Glasplatte reflectirte) zur Deckung gebracht, und die zwischen beiden Einstellungen erfolgte Drehung des Kreises am Nonius bestimmt.

Es liegt nun auf der Hand, dass bei diesem Verfahren sowohl die Centrirung, als die Justirung der Kante nur angenähert möglich ist, und dass die Einstellung der beiden, von den Krystallflächen reflectirten Bilder

des benutzten Objectes nicht absolut genau vorgenommen werden kann. Wenn daher auch die Genauigkeit, mit welcher man mittelst des älteren Wollaston'schen Reflexionsgoniometers Krystallwinkel messen kann, weit grösser ist, als bei dem Anlegegoniometer, so ist sie doch andererseits nicht so gross, wie es in vielen Fällen wünschenswerth erscheint; eine derartige Messung ist nämlich, wenn die Krystallflächen sehr gut reflectiren, und alle oben genannten Bedingungen nach Möglichkeit erfüllt sind, höchstens auf etwa $\frac{1}{10}^0$ genau. Es wurden daher schon frühe Verbesserungen an dem Instrumente vorgenommen. Zuerst Malus, und dann namentlich Mitscherlich verbanden damit ein dem Kreise paralleles Fernrohr, durch welches das reflectirte Bild des Signals betrachtet wird; bringt man in der Bildebene desselben ein Fadenkreuz an, so kann man durch Drehen des Krystalls einen bestimmten Punkt in dem Signalbilde mit grosser Schärfe auf die Mitte dieses Fadenkreuzes einstellen. Mitscherlich (s. Abhandlungen der Berliner Akad. d. Wiss. 1843, S. 189) wies darauf hin, dass das Fernrohr wenig oder gar nicht vergrössern dürfe, weil sonst das von kleinen Krystallflächen reflectirte Bild zu lichtschwach wird, um deutlich gesehen zu werden. Wir haben aber S. 537 gesehen, dass gerade kleine Krystalle am ehesten frei von Störungen der Ausbildung sind, während unter den grösseren sehr häufig solche vorkommen, deren Flächen geknickt und gebrochen sind; da man mit dem Fernrohr ein sehr scharfes Bild des Objectes erblickt, so gewahrt man durch dasselbe auch viel leichter, als mit blossem Auge, derartige Unebenheiten der Flächen, indem diese dann mehrere Bilder reflectiren; namentlich, wenn man als Signal eine kleine Gasflamme im dunklen Zimmer anwendet.

Für dieses Verfahren ist das in Fig. 573 dargestellte Instrument eingerichtet und daher mit einem Fernrohr *f* verbunden, welches um eine zur Ebene des Kreises senkrechte Axe um einen bestimmten Winkel gedreht werden kann. Hebt man das Ocular *o* desselben, so ist diese Drehung nur bis zu einer, durch einen Anschlag an der Axe bezeichneten Stellung möglich; in dieser, welche die Figur darstellt, ist das Fernrohr genau auf die Drehungsaxe des Theilkreises *K* gerichtet. Ausser der Drehung kann man das Fernrohr auch parallel sich selbst verschieben mittelst der Schiene *t*, welche durch die Schraube *q* fixirt wird. Hierdurch ist es möglich, je nach der Grösse des Krystalls das Fernrohr so zu stellen, dass sich die spiegelnden Flächen gerade vor der Mitte des Objectivs befinden. Das Fernrohr ist durch die Säule *T* fest mit dem Stativ des Apparates verbunden.

Um eine Messung mit dem Instrumente vorzunehmen, wird zunächst das Fernrohr nach aufwärts gerichtet und dadurch, wie durch Drehung des ganzen Apparates um eine Senkrechte, auf das als Signal dienende Object, welches sich in möglichst grosser Höhe und Entfernung am andern Ende des Beobachtungsraumes befindet, eingestellt, so dass der Apparat diejenige Orientirung erhält, bei welcher das Object in der dem Kreise parallelen Drehungsebene des Fernrohres gelegen ist. Alsdann wird das letztere

wieder bis zum Anschlag herabgedreht, d. h. auf die Axe des Theilkreises gerichtet, wie es in Fig. 573 dargestellt ist. Nachdem so das Instrument zur Ausführung der eigentlichen Messung vorbereitet ist, befestigt man den Krystall mit Wachs auf dem Tischchen *u* und centrirt und justirt denselben nach der im §. 113 auseinandergesetzten Methode, wobei man alle Drehungen nur an der inneren, leicht beweglichen Axe *a* ausführt; ist dies erfolgt, so werden die von den Krystallflächen gespiegelten Signalbilder einzeln im Fernrohr eingestellt, indem mittelst der Scheibe *B* die äussere Axe und dadurch der Kreis gedreht wird. Da die genaue Einstellung einer bestimmten Stelle des Signalbildes in das Fadenkreuz des Fernrohres durch die minder leichte Drehbarkeit der Axe *b* erschwert wird, kann man die letzte Feinstellung mittelst einer Schraube *g* bewirken, deren Gewinde in die Zähne der Scheibe *B* eingreift, so dass man durch Drehen des Knopfes *p* sehr kleine Drehungen von *B* hervorbringen und dadurch eine genaue Einstellung erzielen kann. Um behufs der groben Einstellung die Axe *b* frei drehen zu können, macht man die Scheibe *B* von dem Gewinde der Feinstellschraube *g* unabhängig, indem man den Knopf *p* niederdrückt bis zu einer Stellung, in welcher die darunter befindliche stählerne Feder mit

Fig. 573.



ihrem nach innen vorspringenden Knöpfchen in eine Oeffnung des Rahmens *i*, der mit dem Stative des Instrumentes fest verbunden ist, einspringt und die Feinstellschraube in dieser tieferen Lage festhält, bis man sie behufs der Einstellung durch Zurückziehen der Feder wieder löst.

Die vorstehende Beschreibung des Reflexionsgoniometers bezieht sich auf kleine, in Fig. 573 in ½ der natürlichen Grösse dargestellte Instrumente wie sie von der Firma Böhm und Wiedemann in München geliefert werden*) und für gewöhnliche Krystallmessungen vollkommen ausreichend sind. Für alle Zwecke, bei denen es sich nicht um die Erreichung grosser Genauigkeit handelt, sind dieselben namentlich deshalb zu empfehlen, weil sie in Folge der bequemen Lage der Arme des Beobachters und der während der ganzen Arbeit gleichbleibenden Stellung der Goniometertheile eine sehr rasche Arbeit gestatten**).

Dasselbe Princip der Construction hat man nun aber auch angewendet auf grössere, für die Zwecke krystallographischer Untersuchungen, welche einen höheren Grad der Genauigkeit und eine kritische Prüfung des letzteren erheischen, bestimmte Instrumente. Auf den Vorschlag Mitscherlich's, nach dessen Angaben Oertling in Berlin seine Goniometer construirte, wurden diese Apparate mit zwei dem Kreise parallelen Fernröhren versehen, von denen das eine zur Beobachtung, das andere als Collimator dient. Letzteres bildet mit dem Beobachtungsfernrohr einen stumpfen Winkel und kehrt wie dieses sein Objectiv dem Krystall zu; das in seiner Brennebene befindliche Fadenkreuz stellt das Signal dar, dessen Bild, von der Krystallfläche reflectirt, eine sehr genaue Einstellung auf das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres gestattet. Aehnliche Instrumente wurden neuerdings angefertigt von Jürgenson in Kopenhagen (s. V. von Lang, Denkschr. d. Wien. Akad. d. Wiss. 1876, 36, 41—44) und Schneider in Wien (s. A. Brezina, Jahrb. d. geol. Reichsanst. 1884, 34, 321), und zwar sind diese, wie die Oertling'schen Goniometer, gleichzeitig zum Gebrauch

*) S. das Preisverzeichniss am Schlusse dieses Buches.

**) Aus denselben Gründen sind diese Instrumente auch für Anfänger in der praktischen Krystallographie besonders geeignet. Sie dienen z. B. im mineralogischen Institute der Universität München zu den Uebungen, in welchen die Studirenden der Chemie und Mineralogie, nachdem dieselben sich mit der physikalischen Krystallographie vertraut gemacht haben, die Methoden dieser Wissenschaft in einem bestimmten Cursus praktisch anzuwenden Gelegenheit finden. Damit eine Anzahl von Praktikanten gleichzeitig messen kann, ist eine Reihe solcher Goniometer, durch dunkle Schirme getrennt, fest aufgestellt, und an der gegenüberliegenden Wand des betreffenden Saales nahe der Decke dieselbe Zahl von Argand'schen Gasbrennern angebracht; letztere sind mit einem Glimmercylinder und mit einem eisernen Schornstein umgeben, in welchen ein Kreuz eingeschnitten ist, dessen Arme 5 cm lang und 5 mm breit sind. Das Licht jedes dieser kreuzförmigen beleuchteten Schlitze fällt auf das zugehörige Goniometer durch eine Oeffnung in dem dasselbe umgebenden Schirme und dient als Signal für die Messung mit diesem Instrumente. Da hierbei der Saal verdunkelt sein muss, befindet sich neben jedem Goniometer zur Ablesung der Theilung ein Leuchtbrenner, dessen Flamme, damit dieselbe in der Zwischenzeit bei der Einstellung nicht stört, durch Drehen des Hahnes gelöscht werden kann, während unter einer Metallhülle ein kleines Flämmchen weiter brennt, so dass beim Zurückdrehen des Hahnes die Leuchtflamme wieder erzeugt wird (Flürscheim's Patent s. Böhm u. Wiedemann's Preiscour.). Hierdurch ist es ermöglicht, dass der Beobachter die vollständige Messung durchführen kann, ohne seine Stellung am Tische zu ändern.

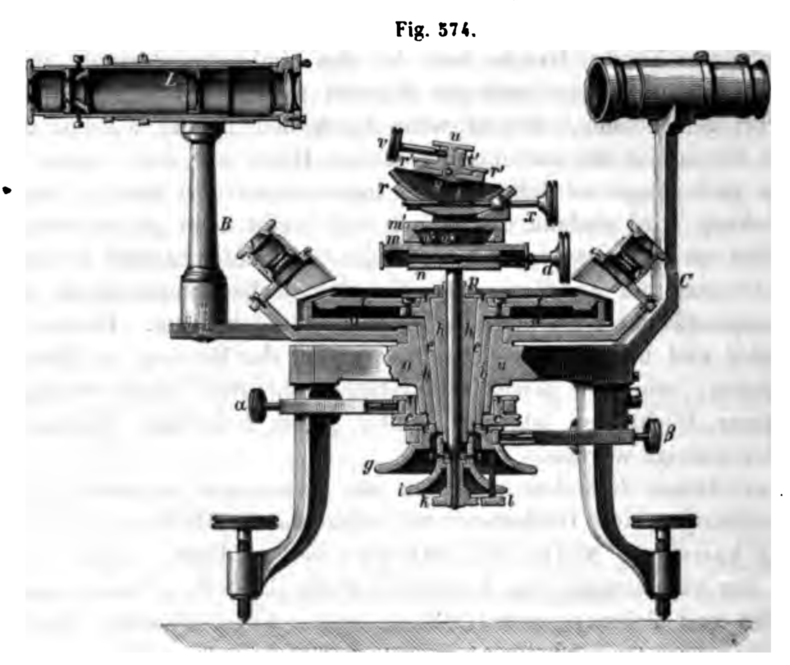
als Refractometer (zur Bestimmung der Brechungsexponenten) eingerichtet. Alle diese grösseren Instrumente, deren Theilkreise eine Ablesung auf Bruchtheile einer Minute gestatten, besitzen jedoch in der horizontalen Richtung ihrer Drehungsaxe eine Fehlerquelle, welche, bei den kleineren Instrumenten meist nicht in Betracht kommend, die Verwendung derartig construirter grösserer Apparate zu genauen Messungen ungeeignet machen. Zunächst, und dieser Nachtheil betrifft natürlich auch die vorbeschriebenen kleinen Goniometer, können mit denselben nur verhältnissmässig kleine Krystalle, resp. Prismen, untersucht werden, da grössere entweder beim Drehen durch ihr Gewicht sich senken oder überhaupt gar nicht mit Wachs an dem Ende der horizontalen Axe befestigt werden können. Aber selbst bei der Messung mässig grosser Krystalle bewirkt die ungleiche Einwirkung der Schwere auf die ungleichförmig um die Axe vertheilten Massen eine Biegung der letzteren und des Justirapparates, welche um so grösser ist, je mehr der Schwerpunkt jener Massen von der Axe abweicht; hierdurch entstehen während der zur Messung erforderlichen Drehung Bewegungen dieser Theile, welche von der des Limbus unabhängig sind und erfahrungsgemäss bis zu mehreren Minuten steigende Fehler der Messung hervorbringen können. Ferner wird durch den Druck, welchen die Axe auf die Innenseite der sie umschliessenden Hülse nur nach unten ausübt, letztere nach längerem Gebrauch des Instrumentes dort stärker abgenutzt; die Drehung wird alsdann excentrisch und bleibt nicht gleichmässig sanft. Besonders ist letzteres der Fall, wenn das Goniometer zugleich als Refractometer benutzt und zu diesem Zwecke das Beobachtungsfernrohr an den Kreis angeschraubt wird und denselben einseitig belastet. Ferner können Collimator und Beobachtungsfernrohr, was bei der Messung der Brechungsexponenten, wie bei gewissen krystallographischen Untersuchungen von besonderer Wichtigkeit ist, nicht unter jedem beliebigen Winkel gegen einander geneigt werden.

Aus diesen Gründen sind für alle genaueren krystallographischen Untersuchungen stets Goniometer mit horizontalem Theilkreis vorzuziehen, wie sie zuerst von Malus und Babinet vorgeschlagen wurden. Da bei diesen der Objectträger eine horizontale Platte darstellt, so kann man grosse Krystalle und Prismen, selbst mässig grosse Krystalldrusen, deren Zerkleinerung man zu vermeiden wünscht, darauf befestigen; ferner kann man unter beliebigen Incidenzwinkeln mit gleicher Leichtigkeit beobachten; kurz: bei verticaler Stellung der Drehungsaxe werden sämmtliche oben aufgeführte Uebelstände vermieden. Diejenigen Instrumente, welche den Anforderungen grösserer Genauigkeit und vielseitiger Verwendbarkeit am vollkommensten entsprechen und daher für krystallographische Untersuchungen jetzt fast allgemein benutzt werden, sind die von R. Fuess in Berlin gelieferten *), welche deshalb im folgenden § ausführlich beschrieben werden sollen

*) S. Dessen Preisverzeichniss am Schlusse dieses Buches.

§. 112. **Reflexionsgoniometer mit horizontalem Kreise.** Für fast alle krystallographischen Untersuchungen ausreichend, namentlich in Folge der mannigfachen von M. Websky vorgeschlagenen Verbesserungen, ist das Fuess'sche Goniometer No. 2, welches in Fig. 574 in ½ nat. Gr. dargestellt ist. Diese Figur ist so gezeichnet, dass der mittelste Theil des Instrumentes, d. h. die in einander geschobenen Axen, der Kreis und die Centrir- und Justirvorrichtung sowie auch das Beobachtungsfernrohr im Durchschnitt, die übrigen Theile dagegen in der Ansicht erscheinen. Das Ganze ruht auf drei mit Schrauben versehenen Füssen, und der Kreis kann daher, was jedoch für die Messungen nicht erforderlich ist, genau horizontal gestellt werden. Die Füsse sind an die kreisrunde dicke Messingplatte *o* (vergl. auch die Ansicht Fig. 575 S. 564) angeschraubt, welche, in der Mitte conisch durchbohrt, die hohlen Axen und den Kreis trägt. In der weiten Durchbohrung derselben sitzt zunächst eine conische Axe *b*; diese ragt nach

Fig. 574.



unten nur wenig über die Hülse, welche den untersten Theil von *o* bildet, hervor und ist oben fest verbunden mit einem Kreis *d*, der an zwei diametral entgegengesetzten Stellen eine Nonientheilung (Ablesung auf 30") besitzt; an diese Kreisscheibe ist endlich von unten her der horizontale Arm, welcher auf einer senkrechten Säule *B* das Beobachtungsfernrohr *L* trägt, angeschraubt, so dass durch Bewegung des letzteren sich auch der Nonienkreis *d* und die hohle Axe *b* um die Centralaxe des Instrumentes drehen. Diese Drehung kann durch Anziehen der Schraube *α* an jeder beliebigen Stelle arretirt werden, indem dadurch die an das untere Ende von

b angeschraubte Scheibe *c*, deren Rand ringförmig ausgeschnitten ist, gegen einen in diesem Ausschnitt liegenden und mit der Klemmschraube in Verbindung stehenden Ring gepresst wird. Dieselbe Arretirung kann aber auch mittelst einer von vorn durch *o* hindurchgehenden Schraube*) bewirkt werden, deren Ende, wenn sie fest angezogen ist, gegen einen Punkt der Aussenseite des Conus *b* drückt und diesen daher an der Drehung hindert. Für die Krystallmessung kann somit der Beobachter dem Fernrohr *L* diejenige Stellung geben, welche ihm die bequemste ist, und dasselbe dann in dieser fixiren, indem er die zuletzt erwähnte Schraube oder α fest anzieht, wodurch auch der Ort der beiden Nonien ein unveränderlicher geworden ist.

In *b* bewegt sich concentrisch die ebenfalls hohle Axe *e*, welche oben mit dem eigentlichen Theilkreise *f*, unten mit der am Rande gekerbten hohlen Scheibe *g* durch Verschraubung fest verbunden ist; durch Drehen der letzteren mit der Hand bewegt man somit, wenn Nonien und Fernrohr auf die oben angegebene Art fixirt sind, den Kreis und die inneren Axen, also auch den aufgesetzten Krystall, und kann daher die erfolgte Drehung an jedem der beiden Nonien ablesen. Diese Drehung kann nun arretirt werden durch die Schraube β, welche in Verbindung steht mit einem starken Ringe (im quadratischen Durchschnitt auf der linken Seite sichtbar), der den oberen Theil der Scheibe *g* umfasst; zieht man β an, so klemmt sie mit einem an ihrem Ende befindlichen parallelepipedischen Stück die Axe an jenen Ring fest. Die Schraube β ist aber ihrerseits nicht unmittelbar mit dem Stativ verbunden, sondern das lange Metallstück, welches die Schraubenmutter von β enthält, liegt auf der Hinterseite nur lose an dem Ende einer Schraube an, die den rechts befindlichen Fuss horizontal von hinten nach vorn durchbohrt, und deren Knopf in der Zeichnung nur zum kleinen Theil sichtbar ist; gegen das Ende dieser Schraube wird aber jenes Metallstück angepresst durch eine stählerne Feder. Dreht man die Schraube mittelst des Knopfes vorwärts, so giebt die Feder nach, das Metallstück und der Ring, folglich auch die darin festgeklemmte Axe *e* mit dem Krystall drehen sich, als wenn keine Arretirung existirte; dreht man die Schraube zurück, so folgt ihr das Metallstück wegen des Druckes der Feder nach, und der Krystall dreht sich nach der entgegengesetzten Seite, als vorher. Da man mittelst der Bewegung einer Schraube es viel besser in der Gewalt hat, eine kleine Drehung auszuführen, als mit freier Hand, so stellt man durch Drehen an der Scheibe *g* das von der Krystallfläche reflectirte Bild nur ungefähr im Gesichtsfeld des Fernrohrs ein, klemmt alsdann die Axe *e* und corrigirt die Einstellung mittelst der Feinstellschraube.

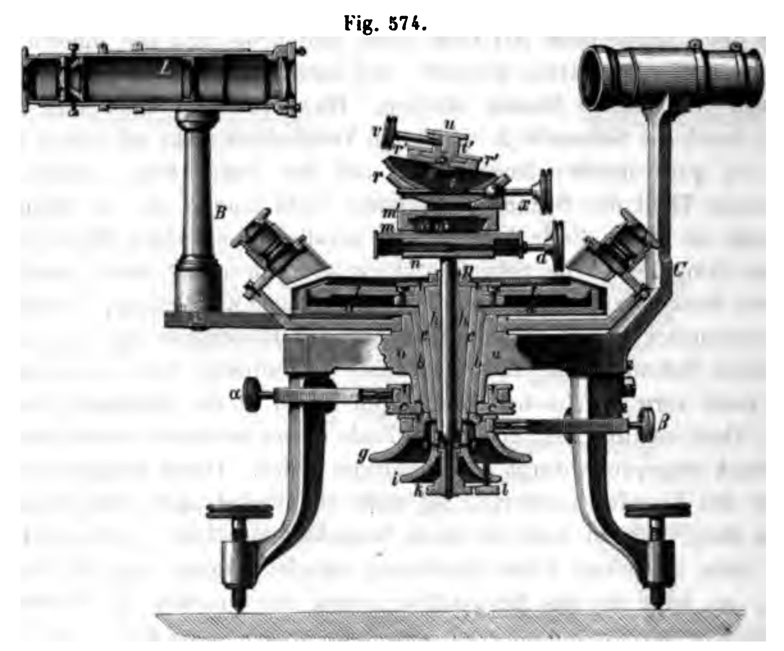
Innerhalb *e* ist die ebenfalls noch hohle Axe *h* sehr leicht drehbar, welche durch die Scheibe *i* bewegt wird, um die beim Centriren und

*) Da die Vorderseite in dem Durchschnitt Fig. 574 fortgenommen gedacht ist, konnte diese Schraube nicht zur Darstellung gelangen.

Justiren nöthigen Drehungen auszuführen, ohne zugleich den ganzen Kreis mitdrehen zu müssen, was eine überflüssige Abnutzung des Instrumentes zur Folge haben würde. Da die Einstellung mittelst der Drehung von *g* nur dann richtige Resultate liefern kann, wenn *h* und *i* ganz gleichmässig an der Drehung theilnehmen, so können diese durch Anziehen der Schraube *l* fest mit *g* verbunden werden. Für einen einigermaassen geübten Beobachter ist übrigens diese Verbindung überflüssig, da die Scheibe *g* so weit über *i* vorragt, dass man sie leicht drehen kann, ohne *i* zu berühren und dessen Stellung gegen *g* zu verändern.

In *h* steckt nun endlich die innerste cylindrische Axe, welche oben die Centrir- und Justirvorrichtung trägt. In ihrem untersten Theile ist dieselbe verjüngt und mit einem Schraubengewinde versehen, welches in einer Hülse läuft, deren unterster Theil die kleine, am Rande gekerbte Scheibe *k* bildet. Da der obere Theil dieser Hülse mit *i* so verbunden ist,

Fig. 574.

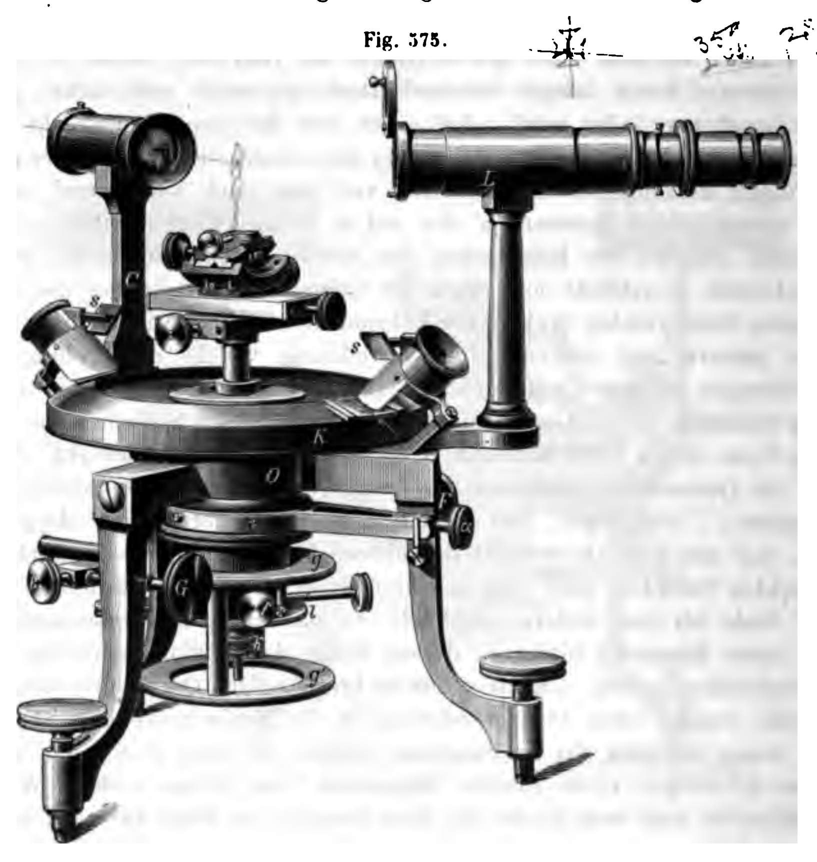


dass er zwar gedreht werden kann, aber immer in derselben Höhe bleiben muss (wie aus Fig. 574 deutlich zu ersehen), so bewirkt eine Drehung von *k* eine Bewegung der inneren Axe in verticaler Richtung (eine Drehung der letzteren ist durch eine eigene Vorrichtung verhindert). Man kann somit durch Drehen von *k* die innere Axe mit der Centrir- und Justirvorrichtung so weit heben oder senken, dass die zu messenden Flächen des Krystalls sich genau vor der Mitte des Objectivs des Beobachtungsfernrohrs befinden. Schliesslich kann man die innere Axe in der erforderlichen Höhe durch Anziehen der Klemmvorrichtung *p* (mittelst eines beigegebenen Schlüssels) fixiren.

Die Fuess'sche Centrir- und Justirvorrichtung ist in Fig. 574 ebenfalls im Durchschnitt sichtbar. Auf die zuletzt erwähnte innerste Axe des Goniometers ist das Metallstück *n* aufgeschraubt, welches von dem rectangulären Kasten *m* auf der Vorder- und Hinterseite so umfasst wird, wie es der darüber befindliche Querschnitt *m' n'* zeigt. Der Kasten *m* kann daher durch die Schraube *a* von rechts nach links oder umgekehrt verschoben werden und wird dabei in seiner Richtung geführt nicht nur durch die schrägen Seitenschienen, sondern auch noch durch zwei, das Metallstück *n* der Länge nach durchbohrende Stahlcylinder, welche mit *m* fest verbunden sind. Eine die Schraube *a* (auf der rechten Seite in der Figur) umwindende Spiralfeder presst das Stück *n*, die Schraubenmutter von *a*, gegen die eine Seite des Gewindes der Schraube, wodurch, selbst wenn letztere durch langen Gebrauch stark abgenutzt sein sollte, jeder »todte Gang« vermieden wird. Auf *m* ist nun der zweite senkrecht dazu bewegliche Schlitten befestigt, der genau die Construction des ersteren besitzt, daher dessen Querschnitt (*m'* der von vorn nach hinten und umgekehrt verschiebbare Rahmen, *n'* das auf *m* festgeschraubte Stück, *a'* die Schraube) zugleich zur Erläuterung des unteren dient; zu beiden Seiten der Schraube *a'* erblickt man auch im Querschnitt die beiden derselben parallelen Stahlcylinder, welche die Führung des Gleitens von *m'* bewirken. Dieses letztere trägt nun die Justirvorrichtung, welche die Drehung des Krystallträgers in zwei auf einander senkrechten Ebenen durch Gleiten zweier Schlitten, deren Gestalt ein Kreissegment ist, in Schienen von derselben Form erzielt. Die Schienen, *r* die untere in der Längsansicht, *r'* die obere im Querschnitt, umfassen die beiden Seitenränder des Schlittens, *t* der untere, *t'* der obere, von oben und unten in Form einer doppelten Rinne, wie aus dem Querschnitt des oberen Theils deutlich ersichtlich ist. Die beiden Schlitten sind nun an ihrer Unterseite in der Mittelzone von einem Ende bis zum andern gezähnelt, so dass diese Zone gleichsam ein Stück eines Zahnrades bildet, in dessen Zähne das Gewinde einer horizontalen Schraube (*x*, resp. *y*, letztere nur im kreisförmigen Querschnitt sichtbar) eingreift, welche ohne Ortsveränderung in der Schiene drehbar ist, und durch deren Drehung das Kreissegment folglich in jener verschoben wird. Da der Kreisbogen eines solchen Segmentes etwa einem rechten Winkel entspricht, so sieht man leicht ein, dass dasselbe um etwa 40° nach rechts oder links gedreht werden kann, ohne dass die Stabilität des Krystallträgers gefährdet ist; diese Weite der Grenzen, innerhalb deren man den Krystall neigen kann, hat aber den grossen Vortheil, dass man zwei Flächen noch immer zu justiren im Stande ist, selbst wenn man sie, weil ihre Kante nicht sichtbar (zerbrochen oder durch andere Flächen weggenommen), sehr schief auf den Krystallträger aufgesetzt hatte. Beide Segmente haben einen gemeinsamen Drehungspunkt, welcher so hoch über dem Krystallträger *u* liegt, dass man die zu messende Kante eines kleinen, wie eines ziemlich grossen Krystalls leicht in jene Höhe bringen kann, in welcher er

seinen Ort beim Justiren nicht mehr wesentlich ändert. In den oberen Schlitten ist ein kreisrundes Loch eingebohrt, in welchem der Fuss des horizontalen Tischchens *u*, auf das der Krystall mit Wachs aufgesetzt wird, durch eine kleine Schraube *v* festgehalten ist. Um auch in den Justirschrauben jeden todten Gang zu vermeiden, werden dieselben durch eine horizontale Feder gegen das Schraubengewinde der Schlitten angepresst; den Querschnitt der zu *x* gehörigen und mit *r* vorn und hinten verbundenen Feder sieht man in Fig. 574 unter dem linken Ende der Schraube *x*. Noch besser sind diese Federn sichtbar in der, zugleich zur Verdeutlichung der vorstehenden Beschreibung zu vergleichenden Ansicht Fig. 575.

Fig. 575.



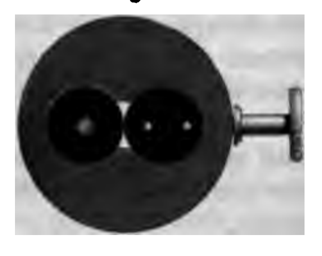
Betreffs der Kreistheilung des Instrumentes ist noch anzuführen, dass dieselbe auf einer schräg nach aussen abfallenden conischen Fläche angebracht ist und in einer Ebene liegt mit den beiden auf *d* befindlichen Nonientheilungen. Beide Theilungen sind durch eine ringsum laufende Messingkappe (in Fig. 575 mit *K* bezeichnet), welche unten mit *d* fest verbunden ist, verdeckt und so gegen Verunreinigungen geschützt. An der Stelle der beiden Nonientheilungen sind in diesen Schutzring rectanguläre Fenster eingeschnitten und durch ebene Glasplatten geschlossen. Durch

die letzteren hindurch erfolgt die Ablesung mittelst zweier diametraler Lupen, welche mit je einem halbcylindrischen Hornblatt behufs Zerstreuung des durch einen kleinen Spiegels *s* (s. die Ansicht Fig. 575) auf die Theilung geworfenen Lichtes versehen sind: durch einen Träger steht jede Lupe mit einem den Stativtheil *o* umfassenden Ringe in Verbindung, welcher drehbar ist, so dass man die Lupe längs der Nonientheilung verschieben kann.

Durch den Arm *C* ist fest mit dem Stativ verbunden das Collimatorrohr, welches an der den Krystallen zugewandten Seite eine achromatische Linse trägt, in deren Brennpunkt die verschiedenen Signale durch Einschieben derselben am anderen Ende des Rohres gebracht werden können. Es sind dies die folgenden:

a) Der sogenannte Websky'sche Spalt (s. Fig. 576 in natürl. Grösse), welcher aus zwei, vor einer kreisrunden Oeffnung angebrachten und durch eine Schraube bis zur Berührung verschiebbaren, kreisförmigen, geschwärzten Metallscheiben besteht; diese Vorrichtung vereinigt die Vortheile eines engen und eines weiten Spaltes, da die Verengerung in der Mitte des hellen Bildes eine sehr genaue Einstellung gestattet, andererseits Licht genug durch den Spalt hindurchgeht, um auch bei der Reflexion von sehr kleinen oder unvollkommenen Flächen noch den oberen und unteren Theil als zwei helle Flecke erscheinen zu lassen, welche wenigstens eine approximative Einstellung ermöglichen.

Fig. 576.



b) Ein geradliniger Spalt, wie er besonders bei der Messung von Brechungsexponenten benutzt wird, durch eine Schraube von der totalen Berührung der beiden Schneiden bis zur Breite von $1\frac{1}{2}$ mm verstellbar.

c) Eine runde Oeffnung von 0,5 mm Durchmesser, welche dazu dient, geringe Abweichungen von Flächen aus der Zone oder die Gruppirung der mehrfachen Reflexe geknickter, aus mehreren Facetten bestehender Flächen zu bestimmen.

d) Das sogenannte Schrauf'sche Signal (s. Fig. 577, nat. Gr.), welches vortheilhaft an Stelle des früher verwendeten Fadenkreuzes (s. S. 558) in hellem Felde gesetzt wird, weil letzteres das Auge sehr ermüdet. Dasselbe besteht aus einem unter 45° gerichteten Kreuzspalt, in dessen Mitte sich ein aufrechtes Fadenkreuz befindet, welches bei der Reflexion an sehr vollkommenen Flächen auch im Spiegelbilde erkennbar ist und die genaueste Einstellung gestattet. Das Signal hat nun den weiteren Vortheil vor dem gewöhnlichen Fadenkreuz, dass es auch verwendbar ist, wenn die zu messenden Krystallflächen nicht so vollkommen

Fig. 577.



und so gross sind (und dies ist der bei weitem häufigste Fall), dass das von ihnen gespiegelte Bild das feine Fadenkreuz noch erkennen lässt: man stellt alsdann auf die Mitte des hellen Kreuzes ein, was offenbar, wenn das Bild einigermaassen scharf ist, immer noch mit ziemlicher Genauigkeit bewerkstelligt werden kann (s. A. Schrauf, Zeitschr. f. Kryst. 3, 356).

Vor das jedesmalige Signal wird, um es zu beleuchten, ein Argand'scher Gasbrenner oder eine Petroleumlampe gesetzt, deren Licht durch einen passenden Schirm vom Beobachter abgehalten wird, so dass dasselbe nur auf das Signal fällt. Eine weit grössere Helligkeit des letzteren erhält man durch Concentration des Lichtes mittelst einer Beleuchtungslinse; zu diesem Zwecke wird ein mit einem seitlichen Fenster versehenes Rohr, welches vorn eine Linse von etwas grösserem Durchmesser, als das Objectiv des Collimators, enthält, vor dem Signal aufgesteckt; die Lampe wird so vor die Beleuchtungslinse gestellt, dass gerade auf dem Signal ein scharfes umgekehrtes Flammenbild entsteht, was man durch das seitliche Fenster des Rohres zu beobachten im Stande ist. In das Rohr dieses Beleuchtungsapparates kann vor dem Aufstecken desselben ein Nicol'sches Prisma (bei der Messung der Brechungsexponenten doppeltbrechender Prismen erforderlich) eingeschoben und auch nach dem Aufstecken (durch das Fenster) um die Axe des Rohres gedreht werden; durch Marken an letzterem und an der Fassung des Nicols ist es ermöglicht, hierbei dem Hauptschnitt des letzteren die erforderliche Stellung mit genügender Genauigkeit zu verleihen.

Das Beobachtungsfernrohr *L* ist, wie schon erwähnt, durch den horizontalen Arm, auf welchem die Säule *B* ruht, fest mit dem Nonienkreise verbunden. Vor dem Objectiv, welches aus einer, dem Objectiv des Collimators ähnlichen achromatischen Linse besteht, kann eine in einen Anschlag fallende Lupe vorgeschlagen werden; damit wird das Fernrohr in ein schwach vergrösserndes Mikroskop umgewandelt, durch welches man den auf dem Träger *u* befindlichen Krystall erblickt und daher im Stande ist, die Centrirung der zu messenden Kante durch Einstellung auf das Fadenkreuz des Oculars sehr genau vorzunehmen. Dem Beobachtungsfernrohr sind folgende vier verschiedene Oculare beigegeben:

α) Eine achromatische Doppellinse, welche eine sechs- bis siebenfache Vergrösserung bewirkt und daher eine sehr genaue Einstellung des Signalbildes gestattet.

β) Eine achromatische Doppellinse mit dreifacher Vergrösserung, welche für die meisten Messungen ausreicht und daher häufiger verwendet wird.

γ) Eine Linsencombination, welche kaum zweimal vergrössert und daher wegen ihrer Lichtstärke bei schwachen und gestörten Reflexen mit Vortheil verwendet wird.

δ) Zwei Linsen, von denen eine vor das Objectiv gesetzt wird; diese Combination bewirkt eine Verkleinerung des Signalbildes um das dreifache

und lässt im dunklen Raume und bei guter Abblendung noch die Reflexe der allerkleinsten, nur mit der Lupe sichtbaren Flächen erkennen.

Jedes der Rohre, in welchen sich diese Oculare befinden, kann in das Objectivrohr *L* eingeschoben werden, und damit seine richtige Stellung in demselben jedesmal rasch gefunden werde, ist es mit einem Klemmring umgeben, welcher eine vorspringende dreieckige Nase besitzt; der Ring ist durch eine Schraube so auf dem Ocularrohr festgeklemmt, dass letzteres richtig eingeschoben ist, wenn die Nase des Ringes in einen ihr entsprechenden Kerb des Objectivrohres genau passt. Ebensolche Klemmringe tragen zu demselben Zwecke auch die in den Collimator einzuschiebenden Rohre mit den verschiedenen, S. 565 erwähnten Signalen.

Ueber die Prüfung und Justirung des vorbeschriebenen Instrumentes s. M. Websky, Zeitschr. f. Kryst. 4,545 f.

Die perspectivische Ansicht Fig. 575 (in $\frac{1}{4}$ natürl. Grösse) bezieht sich auf das in Fuess' Preisverzeichniss (s. am Schlusse dieses Buches) als No. 2*a* bezeichnete Goniometer, welches genau dieselbe Grösse und Construction wie No. 2 besitzt, aber noch dadurch vervollständigt ist, dass die Verbindung der beiden Scheiben *g* und *i* (Fig. 574), anstatt durch die einfache Schraube *l*, ebenfalls durch eine Feinstellbewegung mit der Klemmschraube *f* bewirkt wird. Da man in Folge dessen mit der Hand weniger gut an die Drehscheibe *g* gelangen kann, so sind an dieselbe zwei nach unten gehende Metallpfeiler angesetzt, und diese tragen einen mit *g* gleich grossen und parallelen Ring *g'*, mittelst dessen nun der betreffende Axenconus nebst dem Theilkreise sehr bequem gedreht werden kann.

Als Modell No. 3 liefert R. Fuess ein einfacher ausgerüstetes Instrument, ebenfalls von gleichen Dimensionen wie No. 2, aber von demselben dadurch verschieden, dass die bei der Messung von Brechungsexponenten zu benutzende Feinstellbewegung α weggelassen, daher der Apparat nur für Krystallmessungen eingerichtet ist; aus diesem Grunde wird demselben auch nur das gewöhnliche Ocular mit 2facher Vergrösserung (γ) und nur ein Signal (der Websky'sche Spalt, nicht verstellbar) beigegeben.

Für sehr genaue Messungen, namentlich Untersuchungen über die Aenderungen der Krystallwinkel mit der Temperatur, welche ja stets sehr klein sind, bedarf es eines noch grösseren Instrumentes, wie es in Fig. 578 in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Grösse abgebildet ist. Dieselbe ist eine Ansicht des von Fuess als Modell No. 1 gelieferten grossen Goniometers, während Fig. 579 den mittleren Theil im Durchschnitt darstellt. Zwischen Dreifuss und Kreis befindet sich ein fest mit dem Stativ des Goniometers verbundener, verhältnissmässig hoher und starker Metallcylinder *a*, welcher von den inneren Axen durchbohrt wird. Um diese Hülse drehen sich, der eine über dem andern und durch Rinnen geführt, zwei Ringe, deren jeder nach einer

Seite einen horizontalen Arm (*i*, resp. *h*), an welchem auf einer Säule ein Fernrohr ruht, nach der andern ein Gegengewicht (*J* und *H*) trägt. Die beiden Fernröhre *K* und *L* sind daher ganz von einander unabhängig beweglich und können in jede beliebige Stellung gebracht (zu welchem Zwecke die Fernrohrträger mit kleinen Handhaben versehen sind) und durch Klemmschrauben darin fixirt werden; eine bestimmte Stellung eines jeden der-

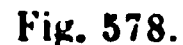


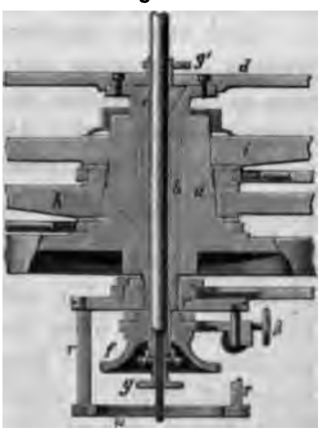
Fig. 578.

selben kann ferner durch eine Feinstellschraube (die am linken Fernrohr befindliche ist in der Figur dem Beobachter zugekehrt) in beliebiger Schärfe hergestellt werden. Hierdurch ist man im Stande, mit dem Instrument alle Arten von optischen Untersuchungen anzustellen, bei denen es sich um Bestimmung der Richtung von auffallenden, reflectirten oder gebrochenen Strahlen handelt; um hierbei auch polarisirtes Licht anwenden zu können,

ist auf das Ocular jedes Fernrohrs ein um seine Axe drehbares Nicol'sches Prisma mit einem kleinen Theilkreis, der die Stellung des ersteren angiebt, aufzustecken. Die Oculare, wie die Signale und der Beleuchtungsapparat dieses Instrumentes sind die entsprechenden, wie bei Modell 2, nämlich *a*, *b*, *d* und α, β, γ (s. S. 565, 566), und werden in derselben Weise je nach Bedarf in die Objectivrohre eingeschoben; die Klemmringe *n*, welche hierbei die richtige Stellung angeben, sind in Fig. 578 deutlich sichtbar, derjenige des Fernrohres *L* mit der Seite, an welcher die Klemmung mittelst eines Schlüssels ausgeführt wird.

Durch die oben erwähnte cylindrische Hülse *a*, um welche sich die Fernrohrträger drehen, geht nun zunächst eine hohle, oben und unten conische Axe *b* (s. Fig. 579). Diese trägt oben den horizontalen Theilkreis *d*; ihre Bewegung wird mittelst der obersten und grössten *c* der drei zwischen den Füssen des Goniometers befindlichen Scheiben oder, noch bequemer, mittelst der durch die Pfeiler *r* damit fest verbundenen Scheibe *u* ausgeführt. Diese Drehung wird bei einer Krystallmessung benutzt, und kann die betreffende Axe durch die Schraube *x* geklemmt und mit der zugehörigen Feinstellschraube fein gestellt werden. In dieser Axe steckt concentrisch eine zweite *e*, ebenfalls hohl (der Axe *h* in der Fig. 574 entsprechend) und durch die zweite kleinere Scheibe *f* von unten her zu bewegen; auch hier kann eine feine Einstellung durch Anziehen der Klemmschraube β und Drehung der zugehörigen Mikrometerschraube erfolgen. Diese Axe trägt oben die Centrir- und Justirvorrichtung, welche gleich der vorher beschriebenen ist, nur dass auf dieselbe nach Erforderniss auch ein grösseres Tischchen aufgesetzt werden kann. Sie kann ebenso wie bei dem Instrument Fig. 574 in das erforderliche Niveau gebracht werden dadurch, dass die letzte und innerste Axe, auf der sie befestigt ist, unten ein Schraubengewinde trägt, welches durch Drehen des untersten in Fig. 578 u. 579 sichtbaren Knopfes *g* auf und nieder bewegt wird. Die Ablesung geschieht bei diesem grossen Instrumente durch zwei Mikroskope, welche mit den Fernröhren fest verbunden sind. Der untere, senkrechte Theil derselben *N* enthält das Objectiv, auf welches das Licht von der Theilung durch eine Oeffnung in der schrägen weissen Fläche fällt; letztere dient dazu, die Theilung zu beleuchten, indem sie das Licht einer seitlich aufgestellten Lampe zerstreut reflectirt. Die Strahlen passiren dann das Innere des Fernrohrs und über demselben einen Kasten *o*, an welchem eine Mikrometerschraube *o'* befestigt ist; alsdann werden sie durch ein totalreflectirendes Prisma abgelenkt und gehen endlich durch den schräg gerichteten, das Ocular enthaltenden

Fig. 579.



Theil *M*, welcher, auf dem senkrechten Theile drehbar, in jede dem Beobachter bequeme Richtung gebracht werden kann. Dieser erblickt nun im Mikroskop ausser der Theilung des Kreises *d* noch einen in der Bildebene befindlichen und durch die Mikrometerschraube *o'* beweglichen Doppelfaden, dessen Ort auf der Theilung dadurch bestimmt wird, dass man denselben durch Drehen von *o'* auf den vorhergehenden Theilstrich zurück verschiebt. Da der Abstand der Theilstriche auf dem Kreise 10' beträgt, die Trommel *o'* aber in 60 Theile getheilt ist, so entspricht die Drehung der Trommel um einen Strich einer Verschiebung des Fadens um 10", und da die Zehntel eines Theiles auf der Trommel noch geschätzt werden können, so vermag man mit diesem Instrumente die einzelnen Secunden abzulesen. Es leuchtet aus der Beschreibung des Apparates ein, dass mit dieser Genauigkeit sowohl der Winkel zwischen den beiden Fernröhren, resp. die Grösse einer mit denselben ausgeführten Drehung, als auch der Winkel, um welchen, bei fester Stellung der Fernröhre, der Kreis *d* mit einem darauf befestigten Krystall gedreht worden ist, gemessen werden kann.

Eine etwas eingehendere Beschreibung dieses grossen Goniometers, welches naturgemäss nur verhältnissmässig selten gebraucht wird, findet man in dem Berichte über die wissenschaftlichen Instrumente der Berl. Gew.-Ausstellung v. J. 1879 (Berlin 1880), S. 321 f.

Will man dieses Goniometer zur Messung von Krystallwinkeln in höherer Temperatur anwenden, so muss man mit demselben ein Luftbad verbinden, in welchem sich der Krystall befindet. Man kann hierzu einen Metallkasten von 40—50 mm Höhe verwenden, dessen Boden in der Mitte ein kreisrundes Loch hat und der durch einen Deckel geschlossen werden kann. Derselbe muss drei Fenster, d. h. kurze Ansatzröhren mit planparallelen Glasplatten geschlossen, besitzen. Nach zwei gegenüberliegenden Seiten ist er mit je einer am Ende geschlossenen Metallröhre in Verbindung, deren äusserster Theil durch Gasflammen erhitzt wird, bis der ganze Innenraum eine constante Temperatur angenommen hat, welche durch zwei Thermometer gemessen wird, die durch den Deckel hineinreichen. Den Erhitzungskasten legt man mit beiden Enden auf je eine Gabel eines eisernen Stativs, an welchem zugleich ein Bunsen'scher Brenner befestigt ist, so auf, dass die Oeffnung in dem Boden des Mittelraums sich unmittelbar über der Centrir- und Justirvorrichtung befindet. Auf letztere wird statt des Tischchens eine kleine verticale Messingpincette zum Halten des Krystalls angeschraubt, welche sich zum grösseren Theile im Innern des Kastens befindet, so dass der Krystall gerade in dessen Mitte durch die beiden gegenüberliegenden Fenster gesehen werden kann. Um die zur ungehinderten Drehung nothwendig weite Oeffnung an der Unterseite des Luftbades möglichst zu schliessen, dient ein kreisförmiges Metallplättchen, welches halbirt und mit Charnier wie eine Scheere geschlossen werden kann; dasselbe hat in der Mitte ein Loch von dem Durchmesser des Stiels

der Pincette und verschiebt sich mit dieser, wenn es um dieselbe herumgelegt worden ist. Zur Krystallmessung stellt man das eine Fernrohr senkrecht auf die Glasscheibe des hinteren Fensters, das andere normal zu dem seitlich gelegenen vorderen; alsdann bilden beide einen Winkel von 135° mit einander, und bei passender Stellung einer Krystallfläche wird das Bild des Fadenkreuzes des hinteren Fernrohrs, von derselben reflectirt, in das vordere gelangen. Denselben Apparat kann man auch dazu benutzen, die Brechungsexponenten eines in höherer Temperatur befindlichen Prismas zu bestimmen. Giebt man demselben nämlich einen so grossen Winkel, dass die im Minimum dadurch hervorgebrachte Ablenkung etwa 45° beträgt, so kann man, durch die beiden gegenüberliegenden Fenster blickend, das directe Bild des am hinteren Fernrohr angebrachten Spaltes und durch das seitliche Fenster das abgelenkte Bild desselben im Beobachtungsfernrohr einstellen.

Ueber die Ausführung von Messungen mit diesem grossen Apparate bei verschiedenen Temperaturen siehe namentlich A. Arzruni, Zeitschr. f. Kryst. 1, 169; L. Calderon, ebenda 4, 505; J. Beckenkamp, ebenda 5, 440 und 6, 450; A. Schrauf, ebenda 9, 435.

Anmerkung: Ein kleines, aber für gewöhnliche Krystallmessungen ausreichendes Goniometer mit zwei Fernröhren bildet zugleich einen Theil des in §. 117—120 beschriebenen krystallographisch-optischen Universalapparates, s. §. 120.

§. 113. **Methode der Messung mit dem Reflexionsgoniometer.** Die Genauigkeit der Messung einer Krystallkante hängt hauptsächlich ab von der Beschaffenheit der sie bildenden Flächen; sind diese uneben, gebrochen oder wenig spiegelnd*), so kann auch das genaueste Instrument den Beobachter nicht zu einer andern als einer approximativen Kenntniss der Winkel verhelfen, die nur dadurch der Wahrheit mehr genähert wird, dass Derselbe eine grössere Zahl von Krystallen untersucht und das Mittel

*) Es versteht sich von selbst, dass die Krystalle in sorgfältig gereinigtem Zustande auf das Goniometer gebracht werden müssen. Sind die Flächen derselben nicht vollkommen rein, so reibt man sie trocken oder mit Alkohol in einer Falte vom weichsten Putzleder und fasst sie dann an einer Stelle, welche zur Messung nicht benutzt werden soll, mit der Spitze eines kleinen Kegels von gelbem Wachse, das man durch Kneten mit den Fingern zuvor möglichst weich gemacht hat. Dieser Wachskegel wird dann auf den Krystallträger des Instrumentes aufgesetzt; derselbe muss daher, wenn der Krystall schwer ist, ziemlich massig sein, um Senkungen des letzteren zu vermeiden. Bei sehr genauen Messungen grösserer Krystalle ist es jedenfalls zu empfehlen, als Unterlage Siegellack zu nehmen, auf welchem die Befestigung mit wenig Wachs vorgenommen wird, oder nach dem Aufsetzen bis zur Vornahme der Messung einige Zeit zu warten. Bei der Messung kleiner Flächen ist es vortheilhaft, das Wachs durch eingekneteten Russ zu schwärzen, da das von dem hellen Wachskegel in das Gesichtsfeld geworfene zerstreute Licht bei der Einstellung sehr lichtschwacher Reflexe einigermaassen stört.

aus den Resultaten zieht. Trotzdem muss der Beobachter es sich stets zur Vorschrift machen, alle Fehler, welche durch mangelhafte Centrirung, Justirung und dergl. hervorgebracht werden können, so weit zu vermeiden, dass die erhaltenen Resultate so genau sind, als es bei der Beschaffenheit der Flächen nur irgend möglich ist.

Im Folgenden sollen nun die verschiedenen zur Messung gel Manipulationen und die bei denselben möglichen Fehler behandelt we

1) Wahl des Signales. Die Wahl desjenigen leuchtenden ectes, dessen Bild von den Krystallflächen reflectirt werden soll, muss von deren Beschaffenheit abhängig gemacht werden. Das vorthei ist, wie schon früher bemerkt, das Fadenkreuz eines zweiten Fernrohrs, dieses lässt sich nur bei sehr vollkommenen Flächen anwenden. Bei in den meisten Fällen erhält man kein Reflexbild desselben von den Fl und muss sich daher nach einem lichtstärkeren Object umsehen. Als ist bei den S. 553 f. beschriebenen kleinen Instrumenten zu em ein durch eine Gasflamme beleuchteter kreuzförmiger Schlitz in gen der Entfernung (s. S. 575); hierbei muss aber ein dunkles Zin Verfügung stehen und womöglich auch die Ablesung des Instru n bei künstlicher Beleuchtung stattfinden (s. S. 558 Anmerk.). Will letztere vermeiden, so kann man an einem Fenster in 6—8 m Entfe vom Goniometer einen schwarzen Schirm mit einer kreisförmigen O anbringen und auf diese einstellen. Doch müssen alsdann die Kr flächen schon ziemlich gross und gut spiegelnd sein, um bei Tag genügend helles Bild im Fernrohr erkennen zu lassen.

Je kleiner das Bild des leuchtenden Objectes ist, desto besser ein Urtheil über die Beschaffenheit der spiegelnden Fläche; ist diese ganz eben, so erblickt man im Fernrohr mehrere Bilder des Objectes, ein verwaschenes, in die Länge gezogenes oder sonstwie entstelltes Es ist zu empfehlen, bei jeder Einstellung eines Reflexbildes ssen schaffenheit bei der Ablesung zu notiren; dies kann am kürze n eine der Fläche ertheilte Censur (*a*, *b*, *c*) geschehen; zwei na i Bilder sind einzeln einzustellen und abzulesen. Hierdurch Stande, bei Herleitung der Endresultate die einzelnen Zahlen t auf ihre Zuverlässigkeit zu benutzen.

Die in §. 112 beschriebenen Goniometer mit horizontalem Kreise bedürfen keiner Distanz zur Aufstellung des Signals, da dieses sich im Collimatorrohr befindet und durch eine dicht vor letzteres zu stellende Lampe beleuchtet wird. Von den bereits S. 565 besprochenen Signalen dient dasjenige mit der kleinen kreisrunden Oeffnung nur dazu, sehr kleine Knickungen und sonstige Unvollkommenheiten der spiegelnden Fläche zu erkennen, und ist wegen der Kleinheit des Bildes, wie aus dem Vorhergesagten hervorgeht, hierzu ganz vorzüglich geeignet. Zu den eigentlichen Messungen bedient man sich entweder des Websky'schen Spaltes oder des Schrauf'schen Signales, über welche S. 565 das Nöthige gesagt ist.

Ehe man die Messung beginnt, hat man das Ocular des Beobachtungsfernrohrs so einzustellen, dass das Object, sei es eine entfernte beleuchtete Oeffnung, sei es das Fadenkreuz oder der Spalt des andern Fernrohrs, direct gesehen ganz scharf erscheint, ebenso das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs, und dass beide bei einer Bewegung des Auges sich gar nicht gegen einander verschieben, d. h. dass das Bild des Objects und das Fadenkreuz genau in einer Ebene liegen.

Centrirung. Um diese vorzunehmen, muss der Krystall selbst, resp. die zu centrirende Kante, in dem auf die Axe des Goniometers gerichteten Beobachtungsfernrohre sichtbar gemacht werden. Bei den kleinen S. 553f. beschriebenen Instrumenten geschieht dies einfach dadurch, dass man das Ocularrohr des Fernrohrs entfernt, dessen Objectiv alsdann wie eine Lupe wirkt, durch welche man den Krystall erblickt und somit sehen kann, ob die zu messende Kante bei der Drehung an ihrem Orte verbleibt (s. S. 554). Bei dem vollkommneren, in §. 112 behandelten Goniometern wird die Vorschlaglinse (s. S. 566) bis zum Anschlag herabgedrückt und dadurch das Fernrohr in ein Mikroskop verwandelt, welches auf den Krystall eingestellt ist.

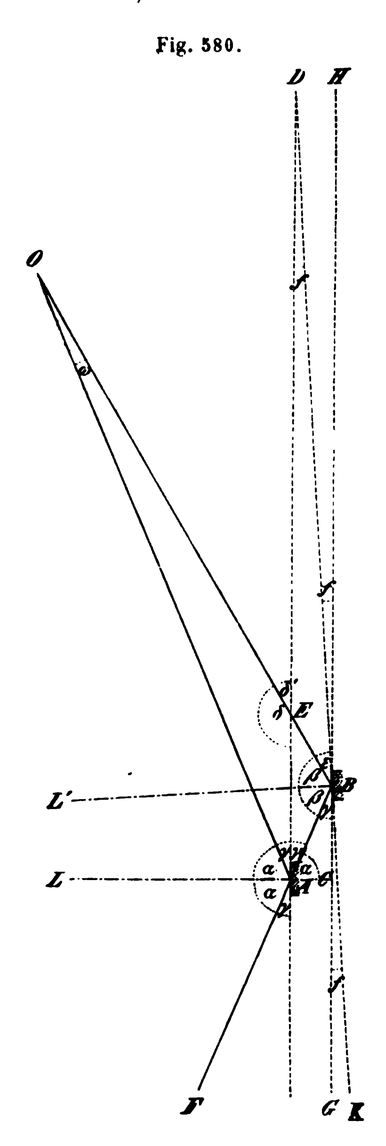
In allen Fällen setzt man den letzteren auf dem Tischchen *u* so auf, dass die zu messende Kante schon von vornherein nach dem Wiedereinsetzen nahezu centrirt ist; alsdann bringt man durch Verschiebung des Fernrohres *f* Fig. 573 dieses in die gleiche Entfernung vom Kreise oder, bei den horizontalen Instrumenten, z. B. Fig. 574, den Krystall in die richtige Höhe durch Drehen der Scheibe *k*. Nunmehr stellt man eine der beiden Centrirschrauben (*y* Fig. 573)*) parallel dem Fernrohr und bewegt durch die zweite die zu centrirende Krystallkante nach oben oder unten, bei den horizontalen Instrumenten nach rechts oder links, bis sie in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint; alsdann dreht man an der Scheibe *A* Fig. 573 (*i* Fig. 574) um 90° und wiederholt das Gleiche mit der andern Schraube: ist das Fernrohr genau auf die Drehungsaxe gerichtet, so steht nunmehr die Kante im Gesichtsfelde still, d. h. sie ist centrirt. Ist die zu messende Kante jedoch nicht ausgebildet oder abgebrochen, so muss man jedesmal die Axe so weit drehen, dass die Krystallfläche im Fernrohr eben verschwindet, d. h. zu einer geraden Linie verkürzt erscheint (dabei fällt die Fernrohraxe in die Ebene der Krystallfläche), und muss diese Linie jedesmal in die Mitte des Gesichtsfeldes bringen.

Mit welcher Genauigkeit die Centrirung einer Kante erreicht werden muss, darüber erhält man am besten Rechenschaft, wenn man untersucht, welchen Einfluss auf das Resultat der Messung eine ungenaue Centrirung ausübt.

*) Noch besser sind diese beiden Schrauben mit den durch sie zu verschiebenden parallelepipedischen Kästen zu sehen in Fig. 575.

Sei in Fig. 580 A ein Punkt der reflectirenden Krystallfläche, deren Durchschnittsrichtung mit der Ebene, in welcher die Reflexion stattfindet, AD; sei O das leuchtende Object, OA der unter dem Winkel α auffallende Lichtstrahl, AF der in das Fernrohr reflectirte; ausserdem reflectiren auch die andern Punkte der Fläche, so dass divergente Strahlen auf das Objectiv des Beobachtungsfernrohrs auffallen; diese werden aber alle zu einem Bilde von O vereinigt, da ihre Richtung so ist, als ob sie alle herkämen von einem Punkte, der symmetrisch zu O in Bezug auf die Spiegelebene liegt. Demnach ist es gleichgültig, an welcher Stelle innerhalb der Ebene AD die reflectirende Fläche liegt; das Bild wird auch an derselben Stelle im Fernrohr zu Stande kommen, wenn es von der andern Fläche (nach der Drehung) reflectirt wird, wenn diese nur parallel AD und zugleich in dieselbe Ebene, nicht rechts oder links, fällt. Ist dagegen der letzten Bedingung nicht genügt, so ist das virtuelle Bild von O hinter dem Spiegel jetzt an einem andern Ort, also auch die Richtung der von ihm herkommenden Strahlen, d. h. die Stellung seines Bildes im Fernrohr eine andere, und es muss die Krystallfläche um einen Winkel vor oder zurück gedreht werden, um dieselbe Einstellung zu erhalten. Um so viel aber, als diese Drehung beträgt, wird das Messungsresultat falsch, da der gesuchte Kantenwinkel gleich ist dem Winkel, um welchen man den Krystall drehen muss, damit die zweite Krystallfläche derjenigen Ebene, in welcher sich vorher die erste befand, parallel wird. Sei nun B Fig. 580 ein Punkt der zweiten Krystallfläche, BD deren Lage, nachdem der Krystall so weit gedreht worden ist, bis das reflectirte Bild von O im Fernrohr an derselben Stelle (Mitte des Fadenkreuzes) erscheint, wie vor der Drehung das von der ersten Fläche zurückgeworfene, d. h. bis die Richtung BF mit AF zusammenfällt; sei ferner $GH \parallel AD$, so ist offenbar die Differenz der abgelesenen Drehung und des gesuchten Winkels, d. h. der Fehler des Resultats = dem Winkel f, welchen die beiden Ebenen AD

Fig. 580.



und BD mit einander bilden. Dessen Grösse ergiebt sich auf folgende Weise:

Da $\delta' = \varepsilon + f$ zugleich der Aussenwinkel des Dreiecks AEO, so ist

$$\gamma + \omega = \varepsilon + f,$$

und da

$$\varepsilon = \gamma + f$$

(weil $KBL' = \gamma + f + \beta = L'BD = \varepsilon + \beta = 90^0$), so ist

$$\omega = 2f.$$

Da ferner

$$AB = \frac{AC}{\sin\gamma}$$

und da im Dreieck ABO

$$\sin\omega = \frac{AB \cdot \sin 2\gamma}{BO} = \frac{AC}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin 2\gamma}{BO},$$

so ist, weil $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma \cdot \cos\gamma$,

$$\sin\omega = \frac{AC}{BO} \cdot 2\cos\gamma.$$

Hieraus sieht man, dass der Fehler f, d. i. $\frac{\omega}{2}$, um so kleiner wird, je grösser BO, d. h. die Entfernung des Objects vom Krystall; benutzt man also, wie es bei den kleinen Goniometern Fig. 573 geschieht, eine erleuchtete Oeffnung in einem dunklen Schirme als Object, so hängt es von deren Entfernung ab, wie gross f wird; ferner von dem Winkel γ, denn ω, also auch f, wächst mit abnehmendem γ (gewöhnlich stellt man das Fernrohr so, dass $\gamma = 30^0$—40^0). Sei z. B. der Abstand AC der beiden Ebenen, in welche wegen unvollkommener Centrirung die eine und die andere Krystallfläche zu liegen kommen, = 1 Millimeter, der Abstand der Flamme = 5 Meter, $\gamma = 30^0$, so wird der entstehende Fehler $f = 0' 36''$; setzt man dagegen die Flamme auf eine Entfernung von 10 Meter, so wird, bei sonst gleichen Verhältnissen, $\omega = 0' 36''$, d. h. $f = 0' 18''$. Man hat also womöglich die Flamme so entfernt aufzustellen, als es die Flächenbeschaffenheit gestattet, um noch ein deutliches Reflexbild zu erhalten. Hält man an Stelle des Krystalls eine beleuchtete Millimeterskala, so kann man ein- für allemal bestimmen, der wie vielte Theil des Gesichtsfeldes (nach Entfernung des Oculars) einem Millimeter entspricht, und kann unter Berücksichtigung der Gestalt des Krystalls nach Obigem leicht, wenn derselbe aufgesetzt ist, beurtheilen, ob die erreichte Centrirung noch Fehler von störender Grösse hervorbringen kann. Habe man z. B. ein rhombisches Prisma, dessen beide Flächenpaare, das eine 2, das andere 3 Millimeter gegenseitigen Abstand haben, so kann man getrost die Mitte desselben centriren und, ohne neu zu centriren, alle vier Winkel messen, denn es ist klar, dass alsdann die Ebenen, in welche beim Drehen die verschiedenen Flächen zu liegen kommen, nicht weiter von einander abstehen können, als $\frac{1}{2}$ Millimeter; bei 10 Meter Flammendistanz giebt dies nur einen Fehler von ca. 9″, ja selbst bei 5 Meter Abstand würde derselbe in den meisten Fällen noch weit geringer sein, als die aus Unvollkommenheiten der Flächen entstehenden, nämlich 18″. Würden die Flächen einer Zone zufällig alle

genau gleich weit von der Mitte des Krystalls abstehen, so wäre der Fehler bei der Centrirung dieser Mitte für die Messung aller ihrer Kantenwinkel absolut gleich Null.

Da der aus einer Excentricität der zu messenden Kante entspringende Fehler $f = \frac{\omega}{2}$, so wird derselbe Null, wenn $\omega = 0$, d. h. wenn die auf die Krystallfläche auffallenden Strahlen parallel sind. Dies ist aber der Fall, wenn das Goniometer mit einem Collimator ausgerüstet ist, bestehend aus einer Objectivlinse, in deren Brennpunkt sich ein beleuchtetes Signal (Spalt) befindet; denn die von dem letzteren ausgehenden Strahlen treten aus dem Objective parallel aus und fallen so auf die Krystallfläche. Bei den in §. 112 beschriebenen vollständigeren Goniometern ist daher eine Centrirung der Krystallkanten eigentlich gar nicht nöthig; wenn man dieselbe trotzdem vornimmt, so geschieht es, um auch kleine, aus einem etwaigen nicht vollkommenen Parallelismus der aus dem Collimator austretenden Strahlen entstehende, Fehler zu vermeiden, hauptsächlich aber, um die spiegelnde Fläche in die Axe des Beobachtungsfernrohrs zu bringen, so dass die reflectirten Strahlen durch die Mitte des Objectives dringen und in der Focalebene ein möglichst helles und scharfes Bild hervorbringen. Zu dem Zwecke wird vor das Objectiv die Lupe vorgeschlagen, wie es in Fig. 574 dargestellt ist, und die Kante oder, wenn der Krystall nicht allzu gross ist, die Mitte der zu messenden Zone so verschoben, dass sie beim Drehen constant am senkrechten Faden des Fernrohrs bleibt, welcher die Mitte des Gesichtsfeldes bezeichnet. Nach geschehener Centrirung, welche in der S. 573 angegebenen Weise ausgeführt wird, ist die vor dem Objectiv befindliche Lupe zu entfernen, zu welchem Zwecke sie an einem Charnier beweglich ist (vergl. Fig. 575).

Justirung. Um diese zu erleichtern, ist es nothwendig, die zu messende Kante (oder Zone) schon nach dem Augenmaasse so genau wie möglich normal zum Kreise aufzusetzen; man nimmt zu diesem Zwecke das kleine Tischchen *u* Fig. 573 (nach Lösung der Schraube *v*) ab und befestigt nun mit Wachs den Krystall so, dass die Flächen der zu messenden Zone sich ungefähr im Drehungscentrum der Justirbögen (*r* Fig. 574) befinden, und deren Axe normal zum Tischchen steht, was man dadurch controlirt, dass man dasselbe gegen das Licht hält; ausserdem muss eine der vorherrschenden Flächen der betreffenden Zone so orientirt sein, dass sie ebenfalls so genau, wie es mit dem Augenmaass möglich, nach dem Aufsetzen und Festschrauben des Tisches parallel einer der beiden Justirschrauben ist, also entweder in die Ebene des Durchschnittes Fig. 574 fällt oder dazu senkrecht steht. Ist das Tischchen in dieser Weise auf dem Goniometer befestigt und sind vorher die Segmente der Justirvorrichtung in die Mittelstellung gebracht, so erhält man gewöhnlich die reflectirten Bilder beim Drehen schon in das Fernrohr, wenn sie auch (bei Anwendung des kleinen Goniometers Fig. 573) rechts oder links vom Fadenkreuz das

Gesichtsfeld passiren. Sollten sie jedoch noch ausserhalb desselben fallen, so muss man durch Sehen neben dem Fernrohr entlang unter Hin- und Herbewegung des Auges die Reflexe suchen, um zu erkennen, ob sie zu weit rechts oder links sind, und dann mit den beiden Schrauben eine erste Correction anbringen; hat man die Bilder aber einmal im Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohrs, so ist die genaue Justirung der Kante leicht: man stellt zuerst das von derjenigen Fläche, welche einer Justirschraube parallel ist (s. vor. S.), reflectirte Bild ein und dreht an der anderen Schraube, bis es am verticalen Mittelfaden des Fadenkreuzes steht; alsdann stellt man das Bild von einer zweiten Fläche ein und corrigirt dieses mit der ersteren Schraube, wobei die Justirung der ersten Fläche um so weniger geändert wird, je genauer sie dieser Schraube parallel ist; durch ein oder zwei kleine Nachcorrectionen gelingt es dann leicht, zu erreichen, dass die von beiden Flächen, folglich auch von allen übrigen derselben Zone, gelieferten Bilder beim Drehen genau am verticalen Mittelfaden entlang sich bewegen. Ganz ebenso verfährt man natürlich mit den Goniometern, deren Limbus horizontal ist, nur dass hier selbstverständlich die Reflexe der noch nicht justirten Flächen zu hoch oder zu tief erscheinen und die Justirung erst dann erreicht ist, wenn die Mitte des Signalbildes beim Drehen der Goniometeraxe genau am Horizontalfaden des Beobachtungsfernrohrs entlang läuft. Ist dies nur für die beiden justirten Flächen, nicht auch für die übrigen der Fall, so sind die Theile des Krystalls nicht vollkommen parallel (s. S. 537) oder die betreffende dritte, vierte, fünfte Fläche liegt überhaupt nicht in der Zone der beiden ersteren*). Eine genaue Justirung auf dem Goniometer ist daher das sicherste Mittel, um zu erkennen, ob eine Krystallfläche in der Zone zweier anderer liegt, und verwendet man zu dieser Prüfung entweder den horizontal gestellten (um 90° gedrehten) Websky'schen Spalt oder das auf S. 565 unter c) beschriebene Signal.

Messung. Sind die oben genannten Bedingungen für Justirung und Centrirung erfüllt, so kann zur Messung geschritten werden. Benutzt man eines der kleinen in Fig. 573 abgebildeten Goniometer und als Signal ein entferntes kleines helles Kreuz (s. S. 558), so stellt man das Fadenkreuz des Fernrohrs unter 45° gegen die Arme des Signals, weil bei dieser Stellung sich die Coincidenz der Kreuzungspunkte beider am genauesten erreichen lässt. Während man bei der Centrirung und Justirung mit der

*) In diesem Falle ist sie eine der justirten Zone vicinale (s. S. 542) Fläche, deren Zeichen meist sehr complicirt ist. Um dasselbe zu bestimmen, genügt es nicht, ihren Reflex auf den Verticalfaden des Fadenkreuzes einzustellen (welchen er über oder unter der Mitte passirt), da man auf diesem Wege nicht den wahren Bogenabstand der Fläche von der nächsten der justirten Zone, sondern eine Projection dieses Bogens auf die Ebene des justirten Zonenkreises erhalten würde. Es ist daher nöthig, auch noch die Abweichung des Reflexes von dem letzteren zu messen. Die beste Methode, die Abweichung einer Fläche aus einer benachbarten Zone zu bestimmen, hat M. Websky angegeben (dieselbe wird in §. 118 beschrieben werden).

Scheibe *A* nur die innere Axe *a* bewegte, dreht man jetzt mit *B* zugleich den Kreis, stellt das Bild zunächst durch Drehen mit freier Hand ungefähr ein und bewirkt die genaue Einstellung mittelst der Schraube *g*; alsdann liest man die Stellung des Kreises am Nonius ab, drückt die Feinstellschraube *g* nach abwärts, um *B* wieder frei bewegen zu können, dreht an letzterem, bis das Signalbild der zweiten Fläche in's Gesichtsfeld kommt, und wiederholt mit diesem die gleiche Operation. Kann man alle Flächen der Zone mit einer einzigen Centrirung messen, so dreht man, bis die erste Fläche derselben noch einmal eintritt, und sieht zu, ob man für diese die gleiche Ablesung wie im Anfang erhält, um sich zu vergewissern, dass nicht inzwischen irgend eine Verschiebung vorgekommen ist. Ist jedoch der Krystall so gross, dass jede Kante einzeln centrirt werden muss, so werden natürlich für jede Kante beide Flächen neu eingestellt und abgelesen; die Justirung bleibt aber die gleiche für die ganze Zone.

Bei den horizontalen Goniometern Fig. 574 ist es die Scheibe *g*, durch deren Drehung die Fläche eingestellt wird, wobei die genaue Coincidenz der Mitte des Signals mit der des Fadenkreuzes nach Klemmung von *β* mit der zugehörigen Feinstellschraube (*G* Fig. 575) ausgeführt wird. Benutzt man als Signal, wie es gewöhnlich geschieht, den Websky'schen Spalt, so wird der enge mittlere Theil desselben mit dem verticalen Faden des Beobachtungsfernrohres zur Deckung gebracht.

Nur vollkommen ebene Flächen von einer gewissen Ausdehnung reflectiren das Bild eines Signals ohne jede Entstellung seiner ursprünglichen Gestalt; hier entspricht also die Genauigkeit der Messung derjenigen Präcision, mit welcher das Signal vermöge der Vergrösserung des Oculars eingestellt werden kann, und der Genauigkeit der Theilung des Kreises. Derartige Flächen, bei denen somit die Präcision des Instrumentes voll ausgenutzt werden kann, sind jedoch verhältnissmässig selten.

Eine Dilatation des Reflexbildes, welche natürlich mit Abnahme der Lichtstärke verbunden ist, tritt bereits ein bei einer vollkommen ebenen Fläche, wenn diese schmal, d. h. durch zwei wenig von einander entfernte parallele Kanten begrenzt ist; eine solche Fläche wirkt nämlich auf das reflectirte Licht, wie ein schmaler Spalt auf durchfallende Strahlen; es entstehen Interferenzerscheinungen, welche man als »Beugung« des Lichtes bezeichnet. Dieselben bedingen eine Verzerrung des Bildes in der Richtung, welche senkrecht zu den die schmale Fläche begrenzenden Kanten ist, also in derjenigen, in welcher die Messung erfolgt, wenn die Zone jener Kanten justirt ist. Beträgt die Breite der Fläche nicht viel weniger als $\frac{1}{2}$ mm, so ist die Dilatation so gering, dass noch mit genügender Genauigkeit auf die Mitte des verbreiterten Reflexes eingestellt werden kann, besonders, wenn man als Signal den Websky'schen Spalt benutzt; ist die Fläche schmäler, so erscheint nicht nur das Bild in die Breite gezogen, sondern es treten auch zu beiden Seiten desselben gefärbte Nebenbilder auf, deren Abstand von einander und von der Mitte immer grösser wird, je schmäler die

reflectirende Fläche ist. Wenn in diesem Falle die Erkennung der einzustellenden Position auch durch das ungefärbte Mittelbild immer noch ermöglicht ist, so wird dieses doch um so schwächer, je mehr Licht auf die seitlichen Beugungsbilder entfällt und je mehr durch Interferenz vernichtet wird, und bei Flächen von einigen Hundertsteln Millim. Breite würde man von einem schmalen erleuchteten Spalt als Signal kein Licht mehr erhalten, während man vom Websky'schen Spalt bei Anwendung eines lichtstarken verkleinernden Oculars (δ s. S. 566) und vollständiger Abblendung alles störenden Nebenlichtes im verdunkelten Raume noch einen äusserst schwachen und breit verwaschenen Reflex des oberen und unteren breiten Theiles erblickt, dessen Einstellung natürlich nur ganz angenähert erfolgen kann. Die seitlichen Lichtmaxima eines derartigen Beugungsbildes unterscheiden sich von normalen Reflexen benachbarter, wenig geneigter Krystallflächen durch ihre Färbung und dadurch, dass ihr Winkelabstand vom Mittelbild und von einander abhängt vom Incidenzwinkel des Lichtes, weil, wenn dieser grösser ist, d. h. die auffallenden und die von der Fläche reflectirten Strahlen einen spitzeren Winkel mit der Krystallfläche bilden, die letztere in der Richtung des Fernrohrs gesehen schmäler erscheint, also so wirkt, als ob ihre Breite geringer sei. Aendert man also den Einfallswinkel des Lichtes durch Aenderung der Stellung des Beobachtungsfernrohrs gegen den Collimator — und aus diesem Grunde sind die in §. 112 beschriebenen horizontalen Goniometer so eingerichtet, dass man unter sehr verschiedenen Incidenzwinkeln beobachten kann — so ändern sich auch jene Abstände, sobald es sich um secundäre, durch Interferenz entstandene Beugungsbilder handelt, während die normalen Reflexbilder benachbarter Krystallflächen natürlich bei der Messung stets dieselben Winkeldistanzen ergeben. Sind zwei benachbarte, einen kleinen Winkel mit einander bildende Flächen beide so schmal, dass sie zusammengesetzte Reflexe liefern, so beeinflussen die von ihnen reflectirten Strahlen sich gegenseitig, so dass die Lichtculminationen des einen Bildes je nach dem Incidenzwinkel die des andern schwächen oder verstärken. Die im letzteren Falle helleren Lichtmaxima, welche man leicht für eigentliche Reflexe von Krystallflächen halten könnte, unterscheidet man von solchen ebenfalls am sichersten durch Aenderung des Incidenzwinkels, wobei ihre Winkelabstände sich ändern und ebenso ihre Helligkeit, so dass sie unter gewissen Einfallswinkeln des Lichtes ganz verschwinden. Näheres über die mannigfachen, hierbei vorkommenden Erscheinungen s. Websky, Zeitschr. f. Kryst. 3, 241.

Geben schon vollkommen ebene Flächen, wenn sie nach einer Richtung geringe Dimensionen besitzen, Anlass zu complicirten Reflexionserscheinungen, so ist dies natürlich noch mehr der Fall mit nicht vollkommen ebenen. Es ist klar, dass die Krümmung einer Fläche in einer bestimmten Zone eine Verzerrung des Reflexbildes parallel der letzteren bewirken muss. Weit häufiger, als eine derartige regelmässige Krümmung, ist aber eine mehr oder minder unregelmässige Knickung einer Fläche in verschiedene

ebene Elemente, deren jedes ein Reflexbild des Signals liefert. Die in Folge dessen eintretende Erscheinung einer Gruppe von mehreren Reflexen im Gesichtsfeld beweist eine Zusammensetzung des Krystalls aus nicht parallelen Theilen (s. S. 537) und erfordert die Abblendung (durch Bedecken mit einer nicht reflectirenden Leimfarbe oder dergl.) derjenigen gestörten Flächentheile, welche von der zu messenden Kante entfernter liegen. Da aber auch für die unmittelbar in einer Kante aneinander stossenden Flächenelemente keine volle Sicherheit für ihre richtige gegenseitige Neigung gegeben ist, so muss in solchen Fällen entweder eine grössere Zahl von Krystallen gemessen werden (um im Mittel die einzelnen Störungen möglichst auszugleichen) oder nach einem oder mehreren, annähernd regelmässig ausgebildeten Krystallen gesucht werden, wenn eine genaue krystallographische Bestimmung erzielt werden soll. Eine wichtige Prüfung betreffs der regelmässigen Ausbildung eines Krystalles besteht darin, dass die Winkelabstände paralleler Flächen auf ihre Abweichung von 180° untersucht werden; hierdurch gelingt es oft, von mehreren Reflexen einer Fläche denjenigen, welcher dem richtig gelagerten Flächentheil angehört, zu bestimmen, indem man nachweist, dass derselbe, in verschiedenen Zonen gemessen, von der parallelen Gegenfläche, falls diese gut und einfach ausgebildet ist, um 180° absteht. Geben die meisten oder alle Flächen eines Krystalls zusammengesetzte Reflexbilder anstatt einfacher, so ist natürlich eine genaue Messung desselben nicht möglich; aus den Winkelabständen der äussersten Signalbilder in der einer Krystallfläche angehörigen Gruppe von Reflexen lässt sich auf den Grad der Ungenauigkeit der Messungen ein angenäherter Schluss ziehen.

Sind endlich die Flächen eines Krystalls so unvollkommen, dass sie überhaupt kein Signalbild mehr liefern, andererseits aber zu klein, um das S. 547 f. erläuterte Verfahren zur Messung matter Flächen zu gestatten, so bleibt zur approximativen Bestimmung ihrer Winkel nur folgender Weg übrig: Man setzt, wenn man das kleine Goniometer Fig. 573 benutzt, nach dem Centriren das Ocular des Fernrohrs nicht wieder ein, resp. man lässt, wenn man mit einem Fuess'schen Instrumente arbeitet, die Vorschlaglupe vor dem Objectiv, so dass man den Krystall deutlich erblickt. Alsdann bewirkt man durch die Justirschrauben, dass die Flächen der zu messenden Zone beim Drehen nach einander durch das vom Signal ausgehende Licht vollständig erleuchtet erscheinen, womit eine angenäherte Justirung erreicht ist. Die Einstellung jeder einzelnen Fläche erfolgt nun ebenfalls unter Benutzung des Umstandes, dass dieselbe am vollkommensten erleuchtet gesehen wird, wenn die von ihr reflectirten Strahlen genau parallel der Axe des Beobachtungsfernrohrs in dieses eintreten. Um diese Stellung möglichst richtig zu finden, dreht man in demjenigen Sinne, in welchem die Messung der Zone erfolgt, bis das Maximum der Beleuchtung der Fläche eintritt, liest diese Stellung am Kreise ab, dreht weiter, bis der Reflex verschwindet, dann wieder zurück, bis das Maximum der Beleuchtung wieder eintritt,

und liest diese Stellung ebenfalls ab. Da man bei diesem Verfahren sich der wahren Position von beiden entgegengesetzten Seiten her in gleicher Weise genähert hat, so ist das Mittel beider Ablesungen der wahrscheinlichste Werth der richtigen Einstellung, und die Differenz der beiden Ablesungen, — d. h. der Winkel, um welchen man die Krystallfläche drehen kann, ohne dass sie aufhört, vollkommen beleuchtet zu erscheinen, — ist offenbar eine kleine Grösse, wenn die Fläche recht eben ist, und alsdann liefert diese Methode ein ziemlich genaues Resultat; die in Rede stehende Differenz ist aber um so beträchtlicher und bewirkt eine um so grössere Ungenauigkeit der Messung, je mehr die Fläche gekrümmt oder geknickt ist; im letzteren Falle erscheinen die einzelnen Theile derselben, wenn ihre gegenseitige Neigung eine merkliche ist, nicht gleichzeitig erleuchtet, und man muss alsdann auf diejenigen Theile der Fläche einstellen, welche man ihrer Lage nach für die richtigeren hält. Diese Messungsmethode nennt man die »Schimmermessung« oder »Einstellung auf den allgemeinen Reflex«. Es versteht sich von selbst, dass man dieselbe nur auf die Flächen anwendet, welche kein Reflexbild mehr liefern; besteht also eine zu messende Zone z. Th. aus genügend gut spiegelnden Flächen, z. Th. aus solchen, welche kein Reflexbild des Signals geben, so wendet man ein gemischtes Verfahren an: man stellt die ersteren Flächen in der gewöhnlichen Weise, welche in allen Fällen die genauere ist, ein, die nicht genügend spiegelnden dagegen durch Wegnahme des Oculars, resp. Vorschlagen der Lupe, auf Schimmer.

Ganz von der Berücksichtigung auszuschliessen sind zwei Arten von Reflexen, denen man bei der Messung einer Zone nicht selten begegnet. Der erste dieser Fälle betrifft die von fein gestreiften Krystallflächen gelieferten Bilder. Die Streifung einer Fläche entsteht bekanntlich dadurch, dass zwei verschiedene Ebenen, seien es zwei benachbarte Flächen desselben Krystalls (Combinationsstreifung s. S. 539) oder gleichwerthige Flächen zweier verschiedener Krystalle (Zwillingsstreifung s. S. 360 u. 530), vielfach mit einander alterniren. Sind nun die einzelnen Streifen nicht allzu schmal, so geben alle unter einander parallelen Streifen der einen Richtung ein gemeinsames einfaches Reflexbild, diejenigen der andern Richtung, nach erfolgter Drehung des Krystalls um den Winkel der beiden Flächen, ebenfalls ein einziges Bild. Ganz anders wird die Erscheinung, wenn die einzelnen Streifen schmal sind: alsdann treten nämlich die oben bereits erwähnten Beugungserscheinungen auf; bei einer recht feinen und regelmässigen Streifung der Fläche verschwinden die den beiden sie zusammensetzenden Ebenen entsprechenden Reflexe ganz, und statt ihrer erscheint in einer mittleren Position ein ungefärbtes helles Reflexbild, welches alle Eigenschaften eines normalen, von einer ebenen Fläche gelieferten Signalbildes hat, und zu beiden Seiten desselben eine Reihe von farbigen Nebenbildern, deren Abstände von der Feinheit der Streifung und von dem Incidenzwinkel des Lichtes abhängen. Die bei jeder Incidenz unveränderliche

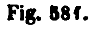
Position des Mittelbildes, welches um so heller und schärfer erscheint, je feiner die Fläche gestreift ist, entspricht nun der Tangentialebene an die parallelen ein- und ausspringenden Kanten, welche die Streifung erzeugen, also einer Ebene, welcher keinerlei krystallographische Bedeutung zukommt, da ihre Lage von der zufälligen relativen Breite der Streifen abhängt. Aus der Theorie der Beugung des Lichtes geht hervor, dass eine derartige Scheinfläche, sobald die Breite der sie zusammensetzenden Streifen nicht allzu gross im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes ist, genau nach demselben Gesetze, wie eine vollkommen ebene Fläche, ein normales Bild reflectirt und daneben gefärbte Seitenbilder, deren Abstand nur abhängt von der Feinheit der Streifung und vom Incidenzwinkel der Strahlen. Daraus folgt, dass in diesem Falle in der Reflexion des Lichtes kein Mittel mehr gegeben ist, um die wahre krystallographische Lage der die Scheinfläche zusammensetzenden Ebenen zu bestimmen, und dass feingestreifte Flächen überhaupt von der Messung auszuschliessen sind, um so unbedingter, je feiner und regelmässiger ihre Streifung ist. Nur in dem Falle, dass man eine der Streifung nicht parallele Zone justirt hat, und beim Drehen das gegliederte Lichtband einer gestreiften Fläche, welches dann natürlich eine schräge Richtung hat, das Gesichtsfeld passirt, kann man die Position einstellen, in welcher der helle Streifen durch die Mitte des Fadenkreuzes geht, weil diese Position zwei Zonen des Krystalls angehört, also die Existenz einer ihr entsprechenden Fläche, deren Indices rationale sein müssen, unter den die Streifung bildenden wenigstens sehr wahrscheinlich ist. Näheres über die Interferenzerscheinungen fein gestreifter Flächen s. Förstner, Zeitschr. f. Kryst. 8, 143f.

Die zweite Art von Bildern, welche bei der Messung einer Zone nicht berücksichtigt werden dürfen, kommen nur bei recht durchsichtigen Krystallen vor. Dieselben entstehen durch Totalreflexion des ins Innere des Krystalls eingetretenen Lichtes an einer vom Beobachter abgewendeten Fläche und Austritt der Strahlen durch eine vordere Fläche; da letzterer mit einer Brechung verbunden ist, sind diese Bilder*) farbig und ausserdem leicht durch ihre eigenthümliche Bewegung zu erkennen, wenn man den Krystall dreht und mit dem Beobachtungsfernrohr in demselben Sinne der Drehung folgt; dieselben werden nämlich an gewissen Stellen, d. h. bei gewissen Incidenzwinkeln rückläufig. Ausserdem sind derartige falsche Reflexe auch dadurch zu vermeiden, dass man die Drehung des Krystalls, um von einer Fläche zur andern zu gelangen, mit vorgeschlagener Lupe (bei den kleinen verticalen Goniometern mit abgenommenem Ocular) vornimmt; man sieht dann sofort, ob die erleuchtete Fläche dem Signale zu-

*) Fällt ein solches Bild mit einem normalen Reflexbilde zusammen und stört dessen Einstellung, so hat man nur nöthig, den Einfallswinkel des Lichtes zu ändern, um jenen Reflex in einer andern Richtung aus dem Krystall austreten zu lassen.

gekehrt ist*) oder nach der entgegengesetzten Seite gelegen und daher eine durch Totalreflexion erleuchtete Innenfläche des durchsichtigen Krystalls ist.

Zum Schluss mögen noch diejenigen Vorkehrungen erwähnt werden, welche man zu treffen hat, um Krystalle zu messen, die sich an der Luft verändern, z. B. Feuchtigkeit anziehen und zerfliessen oder dergl. Für verticale Goniometer hat Brezina (Jahrb. d. geol. Reichsanst. 1884, S. 329) eine ziemlich complicirte, durchsichtige Stopfbüchse angegeben, in welcher sich die Krystalle in einer zu ihrer Erhaltung geeigneten Atmosphäre befinden und von aussen centrirt und justirt werden können. Einfacher ist eine von Fuess construirte Vorrichtung, welche den von Demselben gelieferten horizontalen Instrumenten angepasst ist und im Folgenden nach einer von Liebisch verfassten Notiz im Jahrb. f. Min. 1885, 1, 76 beschrieben werden möge: An Stelle des Tischchens wird auf die Centrir-


Fig. 581.



und Justirvorrichtung des Goniometers ein kurzer, an drei Seiten durchbrochener Hohlcylinder aufgesetzt, in dessen oberem Theil die kleine Kugel z (s. Fig. 581) allseitig drehbar eingelassen ist; ihre Drehung, sowie die des darauf befindlichen Tischchens t erfolgt durch einen kleinen Schlüssel an dem mit ihr in Verbindung stehenden Stiele a und ermöglicht eine angenäherte Justirung des aufgesetzten Krystalls, welche schliesslich durch die Justirschrauben vollendet wird. Auf den sphärisch gewölbten Obertheil des Cylinders ist ein Glasfläschchen mit eingedrücktem Boden so abgeschliffen, dass jener, mit etwas Oel benetzt, das letztere luftdicht abschliesst, auch wenn er

*) Dabei ist zu berücksichtigen, dass das mit der Lupe montirte Beobachtungsfernrohr der horizontalen Goniometer ein umgekehrtes Bild des Krystalls liefert, die beleuchtete Fläche also dem Lichte abgekehrt erscheint!

geneigt oder gedreht wird. Damit hierbei die Stellung des Fläschchens unverändert bleibe, ist auf das Collimatorrohr eine federnde Klammer aufgesetzt, welche auf den Gummipfropfen *P* des Fläschchens drückt, während ein zweiter Stift eine Drehung desselben verhindert. Der Ein- und Austritt des Lichtes geschieht durch angesetzte planparallele Glasplatten. Der rinnenförmige Bodenraum des Fläschchens dient zur Aufnahme von Schwefelsäure, Chlorcalcium, Wasser oder dergl.

Ueber jede Messungsreihe ist ein ausführliches Protokoll zu führen unter Beifügung einer Skizze des Krystalls, welche jede einzelne Fläche zu identificiren gestattet; das Protokoll der Messung jeder Zone muss enthalten: Angabe der Fläche, Ablesung am Kreise und eine Notiz über die Beschaffenheit des Reflexbildes, aus welcher die Genauigkeit der Messung beurtheilt werden kann. Aus den verschiedenen Messungen gleichwerthiger Kanten werden alsdann die Mittel unter Berücksichtigung des Werthes der Einzelmessungen gezogen und der Rechnung zu Grunde gelegt. Sind in Folge der Flächenbeschaffenheit die einzelnen Einstellungen von geringer Genauigkeit, so wird diese durch Wiederholung der Messungen an demselben Krystall nicht wesentlich erhöht, wohl aber durch die Untersuchung einer Reihe von Krystallen, wobei die zufälligen Störungen der einzelnen Flächen sich im Mittel um so mehr ausgleichen, je mehr gleichwerthige Zonen der Messung unterworfen wurden.

Liegen sehr vollkommene Krystallflächen vor, deren Winkel mit grosser Genauigkeit gemessen werden sollen, so kann man die in den übrigen Fällen ganz zu vernachlässigenden Fehler der Kreistheilung des Instrumentes eliminiren durch das sogenannte Repetitionsverfahren. Diese Methode, bei welcher jede einzelne Kante für sich gemessen werden muss, ist folgende: man stellt die erste Fläche, wie gewöhnlich, ein und liest ab; nachdem die zweite feingestellt worden ist, löst man die Klemmschraube *f* Fig. 575 und führt durch Zurückdrehen der inneren Axe den Reflex der ersten Fläche an das Fadenkreuz, auf welches man ihn ebenfalls fein einstellt, so dass diese Fläche jetzt genau die Lage zu den Nonien hat, wie vorher die zweite; löst man nun β und dreht in demselben Sinne, wie zuerst, die äussere Axe mit dem Limbus so weit, bis wieder die zweite Krystallfläche eingestellt ist, so giebt die Ablesung dieser Position gegen die Ausgangsstellung den doppelten Winkel der Krystallkante. Man kann dasselbe Verfahren nun wiederholen und so durch Ablesen der ersten und letzten Stellung den vier- oder sechsfachen Winkel finden, welcher, durch 4 resp. 6 dividirt, einen Werth des gesuchten Winkels liefert, welcher von den Theilungsfehlern, namentlich von einer etwaigen Excentricität des Theilkreises unabhängig ist.

§. 114. **Anwendung des Goniometers als Refractometer.** Einen Apparat, welcher zur Messung der Brechungsexponenten mittelst der Ablenkung (Refraction) der Lichtstrahlen in einem Prisma (s. S. 30—33) dient, nennt man »Refractometer« oder »Spectrometer«. Es wurde bereits S. 559 erwähnt, dass die den verticalen Kreisen zukommenden Fehlerquellen in noch erhöhtem Maasse zur Wirksamkeit gelangen, wenn man jene Instrumente zugleich zur Messung der Brechungsexponenten benutzt, und es soll daher im Folgenden nur die Verwendung horizontaler Kreise in's Auge gefasst werden.

Um Brechungsindices nach der erwähnten Methode auf einige Einheiten der 4. Decimale genau bestimmen zu können, genügt das Fuess'sche Goniometer Nr. 2*). Als Signal benutzt man entweder den geradlinigen Spalt, wie es von den meisten Beobachtern geschieht, oder wie bei der Krystallmessung den Websky'schen Spalt, was vielleicht noch mehr zu empfehlen ist, da derselbe auch bei abgelenkten Strahlen eine sehr scharfe Einstellung gestattet. Das Signal wird durch eine monochromatische Flamme (s. S. 36) erleuchtet, welche am geeignetsten nach dem Vorschlage von Laspeyres hinter einem Glas- oder Glimmerfenster in einem dunkeln Kasten aufgestellt wird; der letztere ist so einzurichten, dass er den von der Flamme entwickelten Dämpfen einen Abzug aus dem Beobachtungsraume gestattet, was besonders bei Anwendung der sehr giftigen Thalliumdämpfe von Wichtigkeit ist. Das Goniometer wird so vor dem Kasten aufgestellt, dass das Signal des Collimators, resp. die aufgesteckte Beleuchtungslinse sich unmittelbar vor dem Fenster befindet, und ebenso wird die im Innern befindliche Flamme dem letzteren so viel als möglich genähert.

Das zu untersuchende Prisma wird auf den Krystallträger aufgesetzt, centrirt und justirt, und zunächst der brechende Winkel desselben nach der gewöhnlichen goniometrischen Methode gemessen, worauf es ungefähr in diejenige Stellung gebracht wird, welche in Fig. 22 S. 33 dargestellt ist. Alsdann wird die Klemmschraube *β*, s. Fig. 574, angezogen und damit der hohle Conus *e* und der Theilkreis *f* fixirt, dagegen *α* gelöst, so dass der Nonienkreis *d* mit dem Beobachtungsfernrohr frei gedreht werden kann. Man richtet nun das letztere auf das erleuchtete Signal des festen Collimators so, dass beide Fernröhre genau 180° mit einander bilden, entsprechend der Richtung *BP* in Fig. 22, wozu man die Klemmschraube *α* wieder anzieht und die Einstellung mit der zugehörigen Feinstellschraube vollendet, und liest die Stellung des Nonienkreises ab. Hierbei erhält man, auch wenn das Prisma bereits in seiner richtigen Stellung auf dem

*) Ausserdem kann man, wie in §. 120 auseinandergesetzt werden soll, den zum sogenannten optischen Universalapparat gehörigen horizontalen Theilkreis des Axenwinkelinstrumentes, mit zwei kleinen Fernröhren montirt, zur Messung der Brechungsexponenten benutzen. Die Genauigkeit dieses Theilkreises ist eine etwas geringere, als die des Goniometers Nr. 2, aber immerhin für viele Fälle noch eine genügende.

Krystallträger sich befindet, doch ein scharfes direct gesehenes Bild des Signals mittelst der am Prisma vorbeigehenden Strahlen, weil dieses, wenn es centrirt ist, höchstens die Hälfte des Objectivs für die erwähnten Strahlen verdeckt. Nach abermaligem Lösen der Klemmschraube a führt man nun das Beobachtungsfernrohr nach derjenigen Seite, nach welcher die Brechung der Strahlen durch das Prisma stattfindet, bis man das abgelenkte Bild des Signals im Gesichtsfelde erblickt. Nunmehr muss man diejenige Stellung des Prismas aufsuchen, in welcher dasselbe den durchgehenden Strahlen die kleinste Ablenkung ertheilt: sei dieselbe nach links gerichtet, so dreht man mittelst der Scheibe i Fig. 574 (welche deshalb nicht geklemmt sein darf) das Prisma so, dass das gebrochene Signalbild sich im Gesichtsfelde nach rechts bewegt (die entgegengesetzte Drehung würde eine Zunahme der Ablenkung bewirken); verlässt es dabei noch das Gesichtsfeld, so geht man mit dem Beobachtungsfernrohre nach; bei weiterer Drehung in demselben Sinne wird man nun bald bemerken, dass das Bild sich langsamer bewegt, an einer bestimmten Stelle stehen bleibt und bei weiterer Drehung des Prismas (immer in demselben Sinne) anfängt, sich rückwärts zu bewegen. Die erwähnte Stelle, d. h. diejenige, welche dem Minimum der Ablenkung entspricht, bringt man nun durch Drehen des Beobachtungsfernrohrs genau in die Mitte des Gesichtsfeldes und beobachtet, ob bei mehrmaligem Hin- und Herdrehen des Prismas das Signalbild, wenn es seine äusserste Elongation nach rechts erreicht, von dem senkrechten Faden des Beobachtungsfernrohrs genau halbirt wird; ist dies noch nicht vollständig der Fall, so wird das Fernrohr durch die Feinstellschraube (F in Fig. 575) noch um die erforderliche Grösse bewegt. Ist endlich die vollkommene Coincidenz erreicht, so giebt die Ablesung des Nonius das Minimum der Ablenkung an.

Ist das Prisma einem doppeltbrechenden Krystalle angehörig, so erscheinen natürlich zwei verschieden stark abgelenkte Bilder des Signals, deren jedes für sich durch Drehen des Prismas auf das Minimum der Ablenkung einzustellen und zu messen ist. Die Schwingungsrichtung der beiden Strahlen wird durch einen vor das Beobachtungsfernrohr gehaltenen oder auf dessen Ocular aufgesetzten Nicol leicht erkannt, da hierbei dasjenige Bild verschwindet, dessen Schwingungsebene senkrecht zu der des Nicols steht. Noch bequemer, als durch einen mit der Hand vor das Auge gehaltenen Nicol, kann man die beiden polarisirten Bilder von einander trennen durch Einsetzen des Nicol'schen Prismas in das S. 566 beschriebene, auf den Collimator aufzusteckende Rohr der Beleuchtungslinse, welches mittelst Marken die Stellung des Nicolhauptschnittes zu erkennen und durch den viereckigen Ausschnitt auch eine Drehung des Polarisators vorzunehmen gestattet. Diesen Beleuchtungsapparat setzt man überhaupt stets dann auf das Signal auf, wenn man die Brechungsexponenten eines sehr kleinen, wenig Licht hindurchlassenden Prismas messen will, wobei es also auf möglichste Lichtstärke des Signals ankommt.

Ganz analog ist das Verfahren, wenn man mit dem grossen Goniometer Fig. 578 arbeitet: In eines der beiden Fernröhre wird an Stelle des Oculars der Signalspalt eingesetzt und dieses Fernrohr durch Anziehen der an seinem Fusse befestigten Klemmschraube fixirt, während das andere zur Einstellung des directen und des abgelenkten Signalbildes beweglich bleibt. Da sich bei diesem Instrumente jedes der beiden Fernröhre vom Kreise unabhängig bewegt, so kann die Drehung desselben auf dem Limbus mittelst des zugehörigen Mikroskopes abgelesen werden. Die Drehung des Prismas behufs der Einstellung auf die Minimalablenkung geschieht mittelst der Scheibe *f*, welche durch *β* geklemmt und mit der zugehörigen Mikrometerschraube fein geführt wird. Die Scheibe *c*, welche mit dem Theilkreis verbunden ist, bleibt während des ganzen Verfahrens durch Anziehen der Klemmschraube *x* fixirt.

Ueber die zur Bestimmung der optischen Constanten erforderliche Richtung der Flächen eines Prismas ist bereits in der I. Abtheilung das Nöthige gesagt worden. Allgemein gilt, dass der brechende Winkel desselben nicht so gross sein darf, dass die Incidenz beim Austritt der Strahlen aus der zweiten Fläche (d. i. der Winkel *mNL'* in Fig. 21 S. 32) den Winkel der totalen Reflexion erreicht oder übertrifft, da in diesem Falle kein Austritt des Lichtes mehr erfolgt. Während aber bei einem einfach brechenden Krystalle im Uebrigen die Richtung der beiden Prismenflächen eine ganz beliebige ist, muss bei einem einaxigen Krystalle das Prisma zur Bestimmung von *ω* und *ε* eine der S. 57 angegebenen Orientirungen besitzen. Man sieht leicht ein, dass bei der ersten und zweiten derselben stets ein Strahl parallel, der andere normal zur brechenden Kante schwingt, und, da letztere auf dem horizontalen Goniometer senkrecht steht, das eine der beiden Bilder aus verticalen, das andere aus horizontalen Vibrationen bestehen muss, deren Unterscheidung auf oben angegebene Weise dadurch erfolgt, dass der Hauptschnitt des in den Gang der Lichtstrahlen eingebrachten Nicols einmal senkrecht, einmal horizontal gestellt wird. Zu einem Prisma der ersten Orientirung können zwei natürliche Krystallflächen aus der Zone der Hauptaxe dienen, z. B. zwei einander unter 60° innerem Winkel schneidende Flächen eines hexagonalen Prismas oder die Flächen (100) und (110) eines tetragonalen Krystalls (brechender Winkel 45°); zu einem Prisma der zweiten Orientirung zwei gegenüberliegende Flächen einer spitzen hexagonalen oder tetragonalen Pyramide. Die dritte Orientirung erfordert eine der optischen Axe parallele Fläche, daher ein natürliches Prisma dieser Art aus einer prismatischen und einer pyramidalen Fläche von geeigneter gegenseitiger Neigung bestehen muss. Sind z. B. an einem tetragonalen Krystalle die beiden Flächen (110) und ($\bar{1}\bar{1}1$) gross und eben ausgebildet, und der innere Winkel ihrer Kante zwischen 40° und 60°, so ist ein solches natürliches Prisma sehr geeignet zur Messung der Brechungsexponenten,

denn da es eine zur Hauptaxe normal laufende Kante (parallel einer Zwi
axe) besitzt, so sind bei senkrechtem Einfallen des Lichtes auf die
Fläche die Schwingungsrichtungen der beiden Strahlen parallel und
recht zur optischen Axe. Ein beispielsweise von den Flächen (100
(T11) gebildetes Prisma hat eine zur Hauptaxe geneigte (einer Poll
{111} parallele) Kante; bei senkrecht auf (100) einfallendem Licht
zwar auch eine Zerlegung in parallel und senkrecht zur Axe s
Schwingungen erfolgen, die letzteren sind aber schief gegen die
Kante geneigt, was bei der Stellung des Nicols am Goniometer zu be
sichtigen ist. Bei Prismen dieser dritten Art der Orientirung ha
sich also darum, die Strahlen des festen oder (bei Anwendung des g
Goniometers) festgeklemmten Collimators genau senkrecht auf die E
fläche des Prismas fallen zu lassen, denn nur in diesem Falle
dieselben im Innern so fort, dass der eine ω, der andere ε zu ber
gestattet. Das hierzu erforderliche Verfahren, welches ganz allgem
Herstellung senkrechter Incidenz der Lichtstrahlen dient,
gendes:

Man stellt die betreffende Fläche unter einem beliebigen Winkel
ungefähr 45°, gegen die feste Collimatoraxe, dreht das Beobachtu
bis das von der Fläche gespiegelte Bild des Signales eingeste
liest diese Stellung am Nonius ab. Ausserdem bestimmt man die P
des Collimators, indem man das Beobachtungsfernrohr auf das Sig
einstellt und von der abgelesenen Position 180° abzieht oder e
addirt. Die Differenz dieses Werthes von dem vorher abgeles
den Winkel zwischen den vom Collimator auf die Fläche
den von letzterer ins Beobachtungsfernrohr reflectirten Lich
Hälfte desselben ist der Incidenzwinkel. Fixirt man nun das
fernrohr nebst dem Nonienkreise und dreht das Prisma zu
Limbus (so wie man bei einer Krystallmessung verfährt) gen
gefundenen Incidenzwinkel im entsprechenden Sinne, so st
Fläche exact senkrecht auf den aus dem Collimator austrete
Strahlen.

Die Berechnung der Refractionsindices aus der Ablenl
in einem Prisma der zuletzt besprochenen Orientirung erfolgt
wie in dem völlig analogen Falle, welcher bei den zwei igen Kr
S. 101 behandelt wurde. In letzterem muss ebenfalls soeb
gebene Methode, mittelst deren man senkrecht auf eine Fl
Strahlen erhält, angewandt werden, während bei den S. 99f.
Prismen zweiaxiger Krystalle das gewöhnliche Verfahren
ablenkung zur Anwendung kommt.

Ebenso wie die Beschaffenheit der Krystallflächen den wichtigsten Ein-ss ausübt auf die Genauigkeit der goniometrischen Resultate, so ist das eiche auch der Fall mit der Beschaffenheit derjenigen Flächen, welche i der Messung der Brechungsexponenten als Ein- und Austrittsfläche des :htes dienen. Benutzt man hierzu natürliche Krystallflächen, so geben selben nur dann ein einfaches und scharfes abgelenktes Bild des Signals, nn sie vollkommen eben sind; jede Krümmung, Streifung oder sonstige vollkommenheit derselben documentirt sich durch eine Verzerrung des rochenen Bildes, welches je nach der Grösse dieser Dilatation mit gegerer Schärfe eingestellt werden kann. Sind die Unvollkommenheiten · Flächen so gross, dass letztere kein einstellbares Bild mehr liefern, er sind am Krystall überhaupt keine Flächen in der geeigneten Richtung d von genügender Grösse ausgebildet, so hat man die Seiten des zur ssung zu benutzenden Prismas künstlich durch Schleifen herzustellen.

Namentlich bei härteren Substanzen gelingt es leicht, ebene Flächen schleifen und denselben einen so hohen Grad von Politur (s. §. 126) zu en, dass die durch solche Prismen gebrochenen Signalbilder die schärfste stellung gestatten. Nur ein Fehler kann bei solchen Schliffflächen vornmen, besonders wenn sie eine erhebliche Grösse besitzen, d. i. eine rch die Methode des Schleifens bewirkte schwach sphärische Krümmung. eine solche recht regelmässig, so ist sie bei der Messung ohne Weiteres ht zu bemerken, weil ein von zwei schwach kugelförmig gekrümmten chen begrenztes Prisma wie eine in den Gang der Lichtstrahlen eingete schwache Linse wirkt und, da diese gegen die Axe des Beobachtungsnrohrs geneigt ist, den Ort des in letzterem sichtbaren Bildes verschiebt, ne an der Schärfe desselben etwas zu ändern. Es ergiebt sich also ı eine falsche Einstellung, was man dadurch zu erkennen vermag, dass n die grössere Hälfte des Prismas abblendet und einmal den nahe der nte gelegenen Theil der Flächen, das andere Mal den möglichst von der nte entfernten Theil frei lässt; ist die Fläche sphärisch gekrümmt, so der brechende Winkel im ersteren Falle grösser, als im zweiten, und n findet daher verschiedene Werthe der Ablenkung. Dieser Fehler nmt jedoch nur bei grossen Prismen und bei sehr genauen Messungen Betracht, während kleinere Flächen leicht genügend eben geschliffen rden können.

Die Schliffflächen weicherer Substanzen nehmen oft nur sehr unvollnmene Politur an und geben dann nur ganz verwaschene abgelenkte nalbilder. In solchen Fällen bedeckt man dieselben mit gleich grossen tten von dünnem Spiegel- oder sogenanntem Birmingham-Glas (wie es n Bedecken mikroskopischer Präparate verwendet wird); zur Befestigung selben bringt man einen Tropfen Canadabalsam auf die Fläche des smas und drückt die Glasplatte so fest auf, dass der Balsam eine sehr nne, gleichmässig ausgebreitete Schicht zwischen beiden bildet. Ist diese nicht nicht überall gleich dick, so schliessen offenbar die beiden Glasplatten,

welche nun als Ein- und Austrittsfläche des Lichtes dienen, nicht genau denselben Winkel ein, wie die beiden Flächen des Prismas; da die letzteren matt sind, also keine scharfen Reflexe liefern, so kann eine exacte Controle des so entstehenden Fehlers nicht stattfinden. Trotzdem sollte man immer, wenn man gezwungen ist, zu dieser Methode seine Zuflucht zu nehmen, vorher den Winkel der ursprünglichen Flächen, so gut es eben möglich ist, messen, um wenigstens grobe Fehler beim Auflegen der Glasplatten zu vermeiden. Ausserdem darf man die letzteren nicht über die Prismenflächen überstehen lassen, da es sonst beim Aufsetzen des Prismas auf den Goniometertisch leicht geschieht, dass die Platten verschoben und dabei der Winkel derselben geändert wird.

Es versteht sich von selbst, dass man zur Bestimmung der [illegible]
exponenten möglichst klare und durchsichtige Krystalle ausw[illegible]
wachsene fremde Theilchen, Hohlräume u. a. Unvollk[illegible]
Raumausfüllung im Innern des Prismas entziehen nicht nur [illegible]
nen Signalbilde einen Theil des Lichtes, so dass es weniger hell [illegible]
sondern bringen auch Störungen desselben durch Zerstreuung, Be[illegible]
Interferenz der Lichtstrahlen hervor. Es ist daher vortheilh[illegible]
unreine Stellen des Prismas durch Bedecken mit Staniol [illegible]
ganz abzublenden, so dass das Licht nur durch den am meist[illegible]
Theil des Prismas hindurchgelangen kann. Liegt dieser von [illegible]
Kante entfernt, so würde bei genauer Centrirung der letzter[illegible]
gehende Licht ganz am Rande der Objectivlinse, vielleicht [illegible]
halb derselben auffallen, und deshalb ein wenig helles u[illegible]
nes Bild im Fernrohre entstehen. Um dies zu verme[illegible]n,
nöthig, das Prisma parallel sich selbst zu verschieben, [illegible] die
Partie desselben sich genau vor der Mitte der Objectivl[illegible]e
d. h. in der Drehungsaxe des Kreises befindet*). Alsdann ist [illegible]
Prisma nicht mehr centrirt; aber man sieht leicht ein, dass der [illegible]
Lichtstrahlen vollständig unverändert bleibt, an welchem O[illegible]
Ein- und Austrittsfläche des Prismas befinden, sobald nur [illegible]
mator verlassenden Strahlen genau parallel sind und das [illegible]
fernrohr auf Unendlich eingestellt ist. Um auch die M[illegible]
winkels bei unveränderter Centrirung und Justirung vornel[illegible]
ist es zu empfehlen, den betreffenden Theil des Prismas so zu [illegible]
dass die Drehungsaxe so genau als möglich gleich weit von [illegible]
Prismenflächen absteht, weil dann auch bei kleinen Abwe[illegible]
Strahlen des Collimators vom Parallelismus der Fehler der Exc[illegible]
Wegfall kommt (s. S. 574).

---

*) Ist das Prisma so gross, dass bei dieser Stellung desselben gar keine directen Strahlen mehr aus dem Collimator auf das Objectiv des Beobachtungsfernrohrs fallen können, so muss die S. 585 erwähnte Einstellung natürlich vor dem Aufsetzen des Prismas erfolgen.

Die Winkelmessung des Prismas kann man, ausser nach der gewöhnlichen goniometrischen Methode, auch mit beweglichem Beobachtungsfernrohr und feststehendem Prisma ausführen. Man stellt nämlich das letztere so, dass es seine brechende Kante dem Collimator zukehrt, dreht das Beobachtungsfernrohr, bis das von der einen Fläche reflectirte Spiegelbild erscheint, und liest ab; dann dreht man das Beobachtungsfernrohr auf die andere Seite, stellt es auf das Spiegelbild der zweiten Prismenfläche ein und liest wieder ab. Die Differenz einer jeden Ablesung von der Winkelposition des Collimators, welche man durch directe Einstellung auf letzteren erhält (s. S. 585), wird halbirt und dadurch der Winkel erhalten, welchen einmal die Normale der ersten, das andere Mal die der zweiten Fläche mit der Richtung des Collimators bildet; die Summe dieser beiden Winkel ist gleich der Neigung zwischen den Normalen der beiden Prismenflächen, d. h. das Supplement des brechenden Winkels. Eine einfache Ueberlegung lehrt, dass hierbei sogar die Einstellung auf den Collimator überflüssig ist; die Hälfte desjenigen Bogens zwischen den beiden Positionen der gespiegelten Signalbilder, innerhalb dessen der Collimator sich befindet, ist der Winkel zwischen den Normalen der Prismenflächen.

§. 115. Bestimmung der Brechungsexponenten durch Totalreflexion.

1) **F. Kohlrausch's Totalreflectometer.** Nachdem das Princip dieses Instrumentes bereits in der I. Abth. S. 34—35 auseinandergesetzt worden ist, soll nun im Folgenden die nähere Beschreibung des Apparates in der mehrfach verbesserten Form, wie er z. Z. von dem Universitätsmechanikus W. Apel in Göttingen*) geliefert wird, und die Anweisung zum Gebrauch desselben gegeben werden.

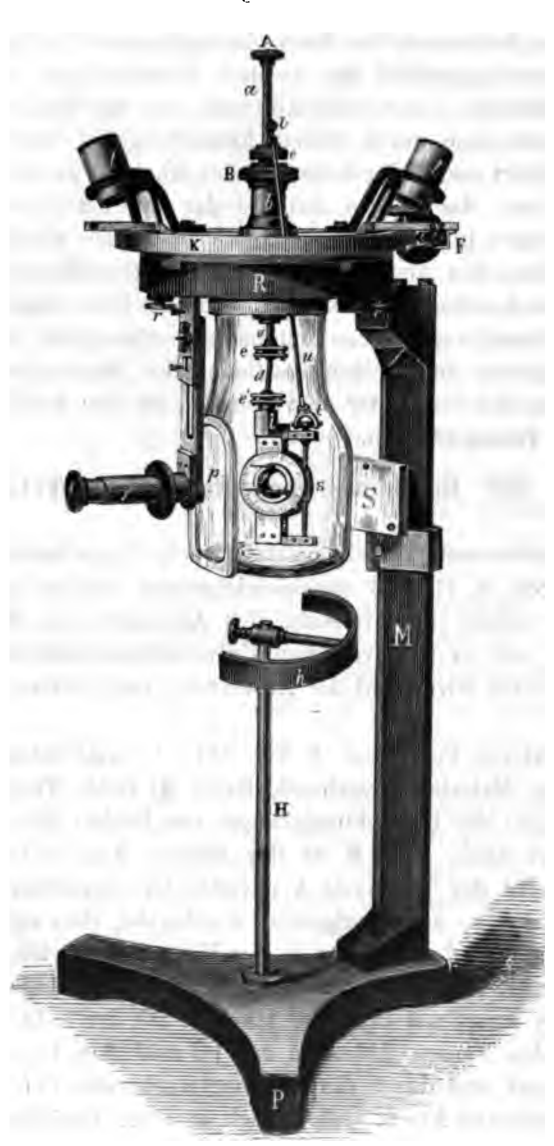
Auf einer eisernen lackirten Fussplatte *P* Fig. 582 ($^1/_3$ nat. Grösse) erhebt sich eine aus gleichem Materiale bestehende Säule *M*; beide Theile sind so abgeschrägt, dass man die Beleuchtungslampe von beiden Seiten dem Apparate beliebig nähern kann. Mit *M* ist der eiserne Ring *R* fest verbunden, und an diesen wird der Theilkreis *K* mittelst der Schrauben *r* aufgeschraubt, nachdem derselbe so auf *R* aufgesetzt worden ist, dass zwei parallelepipedische Vorsprünge, von denen einer in der Figur links sichtbar ist, in gleichgestaltete Einschnitte des Ringes *R* eingreifen. Auf dem Limbus befindet sich die mittelst des Knopfes *B* drehbare Alhidade mit den beiden, 180° von einander abstehenden Nonien (Ablesung auf 1') und den Lupen *l*; die Alhidade kann geklemmt und durch die Mikrometerschraube *F* fein geführt werden**). In der äusseren Axe *b*, welche sich in einer konischen

*) S. Dessen Preiscourant am Schlusse dieses Buches.

**) W. Apel liefert auch ein etwas einfacheres, aber für die meisten Fälle vollkommen ausreichendes Instrument mit Ablesung auf 3', ohne Lupen und ohne Feinstellschraube; die Drehung geschieht bei diesem durch zwei senkrechte Messingstifte, welche an Stelle der Lupenträger auf die Alhidade aufgesetzt sind.

Durchbohrung des Kreises dreht, kann die innere Axe *a* gedreht und mittelst des Knopfes *A* auf- und niedergeschoben, endlich in jeder beliebigen Stellung durch Anziehen der Schraubenmutter *c*, welche hierbei den in eine geschlitzte Hülse auslaufenden Obertheil von *B* zusammenpresst, fixirt werden. Die Axe *a* trägt unten zwei Kugelgelenke *e* und *e'*, die man ziemlich schwer drehbar machen kann, indem man die Schräubchen, durch welche die, eine jede der drehbaren Kugeln umfassenden, kleinen Platten verbunden sind, fester anzieht. Am unteren Kugelgelenk *e'* ist entweder eine kleine federnde Klammer zum Fassen der Objectplatte oder der von Apel als »Spitzenplatte« bezeichnete Krystallträger, welcher aus einem einfachen Metallstück mit zwei Spitzen besteht, angeschraubt; auf letztere wird eine Korkplatte aufgespiesst, welche die zu untersuchende Platte mit Gummi arabicum festgeklebt trägt. Um behufs der genaueren Einstellung der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen auch eine Drehung der Objectplatte in ihrer eigenen Ebene zu ermöglichen, kann man nach dem Vorschlage von W. Kohlrausch an das untere Kugelgelenk *e'* auch den doppeltknieförmigen Theil *i* (s. Fig.) anschrauben, dessen unterstes und längstes Stück sich zu einem Ringe erweitert, in welchem ein kleiner Theilkreis (durch die auf *i* angebrachte Nonientheilung auf 1° abzulesen) drehbar ist; auf diesem wird die Platte be-

Fig. 582.



festigt und mittelst eines von aussen durch ein Loch in der Kreisplatte K' eingeführten Drahtes mit dem kleinen Kreise in der Flüssigkeit gedreht. Diese Vorrichtung wurde schliesslich von C. Klein in diejenige Form gebracht, wie sie in der Figur dargestellt ist: in die cylindrische Durchbohrung des Kreises kann die kleine Hülse *g* eingeschoben werden, auf deren drei vorstehende Spitzen der Kork mit der zu untersuchenden Krystallplatte befestigt wird (der Deutlichkeit wegen ist dieser in der Figur weggelassen); die Drehung des kleinen Theilkreises geschieht von aussen durch den Schlüssel *u*, welchen man mit dem Knopfe *U* fasst und in die viereckige Oeffnung des kleinen Bügels *t* einführt; durch Drehen von *u* wird die Schraube ohne Ende *s* und dadurch der Theilkreis, in dessen gezähnten Rand diese eingreift, gedreht. Die zuletzt beschriebene Vorrichtung ist besonders geeignet, das S. 103 auseinandergesetzte Verhalten einer der optischen Axenebene parallelen zweiaxigen Krystallplatte zu demonstriren, während man bei gewöhnlichen Messungen meist mit bequemeren Objectträgern, mit der einfachen Pincette oder der Spitzenplatte, auskommt. An Stelle der letzteren wendete F. Kohlrausch auch eine direct an *a* angesetzte, geschwärzte Metallplatte von lang parallelepipedischer Gestalt an, welche in ihrem unteren Theile einen rectangulären fensterartigen Ausschnitt mit abgeschrägten Seiten besitzt, und deren Rückseite ein- für allemal genau centrirt und justirt ist; die in die Ebene der letzteren fallende Drehungsaxe wird durch einen, von der Vorderseite aus befestigten, das Fenster senkrecht halbirenden feinen Platindraht markirt; an der Rückseite wird durch eine Feder die Objectplatte, nöthigenfalls mit Unterlegung eines Korkes, so angedrückt, dass die spiegelnde Fläche das Innere des Fensters bildet. Diese Einrichtung gestattet schon eine ziemlich gute Einstellung der Platte in eine bestimmte Orientirung und genügt fast für alle Messungen an Stelle des in der Figur abgebildeten Objectträgers, welcher den Nachtheil hat, dass er bei einigermaassen schiefer Stellung der Kugelgelenke leicht während der Drehung an die Wand des Gefässes anstösst, wodurch natürlich die bis dahin vorgenommene Arbeit verloren ist.

Das Eintauchen des betreffenden Objectträgers mit der zu untersuchenden Platte in die stärker brechende Flüssigkeit geschieht nun in der Weise, dass letztere in das vorn mit der planparallelen Glasplatte versehene Glasgefäss bis zu dem engen Theil eingefüllt und dann das Gefäss mit dem Instrumente verbunden wird. Zu dem Zwecke trägt die Metallfassung desselben einen Ring, in dem sich drei durch Schlitze verlängerte Oeffnungen befinden, in welche die flachen Köpfe dreier an der Unterseite von K' befindlicher Schrauben passen; durch eine kleine Drehung bringt man diese in die seitlichen Schlitze, über deren Rand sie übergreifen und so das Glasgefäss an K' festhalten, und zwar in derjenigen Stellung, in welcher die Glasplatte *p* senkrecht zu dem auf die Drehungsaxe des Kreises gerichteten kleinen Fernrohre *f* steht. Dieses letztere ist an der Unterseite des Theilkreises mittelst eines Metallarmes *T* befestigt, welcher eine Auf- und

Niederbewegung, sowie eine Correction der Richtung desselben gestattet. Es besitzt eine $1\frac{1}{2}$fache Vergrösserung und ein Fadenkreuz, daneben aber auch eine Mikrometertheilung zur genaueren Bestimmung des Abstandes der beiden Grenzen der totalen Reflexion, welche doppeltbrechende Krystalle zeigen. Um die Objectplatte, behufs ihrer richtigen Orientirung, durch das Fernrohr sichtbar zu machen, kann vor dessen Objectiv, ähnlich wie beim Goniometer (S. 566), eine Vorschlaglupe aufgesetzt werden.

Da der Brechungsexponent der in dem Glasgefäss befindlichen Flüssigkeit sich mit der Temperatur derselben ändert, so muss diese während der Messung bestimmt werden. Zu diesem Zwecke kann man an einem an der Unterseite des Theilkreises angebrachten Häkchen ein kleines Thermometer anhängen, dessen Stand unmittelbar vor und nach der Messung notirt wird, so dass man in dem Mittel dieser beiden Ablesungen mit genügender Genauigkeit die während der Messung in der Flüssigkeit herrschende Temperatur erhält.

Ehe man zur Messung des Winkels der totalen Reflexion des Li an einer natürlichen oder künstlichen ebenen Fläche eines Kry schreitet, hat man diese zuerst zu justiren und auch angenähert zu centriren, damit auch bei schräger Stellung derselben noch hinreiche l in der Axe des Fernrohrs einfällt. Bei dem festen Objectträger g die spiegelnde Fläche direct hinter das in denselben eingeschnitte F zu legen. Bei Anwendung der Kugelgelenke bringt man die Fl nächst ungefähr in die erforderliche Lage und Richtung durch verticale Schneide, deren Stiel an Stelle von H in die Fussplatte ei wird, und welche alsdann die Drehungsaxe des Kreises bezeic genaue Parallelstellung der reflectirenden Fläche mit der Axe s l wird erreicht mittelst des kleinen, aus schwarzem Glase gefert S, welcher an der Säule M befestigt und der genannten Axe l richtet ist; die Objectplatte wird nämlich durch die Kugelgel so justirt, bis das Spiegelbild des Auges in derselben und im S l S gleicher Höhe erscheint, oder, was noch genauer ist, bis die Spi einer entfernten Flamme, welche sich mit beiden reflectirenden Fl einer dem Kreise parallelen Ebene befindet, in beiden gesehen g h erscheinen. Die erwähnte Schneide gestattet, bei der Justirung näherte Centrirung beizubehalten; nach Ausführung der ersten wieder entfernt. Will man bei Anwendung des in Fig. 582 d Objectträgers die Platte in ihrer Ebene drehen und in ve hie ungen ihre Totalreflexion bestimmen, so muss sie so aufg t we ihre spiegelnde Vorderfläche (die nicht in Betracht ko H wird am besten matt geschliffen, damit man in keinem Falle r von derselben erhält senkrecht zur Drehungsaxe von g li ; man daraus, dass das Bild eines entfernten Gegenst i Auge seinen Ort nicht ändert, wenn man die Platte in er Diese Orientirung ist natürlich vor der Centrirung und J

Nachdem der Objectplatte die erforderliche Orientirung gegeben und das Thermometer neben derselben aufgehängt worden ist, wird das mit der stark brechenden Flüssigkeit gefüllte Glasgefäss in der oben angegebenen Weise an den Kreis angesetzt. Zur Füllung benutzt man am besten*) α-Bromnaphtalin, dessen Brechungsexponent nach Fock (Zeitschr. f. Kryst. 4, 590) für Natriumlicht = 1,66264 bei + 8° C. beträgt und für 1° C. Temperaturzunahme um 0,00045 sich verringert. Befindet sich das gefüllte Glasgefäss an seinem Orte, so steckt man in die Oeffnung der Fussplatte den Metallstab *H*, welcher oben das verschiebbare gekrümmte Doppelblech *h* trägt; in dieses wird ein schwarzer Cartonschirm von der Form eines das Glasgefäss zur Hälfte umhüllenden Halbcylinders eingeklemmt, in dessen Mitte in geeigneter Höhe ein Fenster mit ölgetränktem Papier oder mattem Glase angebracht ist, um das durchgehende Licht in diffuses zu verwandeln. Der Schirm wird nun so gedreht, dass er den Hintergrund des Glasgefässes, auf den das Fernrohr gerichtet ist, verdunkelt und das Licht einer seitlich aufgestellten monochromatischen Flamme (gewöhnlich wird der grösseren Helligkeit wegen Natronlicht angewendet) in der erforderlichen Richtung durch das Fenster auf die Platte fallen lässt. Man entfernt nun das Fernrohr, bringt das auf grosse Entfernung accommodirte Auge**) nahe an die Glaswand *p* und dreht den Objectträger, bis die Grenze der totalen Reflexion sichtbar wird. Alsdann setzt man das vorher genau auf Unendlich eingestellte Fernrohr wieder ein, bringt, wenn nöthig mit Hülfe der Feinstellschraube *F*, die erwähnte Grenze in das Fadenkreuz oder an den mittelsten Strich des Mikrometers im Fernrohr und liest die Stellung der Nonien ab. Hierauf dreht man *H* mit dem Schirme auf die andere Seite des Glasgefässes und stellt die Flamme so vor denselben, dass beide zu ihrer vorigen Stellung in Bezug auf die durch die Axen des Fernrohrs und des Kreises bestimmte Ebene symmetrisch stehen, dreht die Platte mittelst des Knopfes *B* (gleichzeitig mit den Nonien) ebenfalls nach der entgegengesetzten Seite, stellt die Grenze der totalen Reflexion ein und liest abermals ab. Die Differenz der beiden Ablesungen ist der doppelte Winkel der totalen Reflexion, aus welchem sich nach S. 35 der Brechungsexponent ergiebt.

Da die Grenzen der totalen Reflexion bei kleinen oder nicht sehr vollkommen spiegelnden Platten nur schwach sichtbar sind, ist es in allen Fällen zu empfehlen, in einem ganz verdunkelten Zimmer zu arbeiten und zur Ablesung einen Fürscheim'schen Patentbrenner (s. S. 558, Anmerk.) zu benutzen. Auch schwärzt man vortheilhaft die nicht benutzten Flächen der Platte, den Kork, auf welchen sie aufgesetzt wird u. s. w., mit Tusche, damit dieselben kein Licht in das Fernrohr reflectiren. Die günstigste

*) Ueber die mannigfachen Nachtheile des früher verwendeten Schwefelkohlenstoffs s. Fock l. c.

**) Man darf also nicht etwa die Krystallplatte fixiren! Solche, denen die Accommodation des Auges auf Unendlich nicht gelingt, was namentlich bei Kurzsichtigen vorkommt, müssen eine Zerstreuungslinse vor das Auge halten.

Stellung des Schirmes und der monochromatischen Flamme, d. h. diejenige, bei welcher die Grenzen am schärfsten hervortreten, muss durch Probiren ermittelt werden. Um die Temperatur der Flüssigkeit nicht unnütz zu steigern, entfernt oder löscht man die Flamme, sobald die Einstellung erfolgt ist; es empfiehlt sich, für diesen Zweck einen Bunsen'schen Brenner mit Selbstanzünder (ebenfalls Fürscheim'sches Patent) zu benutzen, wie solche mit Vorrichtung zur Einführung des färbenden Metallsalzes (nach Feussner) von Böhm und Wiedemann in München geliefert werden.

Was nun die Orientirung der Platten in Bezug auf die im Falle der totalen Reflexion horizontal in denselben sich fortpflanzenden Strahlen betrifft, so ist dieselbe natürlich ganz gleichgültig für eine Krystallplatte des regulären Systems, ferner für eine zur optischen Axe senkrechte Fläche eines einaxigen Krystalls, welche stets zwei Grenzen liefert, deren eine dem Brechungsexponenten ω, die andere ε entspricht. In allen übrigen Fällen erfordert die Bestimmung der Hauptbrechungsindices einer ein- oder zweiaxigen Krystallplatte eine bestimmte Orientirung derselben in Bezug auf die Fortpflanzungsrichtung der Strahlen. Diese Orientirung kann entweder erfolgen durch eine an der Platte vorhandene Kante, welche so gerichtet wird, dass sie mit dem horizontal in der Grenzschicht sich fortpflanzenden Strahle den erforderlichen Winkel einschliesst. Ist dieser 0° oder 90°, d. h. sollen sich die Strahlen parallel oder senkrecht zu einer die Platte begrenzenden Kante fortpflanzen, so gestattet der feste Objectträger eine sehr rasche und genügende Orientirung der Krystallplatte: dieselbe wird nämlich so an dem Träger befestigt, dass die fragliche Kante einen der horizontalen resp. verticalen Ränder des rectangulären Querschnittes fast berührt und demselben parallel läuft. Für die meisten Messungen genügt es sogar, das Object an der einfachen Spitzenplatte oder in der Klammer zu befestigen und ihm nach dem Augenmaasse die erforderliche Richtung zu geben. Benutzt man den complicirten, in Fig. 582 abgebildeten Objectträger, so kann man durch Drehen der Platte in ihrer Ebene die Stellung aufsuchen, in welcher das Maximum oder Minimum des Abstandes der beiden Grenzen der totalen Reflexion beobachtet wird*); da nach S. 103 dieser Abstand die Differenz der beiden gleichgerichteten Radien der Wellenfläche darstellt, so muss deren grösster oder kleinster Abstand immer einer optischen Elasticitätsaxe oder deren Normale entsprechen, und eine solche Richtung ist es stets, welche bei der Einstellung der Platte in Betracht kommt**).

---

*) Wobei die Mikrometerskala im Fernrohr gute Dienste leistet.

**) Bei einer einaxigen Krystallplatte von beliebiger Orientirung muss die zur optischen Axe senkrechte Richtung offenbar stets dem Maximum des Abstandes der beiden Grenzen entsprechen. Dadurch kann, auch wenn man die krystallographische Orientirung der Platte nicht kennt, jene Richtung gefunden und somit ω und ε bestimmt wer-

Schliesslich kann man eine Krystallplatte auch nach dem Vorschlage von C. Klein durch ihre, im durchfallenden parallelen polarisirten Lichte beobachteten Auslöschungsrichtungen orientiren. Zu diesem Zwecke kann der Theilkreis *K* von dem Ringe *R*, nach Lösung der Schrauben *r*, abgehoben und um 90° gedreht werden, welche Stellung dadurch bestimmt ist, dass die beiden an der Unterseite der Platte vorspringenden parallelepipedischen Stücke in zwei andere Einschnitte von *R* (deren einer rechts in Fig. 582 sichtbar ist) eingreifen. Ist *K* in dieser neuen Stellung mittelst der Schrauben *r* wieder befestigt, so ist das Fernrohr *f* nunmehr so gerichtet, dass der Beobachter die Säule *M* zur Seite hat. Statt des gewöhnlich benutzten Glasgefässes wird jetzt ein anderes, welches durch zwei gegenüberliegende planparallele Glasplatten geschlossen ist, angesetzt, und ausserdem mit dem Kreise ein zweites, *f* gegenüberstehendes Fernrohr verbunden; beide Fernröhre werden mit drehbaren Nicols versehen und diese zu einander gekreuzt. Alsdann lässt man Licht durch das eine Fernrohr, von da durch die Hülse *g* und die darauf befestigte Krystallplatte, welche natürlich auch auf der Hinterseite eine spiegelnde Fläche haben muss und dort nicht mit Kork bedeckt sein darf, endlich durch das vordere Fenster fallen; durch Drehen der Platte in ihrer Ebene wird dann ihre Dunkelstellung zwischen den gekreuzten Nicols und dadurch ihre Orientirung bestimmt.

Das zuletzt beschriebene Verfahren macht natürlich das Totalreflectometer zu einem sehr complicirten und theuren Instrumente, daher es entschieden vorzuziehen ist, die Platte, falls sie keine Kante besitzt, durch welche die Orientirung ermöglicht wird, vorher im gewöhnlichen Polarisationsinstrumente zwischen gekreuzten Nicols optisch zu orientiren und dann in der erforderlichen Richtung auf einer Seite eine Fläche anzuschleifen (oft ist die Herstellung einer orientirenden Randfläche auch durch Spaltbarkeit möglich, oder jener Richtung parallel eine Linie mit dem Diamanten einzuritzen.

Welcher dieser Wege für den einzelnen Fall auch als der geeignetste befunden werden mag, immer wird es möglich sein, auch bei Anwendung der einfachen, weiter oben beschriebenen Objectträger die Platte mit einer für die Messungen ausreichenden Genauigkeit zu orientiren. Jede weitere Complication des Kohlrausch'schen Totalreflectometers ist deshalb nicht zu empfehlen, weil das Instrument doch in allen Fällen nur zu angenäherten Messungen geeignet ist. Will man durch sehr sorgfältige Orientirung der Krystallplatte einen höheren Grad von Genauigkeit erreichen, so ist es viel vortheilhafter, sich des weiterhin beschriebenen Fuess-Liebisch'schen Totalreflectometers zu bedienen, welches mit dem Fuess'schen Goniometer Nr. 2 verbunden werden kann und weit genauere Messungen gestattet.

In welcher Weise eine Krystallplatte von bestimmter krystallographischer Orientirung auf dem Objectträger des Totalreflectometers befestigt

---

den; dreht man dann die Platte in ihrer Ebene um 90°, so bildet offenbar nun die Fortpflanzungsrichtung der Grenzstrahlen denselben Winkel mit der optischen Axe, wie die Ebene der Platte; von deren Neigung zur Axe hängt aber die Geschwindigkeit des ausserordentlichen Strahles ab; es lässt sich daher aus dem für diesen gefundenen Werthe ε' die Neigung α der Platte zur Axe berechnen und zwar nach F. Kohlrausch mittelst der Formel

$$\sin^2\alpha = \frac{\varepsilon'^2 - \omega^2}{\varepsilon^2 - \omega^2}.$$

werden muss, um die Hauptbrechungsindices zu liefern, ergiebt sich in jedem einzelnen Falle aus ihrer krystallographischen Orientirung und aus den allgemeinen Bemerkungen S. 57 und 102. Ebenso ergeben sich für jeden Fall aus der Orientirung der Platte die beiden Schwingungsrichtungen des in derselben, bei horizontaler Fortpflanzung in der Grenzschicht, doppelt gebrochenen Lichtes. Um einen der Strahlen für sich zu beobachten, hat man einen Nicol so vor das Fernrohr zu halten*), dass sein Hauptschnitt parallel der betreffenden Schwingungsrichtung ist, wie sie für das beobachtende Auge erscheint (also ihre Projection auf die Ebene senkrecht zur Sehrichtung); alsdann wird die zweite Grenze, welche dem dazu senkrecht schwingenden Strahle entspricht, vollkommen zum Verschwinden gebracht. Diese erscheint natürlich am schärfsten, und die erste verschwindet, wenn man den Nicol um 90° dreht.

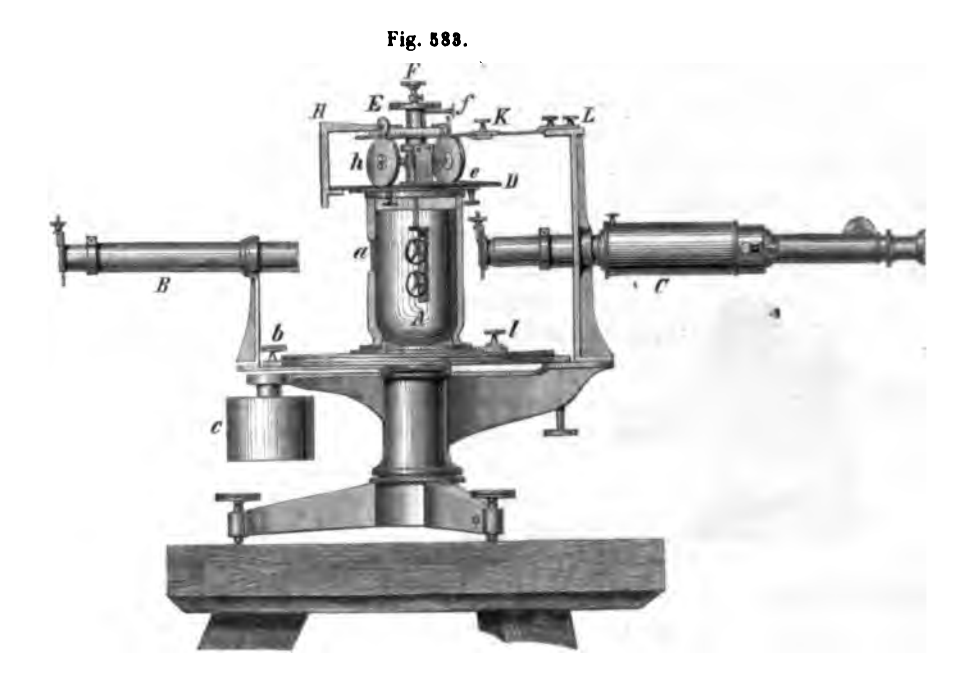
2) **Ch. Soret's Refractometer.** Während der Apparat von Kohlrausch nur für gewisse monochromatische Lichtarten, am bequemsten für Natriumlicht, angewendet werden kann, hat Ch. Soret ein allerdings weit complicirteres Instrument construirt, welches die Bestimmung der Brechungsexponenten durch Totalreflexion für alle Theile des Spectrums gestattet.

Um in derselben Weise, wie bei genauen Messungen der Dispersion von Prismen, die Bestimmung für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien ausführen zu können, bedarf es des Sonnenlichtes, welches mittelst eines Heliostaten in das verdunkelte Zimmer und auf den Spalt des Collimators *B* Fig. 583 ($\frac{1}{6}$ natürl. Grösse) geworfen wird. Von letzterem fallen die parallelen Strahlen durch eine planparallele Glasplatte *a* in das mit der stark brechenden Flüssigkeit gefüllte cylindrische Gefäss *A*, in welchem sich die zu untersuchende Platte befindet; nach der Reflexion an letzterer werden dieselben durch die cylindrische Austrittsfläche, welche wie eine sogenannte Cylinderlinse wirkt, concentrirt und fallen so auf den Spalt des durch Drehung um die Axe des Instrumentes in die richtige Stellung gebrachten, geradsichtigen Spectroskops *C*, welches sie zu einem breiten Spectrum dispergirt. Das cylindrische Gefäss ist oben durch den mit drei Schrauben befestigten Theilkreis *D* geschlossen, welcher in der Mitte von zwei Axen durchbohrt ist, deren kürzere äussere *E* mit dem Nonius *e* (vergl. auch Fig. 584) verbunden ist, während die innere bis in die Flüssigkeit reicht und die Objectplatte trägt. Mit *E* sind beiderseits zwei verticale Scheiben *h* in Verbindung, gegen welche die kreisförmige horizontale Platte *G* durch die Streben *H* mittelst der Knöpfe *k* angepresst wird. Dreht man nun das, durch ein Gegengewicht *c* balancirte Spectroskop *C* um die verticale Axe des Instrumentes, so nimmt, wenn die Klemmschraube *K* angezogen ist, die horizontale Platte *G* an dieser Drehung Theil

*) Auf Verlangen wird von M. Apel auch ein Nicol geliefert, welcher mit seiner Fassung auf das Ocular des Fernrohrs aufgesetzt und um die Axe des letzteren gedreht werden kann.

und zwingt dadurch die beiden Scheiben *h*, auf dem Theilkreise *D* zu rollen; hierdurch erfährt die Axe *E* mit dem Nonius eine Winkelbewegung, welche halb so gross ist, als die des Spectroskops, so dass die von der Objectplatte reflectirten Strahlen nicht aufhören, auf den Spalt des Spectroskops zu fallen, während der Einfallswinkel geändert wird. Ist der letztere sehr gross, so werden alle Strahlen total reflectirt und das Spectrum erscheint sehr hell. Vermindert man nun nach und nach den Incidenzwinkel, so erreichen allmählich die verschiedenen Strahlen die Grenze ihrer totalen Reflexion und werden alsdann nur noch theilweise, also mit geringerer Intensität, reflectirt. Man sieht in Folge dessen im Spectrum gleichsam einen dunklen Vorhang vom Roth zum Violett vorschreiten, wenn,

Fig. 583.



wie es gewöhnlich der Fall ist, die Flüssigkeit eine grössere Dispersion hat, als der eingetauchte Körper. Stellt man nun die Grenze zwischen dem helleren und dem minder hellen Theile des Spectrums durch gemeinsame Drehung der Platte und des Spectroskops auf eine Fraunhofer'sche Linie ein, so hat man den der letzteren entsprechenden Grenzwinkel der totalen Reflexion: man braucht also nur den Einfallswinkel dieser Strahlen zu bestimmen, was in derselben Weise, wie beim Kohlrausch'schen Instrumente, durch Ablesen der mit der Platte vorgenommenen Drehung von dieser Stellung bis zu der dazu symmetrischen geschieht.

Wegen der Variabilität des Brechungsexponenten der Flüssigkeit wird die letztere bei dem Soret'schen Apparate ganz aus der Bestimmung eliminirt, indem jede Messung doppelt vorgenommen wird, einmal an der zu

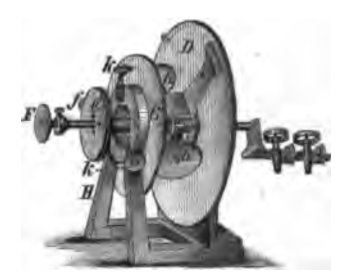
untersuchenden Platte, das andere Mal an einem Glasprisma, dessen Brechungsindices für die Fraunhofer'schen Linien ein- für allemal nach der Methode der Minimalablenkung bestimmt worden sind. Zu diesem Zwecke wurden am Ende der Axe F zwei Krystallträger angebracht, der obere für das Prisma, der untere für die Platte, von denen jeder durch Auf- oder Niederschieben der Axe F in den Gang der Lichtstrahlen gebracht werden kann. Ist n der gesuchte Brechungsexponent, φ der Grenzwinkel der Platte, N und Φ die entsprechenden Werthe für das Vergleichsprisma, so hat man

$$n = \frac{N \sin\varphi}{\sin \Phi}.$$

Bei doppeltbrechenden Platten sieht man natürlich zwei Grenzen, von denen eine durch Einfügung eines Polarisators in das Spectroskop zum Verschwinden gebracht werden kann.

Um die beiden reflectirenden Flächen der Platte und des Vergleichsprismas der Drehungsaxe des Apparates parallel zu machen, nimmt man den Theilkreis D ab und stellt ihn auf den Streben H so aufrecht, wie es in Fig. 584 dargestellt ist. Das Prisma und die Krystallplatte werden in den ringförmigen Objectträgern mit Klemmschrauben oder einfach mit Hülfe von Korkstückchen befestigt und dabei die beiden reflectirenden Flächen so genau als möglich in die Verlängerung der Axe gebracht. Durch die aus der Figur ersichtlichen Justirbewegungen der Träger werden dieselben hierauf, mit Benutzung eines möglichst entfernten Signals, genau so justirt, wie ein Krystall auf dem Reflexionsgoniometer. Nachdem so die beiden Objecte ihre richtige Stellung erhalten haben, wird D wieder auf das cylindrische Gefäss aufgesetzt und festgeschraubt, und die Axe F gedreht, bis die von der Fläche des Prismas reflectirten Strahlen in das seitlich gestellte Spectroskop fallen; dann werden die concentrischen Axen E und F durch die Klemmschraube f mit einander verbunden, ebenso durch K der ganze Krystallträger mit dem Spectroskop und letzteres in dem einen oder dem anderen Sinne gedreht, bis der in das Spectrum eintretende Schatten die Fraunhofer'sche Linie, für welche man die Messung ausführen will, berührt. Nachdem diese Stellung abgelesen ist, wird die Schraube K gelöst, das Spectroskop auf die andere Seite geführt und der Krystallträger mit der Hand gedreht, bis die reflectirten Strahlen von Neuem auf den Spalt des Spectroskops fallen, worauf in derselben Weise die Grenze eingestellt wird, wie vorher. Die halbe Differenz der beiden Positionen giebt den Winkel der totalen Reflexion für das Vergleichsprisma. Hierauf wird die Axe F nach oben verschoben und die ganze Operation für die zu untersuchende Platte wiederholt, endlich

Fig. 584.



wird dieselbe noch einmal mit dem Vergleichsprisma vorgenommen, so dass man, um den Einfluss der Temperaturschwankungen zu eliminiren, das Mittel der vorher und nachher für das Prisma gefundenen Zahlen mit dem dazwischen für die Objectplatte gefundenen Werthe vergleicht. Durch genügende Wiederholung der einzelnen Einstellungen kann man auf diesem Wege Brechungsexponenten bis zur vierten Decimale bestimmen.

Der Apparat ist so construirt, dass er nicht nur leicht aus einander genommen und gereinigt werden kann, sondern dass auch beim Zusammensetzen alle Theile, namentlich die obere und die untere Fassung des cylindrischen Gefässes, unmittelbar so in einander passen, dass sie unveränderlich alle genau die gleiche Drehungsaxe besitzen. Das Instrument wird von der »Société genevoise, pour la construction d'instruments de physique« (Plainpalais, Génève) für den Preis von 800 Fr. geliefert und hat in neuester Zeit noch einige kleine Verbesserungen seitens des Autors erfahren.

3) **Totalreflectometer nach Wollaston.** Die älteste von Wollaston benutzte Methode, Brechungsexponenten mittelst Totalreflexion zu bestimmen, besteht in Folgendem: Man lässt Licht durch die Seitenfläche eines Glasprismas eintreten, an dessen Hinterfläche reflectiren und durch die zweite Seitenfläche wieder austreten. Gegen die reflectirende Hinterfläche wird eine ebene Fläche der zu untersuchenden Substanz mittelst eines stark brechenden durchsichtigen flüssigen Kittes befestigt. Da letzterer eine planparallele Schicht bildet, findet die Brechung genau so statt, als wenn die Objectplatte direct an der Hinterfläche des Prismas anläge*). Ist nun die Richtung der einfallenden Strahlen derart, dass dieselben im Innern des Prismas auf der Grenzfläche zwischen Glas und Objectplatte unter kleinerem Winkel auffallen, als der Grenzwinkel der totalen Reflexion beträgt, so werden sie nur zum Theil reflectirt, und die Hinterfläche des Prismas erscheint dunkler, als wenn die Objectplatte nicht vorhanden wäre. Dreht man das Prisma, bis der Grenzwinkel erreicht ist, so werden die Strahlen nun an der Hinterseite desselben total reflectirt, und diese erscheint heller. Man sieht nun leicht ein, dass man aus der Richtung der Strahlen beim Austritt in Bezug auf die Flächen des Prismas und aus dem Brechungsexponenten des letzteren den Gang der Strahlen im Innern und damit den Grenzwinkel der totalen Reflexion für die Brechung aus der Glassorte des Prismas in die zu untersuchende Platte berechnen kann.

Diese Methode hat folgende Voraussetzungen: 1) muss der Brechungsindex des Prismas grösser sein, als derjenige der zu untersuchenden Substanz, daher man zur Anfertigung jenes schwere, stark brechende Glassorten nimmt (mittelschweres Flintglas hat den Brechungsindex 1,64, das schwerste, zu solchen Zwecken noch verwendbare Glas 1,80, doch ist

*) Eine vollständige Berührung ist hierbei zwischen zwei sehr vollkommenen polirten Ebenen durch Andrücken zwar auch zu erreichen, so dass auf einer genügend grossen Strecke directer Lichtübergang stattfindet, viel leichter und sicherer aber durch eine äusserst dünne, dazwischen gebrachte Flüssigkeitsschicht.

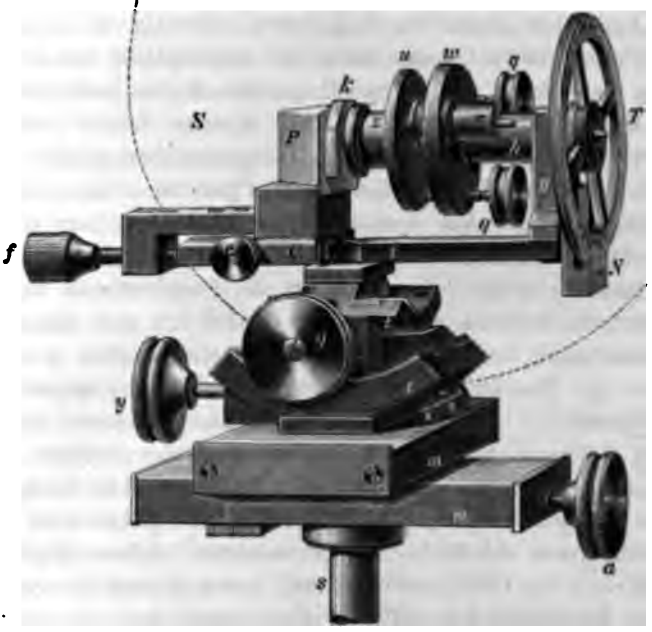
solches, da es leicht mechanischen Beschädigungen unterworfen ist, nur dann zu verwenden, wenn gewöhnliches Flintglas nicht mehr ausreicht); 2) muss die zwischen Prisma und Object gebrachte Flüssigkeitsschicht mindestens eine stärkere Brechbarkeit besitzen, als die Objectplatte, weil sonst an ihr die Totalreflexion früher eintritt, als an der Grenzfläche des Objectes; besonders vortheilhaft ist es jedoch, wenn der Brechungsexponent der Flüssigkeit auch noch höher ist, als derjenige des Prismas, weil dann überhaupt keine Totalreflexion an ersterer stattfindet und eine solche immerhin störend bei der Beobachtung wirken kann. Da zur Vermeidung derselben der Unterschied zwischen der Brechbarkeit der Flüssigkeit und des Prismas nur klein zu sein braucht, reicht man bei den meisten Substanzen mit Cassiaöl (Brechungsexponent für Natriumlicht 1,58—1,64) oder α-Bromnaphtalin (s. S. 595) aus, doch kann man auch, da bei dieser Methode nur minimale Quantitäten der Flüssigkeit in Anwendung kommen, Substanzen benutzen, mit denen andernfalls nicht gut zu manipuliren wäre, z. B. Arsenbromür $AsBr^3$, dessen Brechungsindex für Na-Licht = 1,781, oder eine Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff (Brechungsexponent 1,95) oder die stark brechenden Körper P^4S resp. P^2S.

Durch Abbe, welcher zuerst zeigte, dass die Grenze der totalen Reflexion sich in einem auf Unendlich eingestellten Fernrohre als scharfe Linie zeige und wie ein Signalbild mit dem Fadenkreuz zur Deckung gebracht werden könne, und durch Feussner, in dessen am Schlusse dieses § citirter Arbeit eine ausführliche Darstellung der Entwickelung der Totalreflexionsmethode gegeben ist, wurde die Verbindung des Wollaston'schen Verfahrens mit der Anwendung eines feiner getheilten Refractometers hergestellt und dadurch eine weit grössere Genauigkeit der Messung ermöglicht. Dieselbe wird auch dadurch wesentlich erhöht, dass die Temperatur der Flüssigkeit, deren Schwankungen bei dem Kohlrausch'schen Apparate die Genauigkeit sehr beeinträchtigen, bei der Wollaston'schen Methode nicht in Betracht kommt, da es auf den Brechungsexponenten der dünnen planparallelen Flüssigkeitsschicht zwischen Prisma und Object überhaupt gar nicht ankommt, so lange derselbe nicht geringer wird, als derjenige der Objectplatte, was man natürlich immer durch Wahl einer genügend stark brechenden Flüssigkeit vermeiden kann.

Um die zu untersuchenden Platten in bestimmter Weise gegen die Lichtstrahlen zu orientiren, verband zuerst Feussner mit dem Prisma eine kleine Vorrichtung, welche gestattete, die Objectplatte in ihrer Ebene zu drehen und den Drehungswinkel zu bestimmen. Wesentlich verbessert wurde diese Vorrichtung in dem von Liebisch beschriebenen und von Fuess ausgeführten Apparate, der nunmehr, nach einigen vom Verf. zugefügten Abänderungen, wohl allen, bei der Untersuchung von Krystallen zu stellenden Anforderungen entspricht. Dieser möge zuerst in derjenigen Form behandelt werden, in welcher er ein Attribut des Fuess'schen Reflexionsgoniometers (Modell Nr. 2, s. S. 560) bildet.

Fig. 585 ($^3/_4$ nat. Grösse) stellt in ihrem unteren Theile die Centrir- und Justirvorrichtung des Fuess'schen Goniometers dar, auf welche an Stelle des Krystallträgers eine horizontale Schiene *i* aufgeschraubt wird, deren rechtes Ende das Lager *g* und die Hülse *h* trägt. In dieser befindet sich drehbar die Axe des Theilkreises *T*, welcher zur Drehung derselben und zur Messung des Drehungswinkels (mittelst des Nonius *N* auf Zwölftelgrade) dient. Das andere Ende dieser Axe trägt die kreisförmige Platte *w*, und mit dieser ist durch zwei Stellschrauben *qq* und den Federbolzen *r* die zur Aufnahme und Justirung des Objectes bestimmte Scheibe *u* verbunden. Auf dieser sitzt ein kurzes Rohrstück mit der aufgeschobenen Hülse *s*, deren Ende durch eine Platte geschlossen ist, auf welcher die Objectplatte *k* mit

Fig. 585.

erhärtendem Kitt so befestigt wird, dass die spiegelnde Fläche annähernd parallel *u* ist. Der linke, beiderseits abgeschrägte Theil der Schiene *i* wird von dem Schieber *b* umfasst, welcher durch die Schraube *e* fixirt werden kann und mittelst des Winkelstückes mit der Schraube *f* verbunden ist; diese wird so gestellt, dass ihr Ende an die linke Endfläche der Schiene *i* antrifft, wenn das auf *b* befindliche Flintglasprisma *P* der Objectplatte *k* genügend genähert ist. Das Prisma *P* ist in seinem Lager festgekittet und so justirt, dass seine rechte Fläche senkrecht zur Drehungsaxe des Kreises *T* steht, während es mit seinem Lager zusammen in horizontaler Richtung, senkrecht zur Schiene *i*, auf *b* verschoben werden kann.

Statt der Hülse *z* kann auf das Rohrstück der Platte *u* die in Fig. 586 in nat. Grösse abgebildete Vorrichtung mittelst der Hülse *c* aufgeschoben werden. Vor letzterer befindet sich, in einer Gabel *l* leicht drehbar, ein sogenanntes Cardani'sches Ringsystem, auf dessen gerieftem Mittelstück das Object festgekittet wird, zu welchem Zwecke man, um die Spitzengelenke des Ringsystems zu schonen, das letztere aufwärts dreht und auf ein ebenes Klötzchen auflegt. Nach der Befestigung der Objectplatte wird das Prisma *P* so an dieselbe herangeschoben, dass die spiegelnde Objectfläche der Prismenfläche mit sanftem Drucke, welcher durch die Feder *d* bewirkt wird, vollkommen anliegt und anliegend bleibt, wenn man mittelst des Kreises *T* das Object um die horizontale Axe des Apparates dreht. In Folge der auf vorig. S. erwähnten Justirung der Prismenfläche nimmt daher die Objectplatte von selbst diejenige Lage ein, in welcher sie zu dem erwähnten Theilkreise senkrecht steht, folglich beim Drehen desselben sich in ihrer eigenen Ebene dreht. Man hat also dann nur nöthig, mittelst der Justirschrauben *yy* die Flächen des Prismas der verticalen Axe des Goniometers parallel zu richten (zu justiren), wodurch zugleich die Axe von *T* die erforderliche, zur Goniometeraxe normale Richtung erhält. Ist die spiegelnde Fläche eines Objectes so klein, dass ein genaues Anliegen derselben an die Prismenfläche nicht sicher zu erreichen ist, so bedient man sich der Hülse *z**) und justirt das Object dadurch, dass man dasselbe mittelst der Stellschrauben *q* senkrecht zur Drehungsaxe des Theilkreises richtet; diese Stellung ist erreicht, wenn das von der Objectfläche reflectirte Bild des Collimatorsignals (am besten der kreisrunden Oeffnung, S. 565), im Beobachtungsrohr gesehen, beim Drehen von *T* seine Lage unverändert beibehält. Dieses Bild bringt man dann mittelst der linken Schraube *y* (welche der Schiene *i* parallel ist) zur Deckung mit dem Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres; alsdann liegt die Axe des Kreises senkrecht zur Goniometeraxe, und damit ist auch die rechte Prismenfläche dieser Axe parallel gestellt. Zur vollständigen Justirung des Prismas genügt also eine Drehung der nach vorn gerichteten Schraube *y*.

Fig. 586.

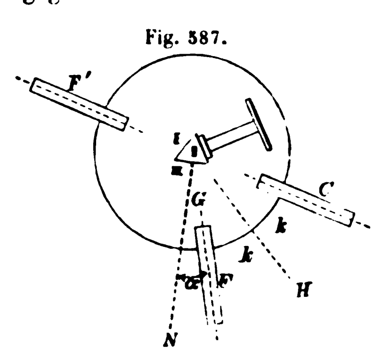


Bei etwas grösseren Platten bedient man sich am besten der selbstthätigen Andrückvorrichtung Fig. 586, welche die immerhin mühsame Justirung mittelst der Schrauben *q* überflüssig macht. Um nun die Platte in ihrer Ebene zu orientiren, so dass die Strahlen im Falle der totalen Reflexion sich in der Grenzschicht derselben genau in einer krystallographisch bestimmten Richtung fortpflanzen, welche alsdann der horizontalen

*) Für provisorische Versuche mit kleinen Platten ist noch eine ähnliche Hülse, aber mit convexer Oberfläche, beigegeben, in deren Innerem sich eine schwache Spiralfeder befindet, welche das Object an das Prisma andrückt.

Ebene des Goniometerkreises parallel liegt, d. h. in die Einfallsebene des Lichtes fällt, — benutzt man eine Kante der Krystallplatte, welche durch eine Randfläche gebildet wird, und welcher die Einfallsebene des Lichtes parallel sein oder mit der sie einen bestimmten Winkel bilden soll. Diese Kante muss zuerst in Bezug auf den Theilkreis des Goniometers justirt werden. Zu dem Zwecke wird der Prismenträger auf b so verschoben, dass die Platte ein wenig über die Prismenkante vorragt und daher ihre Seitenfläche zur Reflexion des Lichtes frei wird. Andererseits gestattet das Cardani'sche Ringsystem dadurch, dass in den Krystallträgertheil a ein kleines Tischchen eingesetzt wird, noch die von dem Collimator ausgehenden Strahlen, wenn auch bei senkrecht zur Hauptfläche stehender Seitenfläche der Platte nur unter spitzem Incidenzwinkel, auf die letztere fallen zu lassen und dadurch die Kante beider Flächen durch Drehen des Kreises T genau zu justiren. Ist dies geschehen, so dreht man die Platte in ihrer Ebene weiter um den erforderlichen Winkel, den man an T abliest (soll die Kante der Einfallsebene des Lichtes parallel werden, um 90°), und verschiebt das Prisma wieder bis zur vollständigen Verdeckung der Objectplatte, auf deren Oberfläche man nun einen Tropfen Bromnaphtalin bringt. Um störendes Nebenlicht abzuhalten, kann man auf das Objectiv des Beobachtungsfernrohres eine im Innern geschwärzte Hülse aufsetzen. Um eine der Grenzen allein und schärfer zu sehen, muss man bekanntlich ein Nicol'sches Prisma in den Gang der Lichtstrahlen einschalten; den mit vorstehend beschriebenen Totalreflectometern ausgerüsteten Fuess'schen Goniometern wird daher ein eigens hierzu eingerichtetes, mit einem drehbaren Nicol versehenes Ocular beigegeben. Zwischen die monochromatische Flamme und das Instrument bringt man einen Schirm von Oelpapier oder dergl., welcher durch den Kreis in Fig. 585 angedeutet ist. Das hierdurch zerstreute Licht fällt auf die in Fig. 587 mit I bezeichnete Fläche des Prismas, wird an der Hinterseite (II) desselben von der Objectplatte reflectirt und tritt durch die Fläche III aus. Den Winkel α, welchen die der Grenze der totalen Reflexion entsprechenden Strahlen mit der Normalen N zur Fläche III bilden, kann man sehr einfach dadurch bestimmen, dass man das Beobachtungsfernrohr F vorher in die Stellung F' bringt und dann aus dieser, dem Collimator C parallelen Position um einen bestimmten, am Kreise abgelesenen Winkel $F'F$ dreht; man kennt alsdann den Winkel zwischen F und C, welcher $= 2k$ gesetzt werden möge. Hierauf stellt man, bei festgeklemmtem Nonienkreise, durch Drehung des Prismas die Grenze der totalen Reflexion auf die Mitte des Fadenkreuzes in F ein, liest ab, dreht das Prisma weiter, bis das Signal des Collimators, an der Fläche III

Fig. 587.



gespiegelt, im Fadenkreuz erscheint, und liest wiederum die Stellung des Limbus ab. Da in der letzteren Stellung die Normale der Prismenfläche *III* mit der Richtung *H* zusammenfällt, so hat dieselbe bei der Drehung zwischen den beiden abgelesenen Positionen den Winkel $k + \alpha$ (resp. $k - \alpha$, wenn die Richtung *G* der Grenzstrahlen links von *N* liegt) beschrieben. Da *k* bekannt ist, folgt hieraus α, d. i. die Richtung der austretenden Grenzstrahlen in Bezug auf die Austrittsfläche *III* des Prismas; bildet nun letztere mit *II*, an welcher die Objectplatte anliegt, den Winkel *A**), und ist *n* der Brechungsexponent des Prismas, so bildet der Grenzstrahl im Innern mit der Normale der Austrittsfläche den Winkel *l*, für welchen die Gleichung gilt

$$\sin l = \frac{\sin \alpha}{n}$$

Der gesuchte Incidenzwinkel, unter welchem die totale Reflexion an der Fläche *II* stattfindet, ist daher

$$i = A + l,$$

wenn der Strahl *G*, wie in Fig. 587, rechts von *N* austritt,

$$i = A - l,$$

wenn er links von *N* liegt. Das erstere ist der Fall, wenn der Brechungsexponent des Prismas nicht sehr hoch über demjenigen der zu untersuchenden Substanz liegt, wenn also *i* einen ziemlich grossen Werth besitzt.

Das an den von Fuess gelieferten Instrumenten mit *A* bezeichnete Prisma hat nun bei gewöhnlicher Temperatur für Natriumlicht den Brechungsindex 1,6497, kann also mit Vortheil für alle Substanzen benutzt werden, welche eine, wenn auch nur sehr wenig niedrigere Brechbarkeit besitzen, und dies ist die grosse Mehrzahl. Wendet man als Flüssigkeit hierbei Bromnaphtalin an, so hat man, da nach S. 595 dessen Brechungsexponent bei $15^0 = 1,6595$, den weiteren Vortheil, dass an der Flüssigkeitsschicht zwischen Prisma und Objectplatte bei keiner Stellung des ersteren Totalreflexion stattfinden kann. Ausser diesem Prisma ist dem Instrumente ein zweites *B* beigegeben, dessen Brechungsexponent 1,7849. Da noch höhere Brechbarkeit nur sehr selten vorkommt, so ist man hierdurch in den Stand gesetzt, fast alle krystallisirten Körper nach dieser Methode zu untersuchen. Natürlich wendet man aber aus dem S. 602 erwähnten Grunde das Prisma *B* nur da an, wo es wegen der hohen Brechbarkeit der zu untersuchenden Substanz absolut erforderlich ist, und verbindet es mit dem Object durch eine der S. 602 aufgezählten stark brechenden Flüssigkeiten.

Das beschriebene Totalreflectometer wird von Fuess auch als besonderes Instrument (s. Fig. 588) geliefert. Auf einem Dreifuss befindet sich ein fester Kreis mit zwei gegenüberliegenden Nonientheilungen, in welchen ein Limbus

*) Dieser Werth beträgt ungefähr 60^0, da die Fuess'schen Prismen nahezu gleichseitig geschliffen werden; derselbe muss aber natürlich vorher ein- für allemal genau ermittelt werden. Ebenso hat jeder Beobachter nöthig, den Brechungsexponenten seiner Prismen sorgfältig zu bestimmen, da kleine Verschiedenheiten in der Beschaffenheit des Glases der zu verschiedenen Zeiten gelieferten Prismen unvermeidlich sind.

drehbar so eingelassen ist, dass die Oberflächen beider in eine Ebene fallen. An dem ersteren ist der unbewegliche Collimator *C*, mit dem Spalte *s*, befestigt, an dem letzteren das Beobachtungsfernrohr *F*, welches mit einem Nicol vor dem Ocular versehen ist, dessen Stellung an einer kleinen Kreistheilung auf *n* abgelesen werden kann. Von der Drehung dieses Fernrohres, welche also mit dem Limbus gleichzeitig stattfindet, ist diejenige der in der Mitte aufgesetzten, schwach conischen Hülse *H* unabhängig. Letztere

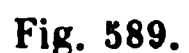
Fig. 588.

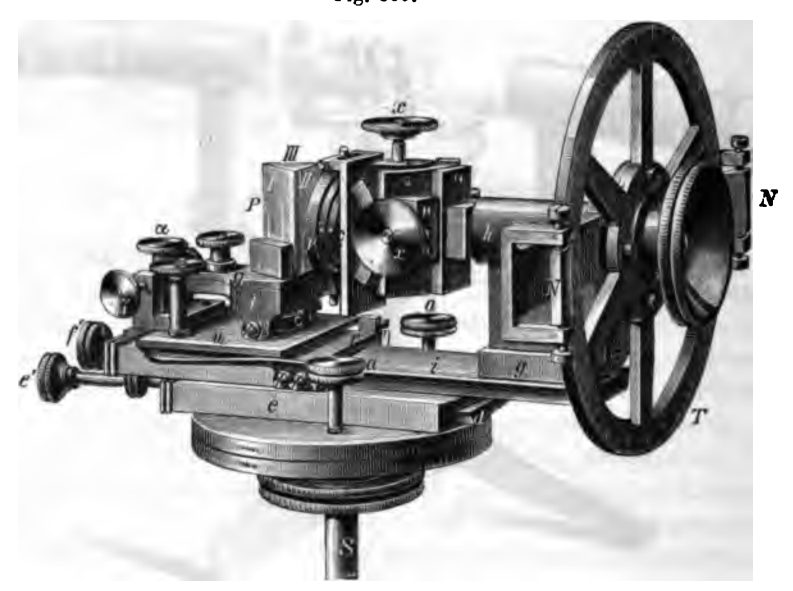


trägt eine kreisrunde Platte und auf dieser, durch einen Federbolzen und zwei Schrauben justirbar, eine dreieckige Platte mit zwei Schienen, zwischen welche die Schiene *i* des Fig. 585 abgebildeten eigentlichen Totalreflexionsapparats einfach eingeschoben ist. Die Messung geschieht nun mit diesem Instrumente in folgender einfacher Weise: Nachdem die Position des Collimators durch directe Einstellung des Spaltes bestimmt ist, wird das Beobachtungsfernrohr in eine ähnliche Stellung gebracht, wie *F* in Fig. 587, welche am Kreise abgelesen wird, und hierauf das Prisma gedreht, bis die Grenze der totalen Reflexion mit dem Fadenkreuz zusammenfällt; diese Stellung des Prismas kann durch eine an *H* befindliche Klemmschraube fixirt werden. Alsdann wird das Beobachtungsfernrohr gedreht, bis das Bild des Signals im Faden eingestellt ist, und diese Position abgelesen. Wie eine einfache Betrachtung lehrt, ergiebt sich hieraus die Richtung der Normalen der Austrittsfläche der Strahlen aus dem Prisma und damit der Winkel, welchen die Grenzstrahlen mit jener Richtung bilden. Die Justirung

der Platte ist bei diesem Apparate natürlich ganz die gleiche, wie bei dem mit dem gewöhnlichen Goniometer verbundenen.

Da die Genauigkeit der Messung von Brechungsexponenten mittelst der vorbeschriebenen Methode, wenn genügend grosse und vollkommene Platten vorliegen, ebenso hoch gesteigert werden kann, wie bei der bisher für genauere Bestimmungen fast ausschliesslich angewendeten Methode der Ablenkung durch ein Prisma, so hat Fuess endlich noch ein grösseres Instrument derselben Art construirt, welches in Fig. 589 in $\frac{1}{2}$ nat. Grösse


Fig. 589.



abgebildet ist. Die Goniometeraxe S trägt zwei runde Messingplatten, deren obere durch die Schrauben a gegen die untere etwas geneigt werden kann, um die Axe des Theilkreises T senkrecht zur Goniometeraxe zu richten. Auf der oberen Platte sitzt die Schiene d, auf welche der Apparat mittelst des Schlittens e, der durch die Schraube e' bewegt wird, aufgeschoben ist. Mit e ist die Schiene i fest verbunden, welche rechts das Lager g für die Axe h des Theilkreises T trägt; an letzterem können mittelst der Nonien N die Drehungen auf 1′ abgelesen werden. Auf dem anderen Ende von h ist eine aus zwei Cylinderschlitten bestehende Justirvorrichtung befestigt, welche genau derjenigen des Goniometers (s. S. 563) gleicht. Indem man an Stelle des Cardani'schen Ringsystems c einen Spiegel aufsetzt, kann man die S. 604 erwähnte Einstellung desselben senkrecht zur Axe h und alsdann durch die Schrauben a die Justirung der genannten Axe zur Goniometeraxe ausführen. Auf der Schiene i wird der Schlitten f aufgeschoben, dessen Bewegung durch die Schraube f' bewirkt wird. Das auf dem Schlitten befindliche Prisma P ist auf einer Messingplatte befestigt,

welche mit zwei an ihrer Unterseite angebrachten Stiften in die Platte *t* eingesetzt und mittelst *q* festgeschraubt wird; *t* hat nach unten zwei Fortsetzungen, welche mit den Schrauben β (die hintere ist nur z. Th. sichtbar) in die kreisförmige Platte δ eingreifen; durch die Schraube α wird eine Drehung des Prismas um die horizontale Axe $\beta\beta$ bewirkt. δ ist auf der Platte *u* drehbar, so dass durch die Bewegung der Schrauben γ (deren hintere fast ganz verdeckt ist) das Prisma um eine senkrechte Axe gedreht wird. Durch diese beiden Bewegungen kann demnach die Prismenfläche *II* genau senkrecht zur Axe *h* gerichtet werden. Es bedarf also nur noch der Justirung der Prismenkante *II : III*, d. h. einer Drehung um eine zum Theilkreise *T* senkrechte Axe. Zu dem Zwecke ist die Platte *u* um zwei auf der Hinterseite angebrachte Spitzenschrauben ι drehbar, und ihre Drehung geschieht mittelst der Schraube ε, welcher eine vorn sichtbare Feder entgegenwirkt.

Zum Schluss möge noch eine Zusammenstellung der wichtigsten auf die Methode der Bestimmung von Brechungsexponenten durch Totalreflexion bezüglichen Literatur gegeben werden:

W. Wollaston, Philosoph. Transact. 1802, 365, und Gilbert's Annalen d. Phys. 31, 235 u. 398.

Abbe, Neuere Apparate zur Bestimmung des Brechungsvermögens etc. Jena 1874 und Sitz.-Ber. d. Jenaer Ges. f. Med. u. Naturw. Febr. 1879.

Terquem und Trannin, Poggend. Ann. 157, 302.

E. Wiedemann, ebenda 158, 375.

F. Kohlrausch, Ueber die Ermittelung von Lichtbrechungsverhältnissen durch Totalreflexion. Wiedemann's Ann. d. Phys. 4, 1 und Zeitschr. f. Kryst. 2, 100.

G. Quincke, Ueber die Bestimmung des Brechungsexponenten mit totaler Reflexion. Festschr. d. naturf. Ges. in Halle 1879; Zeitschr. f. Kryst. 4, 540.

W. Kohlrausch, Ueber die exper. Best. v. Lichtgeschwindigkeiten in Krystallen. Wiedemann's Ann. 1879, 6, 86 und 7, 427; s. auch Zeitschr. f. Kryst. 4, 621.

F. Kohlrausch, Ueber Prismenbeobachtungen mit streifend einfallendem Lichte und über eine Abänderung der Wollaston'schen Bestimmungsmethode für Lichtbrechungsverhältnisse. Wiedemann's Ann. 16, 603, Zeitschr. f. Kryst. 7, 507.

Ders., Ueber die Einstellung eines Objectes am Totalreflectometer. Wiedem. Ann. 16, 609, Zeitschr. f. Kryst. 7, 509.

K. Feussner, Ueber eine neue Methode der Brechungsexponentbestimmung mittelst Totalreflexion; Dissert. Marburg 1882; s. auch Zeitschr. f. Kryst. 7, 505.

Ch. Soret, Ueber ein Refractometer z. Mess. d. Brechungsexpon. u. d. Dispersion fester Körper. Arch. sc. ph. nat. 9 und Zeitschr. f. Kryst. 7, 528.

Th. Liebisch, Neuere Apparate für die Wollaston'sche Methode zur Bestimmung von Lichtbrechungsverhältnissen. Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1884, 185 und 1885, 13.

§. 116. **Spectralphotometer.** Im Anschluss an die Refractometer möge denjenigen Apparaten eine kurze Betrachtung gewidmet werden, welche dazu dienen, für die verschiedenen Farben des Spectrums die Absorption in einer Krystallplatte quantitativ zu bestimmen. Die hierzu

benutzte Methode von Vierordt ist die folgende: Der Spalt eines Spectralapparates ist in zwei Theile getheilt, so dass jede Hälfte desselben für sich weiter oder enger gestellt, und die Breite einer jeden an der Trommel der zur Verstellung benutzten Mikrometerschraube abgelesen werden kann. Vor den einen Spalt wird nun die zu untersuchende Platte gebracht und derselbe so weit geöffnet, dass das ihn passirende Licht nach der Absorption in der Platte die gleiche Helligkeit besitzt, wie das durch die andere, engere Spalthälfte frei hindurchgegangene Licht. Um hierbei die Untersuchung für eine einzelne Farbe vornehmen zu können, ist im Ocular des zum Spectralapparat gehörigen Beobachtungsfernrohres ein Schieber mit Schlitz angebracht. Durch letzteren erblickt man dann nur einen schmalen Streifen des Spectrums, dessen obere Hälfte von dem durch die Platte bedeckten Spalte, dessen untere Hälfte von dem freien Spalte erleuchtet ist, und kann nun leicht durch Aenderung der ersten Spaltweite beide Hälften gleich hell machen. Aus dem an den Mikrometerschrauben abgelesenen Verhältniss der beiden Spaltweiten kann die Stärke der Absorption berechnet werden. (Vierordt, Anwendung der Spectralanalyse zur Photometrie der Absorptionsspectren, Tübingen, 1873. H. W. Vogel, Praktische Spectralanalyse, Nördlingen 1878).

Noch genauer und für die Untersuchung der Absorptionsverhältnisse in Krystallen besonders geeignet ist das von Glan construirte Spectralphotometer, welches von Schmidt und Hänsch in Berlin*) geliefert wird. Dasselbe ist Fig. 590 in $^1/_4$ der nat. Grösse dargestellt. Der kurze Spalt des Collimatorrohres C, durch welchen das weisse Licht eines starken Petroleumbrenners eintritt, ist durch ein quer übergelegtes schmales Metallplättchen in zwei Hälften getheilt. Vor die eine derselben wird, wie bei dem vorigen Apparat, die absorbirende Platte gebracht; die beiden Hälften haben aber hier gleiche und constante Breite. In dem Collimatorrohr befindet sich ferner ein doppeltbrechender Körper (ein sogenanntes Rochonsches Quarzprisma), welcher von jeder der beiden rechteckigen Spalthälften ein doppeltes Bild entwirft; bei richtiger Stellung des Instrumentes erscheinen in der Mitte des Gesichtsfeldes das ordentliche Bild der einen Hälfte und das ausserordentliche der andern unmittelbar über einander, um die Vergleichung ihrer Helligkeit zu erleichtern. Aus dem doppeltbrechenden Prisma gelangen die Strahlen in einen, im verstärkten Theile von C befindlichen Nicol, welcher mittelst des Griffes G drehbar ist und dessen Drehung an dem Kreise k abgelesen werden kann. Stellt man den Nicol auf 0^0, so fällt sein Hauptschnitt mit dem des doppeltbrechenden Prismas zusammen, und das ordentliche Bild ist vollkommen verschwunden; durch Drehung des Nicols ruft man dasselbe wieder hervor und findet leicht diejenige Stellung, in welcher beide Bilder gleich hell erscheinen. Sei der hierzu erforderliche und am Kreise k abgelesene Drehungswinkel $= \alpha$, so

*) S. Stallschreiberstr. 4. Der Preis des Instrumentes ist 450 Mark.

ist das Verhältniss der Intensitäten des durch den oberen und des durch den unteren Spalt gegangenen Lichtes $= tang^2 \alpha$. Um die so erhaltene Bestimmung der Absorption für jede Farbe einzeln vornehmen zu können, gehen die Strahlen durch das Prisma *P* und bringen in dem Beobachtungsfernrohr *F* ein Spectrum hervor, von welchem durch einen Schlitz des Schiebers *H* nur der, der betreffenden Farbe entsprechende, schmale Streifen beobachtet wird. Durch eine im Rohre *S* angebrachte Skala, welche, von einer Flamme beleuchtet und an dem Prisma *P* gespiegelt, gleichzeitig im Fernrohr *F* gesehen wird, kann die Stelle im Spectrum, welche man beobachtet, näher bestimmt werden. Auch kann man die Stellung

Fig. 590.



des Beobachtungsfernrohres an dem Kreise *K* ablesen, wie bei einem Refractometer (s. Glan, Wiedemann's Annalen 1877, 1, 351; H. W. Vogel, Practische Spectralanalyse; Schwebel, Zeitschr. f. Kryst. 7, 155; Zenker, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1884, 83).

Bodländer benutzte den Glan'schen Apparat zur Messung der Drehung der Polarisationsebene in circularpolarisirenden Krystallen, indem er das Rochon'sche Prisma und das Plättchen, welches den Spalt in zwei Hälften theilt, entfernte und hinter dem letzteren eine Quarzdoppelplatte anbrachte, welche in der oberen Hälfte aus Rechtsquarz, in der unteren aus Linksquarz, beide gleich dick, besteht. Das Licht eines Petroleumbrenners, durch eine Linse parallel gemacht und durch einen Nicol polarisirt, fällt, nachdem es durch Spalt und Doppelplatte gegangen ist, auf den drehbaren Nicol des oben abgebildeten Apparates. Werden die Hauptschnitte beider Nicols gekreuzt und die Grenze der beiden Hälften der Quarzplatte senkrecht zur Kante des Prismas gestellt, so erscheint in der oberen und unteren

Hälfte des beobachteten Spectrums dieselbe Farbe ausgelöscht, nämlich das im Rechts- und im Linksquarze um 180° gedrehte Gelb, und daher ein senkrecht durchgehender schwarzer Streifen. Fügt man nun vor dem Spalt eine circularpolarisirende Platte in den Gang der Lichtstrahlen ein, welche das mittlere Gelb um α^0 rechts dreht, so wirkt diese so, als ob der Rechtsquarz um ebenso viel dicker, der Linksquarz dünner geworden wäre; man muss den Nicol am Ende des Collimatorrohres um α^0 nach rechts drehen, um den dunklen Streifen in beiden Hälften des Spectrums wieder an derselben Stelle zu sehen. (G. Bodländer, Ueber das optische Drehungsvermögen isomorpher Mischungen aus den Dithionaten des Bleis und des Strontiums, Dissert. Breslau 1882, s. auch Zeitschr. f. Kryst. 9, 309).

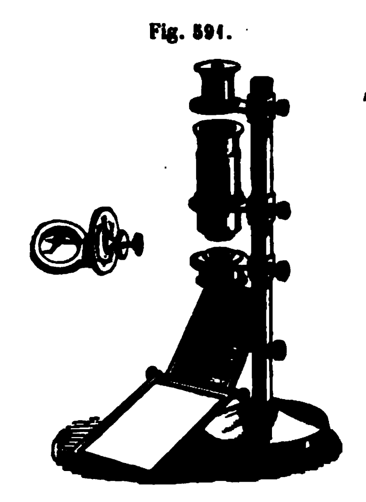
---

*) Anmerk. Das soeben beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Circularpolarisation ist nur eine Modification der Broch'schen Methode, welche besonders genaue Resultate liefert, wenn man sehr dicke Platten zur Verfügung hat. Man lässt alsdann Sonnenlicht, durch einen Nicol polarisirt, auf den Krystall fallen, welcher vor oder hinter dem Spalt angebracht wird (das Rochon'sche Prisma wird auch bei diesem Verfahren aus dem Rohre *C* entfernt). Hat man ursprünglich durch Dunkelstellung die beiden Nicols gekreuzt, so löscht der Analysator alle Farben aus, welche durch die dicke Krystallplatte genau um 180° oder ein Vielfaches davon gedreht werden, im Spectrum erscheinen also an Stelle dieser Farben dunkle Streifen. Durch approximative Bestimmung der Drehung an einigen dünnen Platten lässt sich nun leicht für einen bestimmten Streifen angeben, wie viel mal 180° die Drehung der betreffenden Farbe beträgt. Stellt man darauf durch Drehung des Fernrohrs *F* den verticalen Faden eines an Stelle des Schiebers *H* in dasselbe eingesetzten Fadenkreuzes auf eine Fraunhofer'sche Linie von stärkerer Brechbarkeit ein und dreht den Analysator in demselben Sinne wie der Krystall dreht, so werden nunmehr stärker brechbare Strahlen ausgelöscht, der dunkle Streifen wandert nach der Seite des Violett und kann also ebenfalls mit dem Fadenkreuz zur Deckung gebracht werden. Die hierzu nöthige Drehung α ist der Winkel, welchen die Schwingungsrichtung der eingestellten Fraunhofer'schen Linie mit der des Polarisators und der um $n \cdot 180^0$ gedrehten, vorher ausgelöschten Farbe bildet; die Drehung für die eingestellte Linie beträgt also $n \cdot 180^0 + \alpha^0$. In derselben Weise kann man einen bestimmten dunklen Streifen nach und nach auf alle Fraunhofer'schen Linien einstellen und die Drehung für die ihnen entsprechenden Wellenlängen bestimmen (über einige Abänderungen der Broch'schen Methode behufs noch genauerer Messung s. V. von Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 74 (2), 209, und R. Lüdtke, Poggendorff's Ann. d. Phys. 137, 271).

B. Polarisationsapparate.

§. 117. **Polarisationsinstrumente nach Nörremberg.** Das Polarisationsinstrument für paralleles und convergentes Licht ist bereits in der I. Abth. S. 68—71 dem Princip seiner Construction nach erläutert worden. Die verschiedenen gebräuchlichen Formen desselben unterscheiden sich meist nur durch die Zahl und Anordnung der Linsensysteme, welche statt der Sammellinse *n* Fig. 51 und des Objectivs *o* ebendaselbst dienen. Der ursprünglichen Nörremberg'schen Construction am nächsten steht das in Fig. 591 abgebildete Instrument, welches von dem optischen Institut von Steeg und Reuter in Homburg*) geliefert wird; dasselbe hat den Vortheil eines sehr grossen Gesichtsfeldes, so dass selbst bei sehr grossem Axenwinkel die Lemniscatensysteme noch zu übersehen sind; nur sind freilich die Bilder nahe dem Rande des Gesichtsfeldes stets weniger vollkommen und daher für feinere Farbenunterschiede, z. B. für Erkennung des Sinnes der Dispersion durch die Säume der Hyperbeln (vergl. S. 111), nicht zuverlässig; endlich ist auch die Polarisation des der Billigkeit wegen angewandten Glassatzes nicht so vollkommen, wie die eines Nicols als Polarisator. Derartige einfache Apparate, wie sie in ähnlicher Weise auch von Fuess in Berlin geliefert werden*), sind da ausreichend, wo es sich nicht um genauere Bestimmungen, sondern nur um Demonstration der Erscheinungen handelt. Dieselben können auch, wie aus der Figur ersichtlich, mit einer einfachen Vorrichtung zur Messung des Winkels der optischen Axen versehen werden. Etwas kleiner ist das Gesichtsfeld bei dem von Des Cloizeaux (Poggendorff's Ann. 126. Bd.) angegebenen Instrumente, welches jenen in mehrfacher Beziehung vorzuziehen

Fig. 591.



*) S. die Preisverzeichnisse am Schlusse.

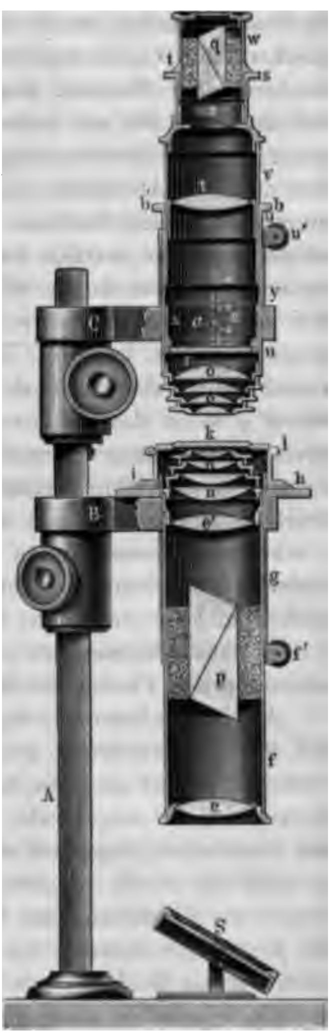
ist, während sein Gesichtsfeld doch gross genug ist, um in allen Fällen zu genügen (bei scheinbarem Axenwinkel von 125° sind noch beide Axenbilder innerhalb desselben sichtbar). Des Cloizeaux verband sein Instrument mit einem zur Messung des optischen Axenwinkels eingerichteten Theilkreise, welchen, mit zwei kleinen Fernröhren montirt, er zugleich zur Messung von Brechungsexponenten benutzte. Der Verfasser (Poggendorff's Ann. 144. Bd.) vervollständigte diesen Apparat derart, dass er, mit möglichster Benutzung einzelner Theile für mehrere Zwecke, alle Instrumente, welche bei krystallographisch-optischen Untersuchungen häufiger gebraucht werden, inclusive eines Goniometers zur Bestimmung der Krystallwinkel und der Brechungsexponenten, umfasst. In dieser, von Fuess in Berlin ausgeführten Zusammenstellung, welche in neuerer Zeit noch mancherlei kleine Verbesserungen erfahren hat, ist er unter dem Namen »krystallographisch-optischer Universalapparat« so allgemein verbreitet, dass es geeignet erscheint, im Folgenden die einzelnen optischen Instrumente in der Form zu beschreiben, wie sie die Theile jenes Apparates bilden und wie sie natürlich auch einzeln bezogen und benutzt werden können.

Das Polarisationsinstrument für convergentes Licht ist in Fig. 592 ($^1/_3$ nat. Grösse) im verticalen Durchschnitt dargestellt, bis auf die Theile *A*, *B* und *C*, welche mit ihren Schrauben in Vorderansicht erscheinen. Der einfache Spiegel *S* wird bei parallelen Nicols um seine Axe so gedreht, dass er, wenn das Instrument nahe am Fenster steht, das Licht eines möglichst hellen Theils des Himmels in dasselbe reflectirt. Das Rohr *f* enthält den Polarisator *p* und die beiden Glaslinsen *ee'*, welche bewirken, dass das ganze auf *e* fallende Licht in das Instrument gelangt (vergl. S. 68), und ist von einem fest angezogenen Klemmringe *f'* umgeben, der genau so, wie die Klemmringe der Ocularsysteme bei den Goniometern (s. S. 567) mit einer Nase versehen ist, welche in einen Einschnitt des Rohres *g* eingepasst werden muss, wenn *f* in richtiger Lage in *g* eingeschoben werden soll; solcher Einschnitte sind zwei, mit 90° und 45° bezeichnet, vorhanden. Statt durch einen Klemmring kann die Stellung, bis zu welcher man *f* in *g* einzuschieben hat, auch durch einen auf *f* festgelötheten Ring bestimmt werden, auf welchem 0°, 45°, 90° durch Marken bezeichnet sind; durch Drehung von *f* bringt man die betreffende dieser Marken mit einer auf dem festen Rohre *g* angebrachten Marke zur Coincidenz. Das Sammellinsensystem besteht aus vier planconvexen Linsen *n*, welche durch Verschraubung mit einander verbunden sind; die Fassung der untersten derselben passt genau in das Rohr *f*, so dass das ganze Linsensystem durch einfaches Einsetzen in den obersten Theil dieses Rohres seine richtige Stellung erhalten und mit *f* zusammen nach abwärts herausgezogen werden kann, wenn man den Spiegel *S* zur Seite geschoben hat*). Mit dem Träger

*) In den älteren Instrumenten von Fuess befand sich an der Stelle zwischen *e'* und der untersten Sammellinse *n*, auf welche nach S. 70 eingestellt wird, d. h. in der Focalebene des Sammellinsensystems, ein Diaphragma mit einem Fadenkreuz, welches

B fest verbunden ist nun eine kreisrunde Platte, welche an der Stelle unter *h* eine Nonientheilung trägt, und ein kurzes cylindrisches Rohrstück. Auf das letztere wird das oben mit einem gerieften vorspringenden Rande *l* versehene Rohrstück aufgesetzt, dessen unteren Theil der abgeschrägte kleine Theilkreis *hi* bildet, welcher beim Drehen des Rohrstücks auf der festen Nonienplatte schleift. Auf *l* wird oben die kreisförmige, durch einen Messingring gefasste Glasscheibe *k*, auf der bei der Beobachtung der Krystall liegt, in einer bestimmten Stellung aufgelegt; diese ist dadurch fixirt, dass der Rand jenes Messingringes an einem Punkte einen Einschnitt hat, in welchen genau ein an *l* festgemachter kleiner Stift passt. Durch Drehen des vorspringenden Wulstes *l* mit zwei Fingern wird also die Krystallplatte in ihrer Ebene gedreht um einen Winkel, welcher mittelst des Nonius auf dem Kreise *hi* abgelesen werden kann. Der Träger *B* ist mit seinem hohlprismatischen unteren Theile durch eine Schraube an das dreiseitige Stahlprisma *A*, welches mit einem hufeisenförmigen Fuss das Stativ des Instrumentes bildet, angeklemmt. Das ebenso gestaltete Stück *C*, durch eine Stellschraube, welche in eine Zahnstange des

Fig. 592.



daher bei richtiger Einstellung des Instrumentes scharf sichtbar war. Dieses diente dazu, eine geschliffene Platte annähernd auf den Parallelismus ihrer Flächen zu prüfen. Man legte dieselbe nämlich einfach auf den Krystallträger *k*: war sie merklich keilförmig, d. h. wichen ihre beiden Flächen mehr als 1° vom Parallelismus ab, so wurde das Bild des unteren Fadenkreuzes etwas abgelenkt, und man sah deutlich, dass die vorher zusammenfallenden beiden Fadenkreuze sich nun nicht mehr deckten. Diese Methode genügt indessen nur bei sehr kleinen Platten, welche man höchstens bis auf 1° genau parallel schleifen kann; bei grösseren hat man, wenn es auf eine höhere Genauigkeit ankommt, den Winkel, welchen die beiden parallel sein sollenden Flächen mit einander bilden, mit dem Goniometer zu messen. Das untere Fadenkreuz, dessen Zweck somit auch auf anderem Wege und zwar noch vollkommener erreicht werden kann, wurde später weggelassen, weil es die Klarheit der Interferenzbilder beeinträchtigte, ferner weil die erforderliche genaue Centrirung desselben schwer zu erreichen war und bei dem zur Reinigung des Instrumentes nöthigen Auseinandernehmen der Theile jedesmal wieder aufgehoben wurde.

Stativs eingreift, auf und nieder beweglich, trägt den Ring *y* und das ebenso bezeichnete, fest damit verbundene kurze Rohr. In letzteres wird das mit einem Klemmring, dessen Nase in einen mit 90° bezeichneten Einschnitt des Rohres *y* passt, oder mit Marken versehene Rohr *u* eingeschoben, in welches die vier den Sammellinsen ganz gleichen Objectivlinsen *o* eingeschraubt sind. Da vermöge der kurzen Brennweite dieses Systems das zu beobachtende Bild ganz nahe über jenen, in der Ebene *r*, zu Stande kommt, so ist in letzterer eine Glasplatte mit eingerissenen und geschwärzten Linien angebracht, aber nicht blos mit einem einfachen Kreuz, sondern einer Theilung des einen der beiden Arme von einer Seite des Gesichtsfeldes bis zur andern. Dieses »Glasmikrometer« *r* ist daher gleichzeitig mit der Interferenzfigur eines Krystalls deutlich sichtbar; es bildet den unteren Abschluss eines kurzcylindrischen Rohres *x*, welches durch einen bei *a* angedeuteten Schlitz in der Wand des Rohres *u* auf- und niedergeschoben werden kann, wodurch es ermöglicht wird, das Mikrometer auch dann in die Bildebene zu bringen, wenn man durch Abschrauben einer oder mehrerer Linsen *o* die Brennweite des Objectivsystems geändert hat (s. folg. S.). In *u* ist das Ocularrohr *v* mit der Ocularlinse *t* verschiebbar, aber nicht drehbar, während die Fassung des analysirenden Nicols *q* so in das Ocularrohr eingesetzt wird, dass der kleine getheilte Kreis *t* auf dessen oberstem Rand *s* schleift, und die durch Drehen der Fassung *w* bewirkte Stellung des Nicolhauptschnittes an einer auf *s* angebrachten Marke abgelesen werden kann. Der unter *s* liegende Theil von *v* wird von einem dünnen Messingring umfasst, dessen Drehung gestattet, einen in dem Ocularrohr befindlichen horizontalen Schlitz *z* entweder zu schliessen oder zu öffnen; der letztere dient dazu, ein lang rectanguläres ¼ Undulationsglimmerblatt (s. S. 125) oder einen Quarzkeil (S. 122) zur Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung einzuschieben.

Alle Linsenfassungen des Instrumentes sind mit Marken versehen, welche die für die Centrirung günstigste Stellung der Theile des Apparates bezeichnen. Stellt man die Rohre *f* und *u* so, dass die aussen angebrachten Marken auf 90° zeigen oder die Nasen der Klemmringe in die entsprechenden Einschnitte eingepasst sind, und dreht den Analysator ebenfalls auf 90°, so sind die Nicols parallel, und ihr Hauptschnitt fällt in die Zeichnungsebene; die Einstellung des Analysators auf 0 liefert somit gekreuzte Nicols; die beiden Kreuzarme des Glasmikrometers *r* sind alsdann den Hauptschnitten der beiden Nicols parallel. Ausserdem ist der Klemmring *f'*, resp. der ihn ersetzende feste Ring, so angebracht, dass nach dem vollständigen Einschieben des Rohres *f* die oberste Sammellinse *n* ganz nahe an die Glasplatte *k* heranreicht. Ebenso muss man, um ein grosses Gesichtsfeld zu erhalten, das unterste Objectiv *o* dem Krystall so weit als möglich nähern, und derselbe darf nicht zu dick sein. Hat man es mit einer zweiaxigen Platte, senkrecht zur ersten Mittellinie, zu thun, so kann das Glasmikrometer *r* zu einer schnellen approximativen Bestimmung des schein-

baren optischen Axenwinkels dienen, indem man die optische Axenebene der Theilung jenes parallel stellt, die Nicols um 45° dreht, so dass die schwarzen Hyperbeln erscheinen, und den Abstand derselben in Theilen des Mikrometers bestimmt; wie viel Grade des scheinbaren Axenwinkels einem Theilstrich des Mikrometers entsprechen, erkennt man mittelst einiger Krystallplatten von bestimmtem Axenwinkel (im Durchschnitt beträgt bei den Fuess'schen Instrumenten 1 Theilstrich 6°).

Das beschriebene Polarisationsinstrument dient hauptsächlich zur Aufsuchung der Lage der optischen Axen, wenn dieselben nicht unter allzuschiefem Winkel austreten, durch deren Richtung man, im Vergleich mit dem Habitus der Krystallform, in vielen Fällen sofort das Krystallsystem bestimmen kann. Will man dabei durch unvollkommene Flächen, z. B. Bruchflächen, Richtungen unvollkommener Spaltbarkeit oder dergl. sehen, so hat man dieselben mit einem Tropfen Canadabalsam zu bedecken und dann ein kleines Stückchen sehr dünnen Glases (sogen. Birminghamglases) darauf anzudrücken, um die Zerstreuung der Lichtstrahlen an der unregelmässigen Fläche zu eliminiren. Bei dickeren Platten bleibt der Brennpunkt des Objectivs über demjenigen der Sammellinsen, man wird also nur im mittleren Theile des Gesichtsfeldes die Interferenzerscheinungen erblicken; um sie im ganzen Gesichtsfelde zu sehen, welches aber dann einem kleineren Winkel entspricht, kann man eine oder mehrere der Objectivlinsen *o* abschrauben. Was die Flächenausdehnung der zu den Beobachtungen nöthigen Platten betrifft, so kann dieselbe sehr gering sein, namentlich wenn man das neben derselben vorübergehende Licht abblendet; so kann man z. B. von einem Glimmerblättchen mit grossem Axenwinkel, dessen Oberfläche = $\frac{1}{270}$ Quadrat-Millimeter erhalten durch Bedecken einer Glimmerplatte mit Stanniol, in welchem eine entsprechend grosse Oeffnung durch einen Stich mit einer feinen Nadel hergestellt ist), noch ein recht deutliches Axenbild erhalten. Ein so lichtstarkes Instrument ist daher auch geeignet zur Aufsuchung der Axen kleinerer Mineralpartikel in Dünnschliffen feinkörniger Gesteine, falls diese nur noch dick genug sind und durch übergeklebtes Stanniol das Licht der benachbarten Theile abgehalten wird.

Zur Untersuchung im parallelen polarisirten Lichte kann man dasselbe Instrument benutzen, wenn es sich nur um eine ungefähre vorläufige Bestimmung der Auslöschungsrichtungen eines kleinen Krystalls handelt. Man legt denselben alsdann auf den Krystallträger *k* genau in die Mitte und schraubt den oberen Theil des Apparates so hoch, dass man durch denselben, statt der Brennebene des Sammellinsensystems, den Krystall deutlich erblickt; durch Vergleichung mit den Kreuzarmen des Glasmikrometers, denen bei richtiger Stellung der Marken die Nicolhauptschnitte parallel sind, kann man leicht annähernd beurtheilen, ob in denjenigen Stellungen, in welchen der Krystall beim Drehen dunkel erscheint, gewisse Kanten desselben den Diagonalen der Nicolquerschnitte parallel sind oder nicht.

Will man dagegen einen grösseren Krystall im parallelen Lichte unter-

suchen, das Interferenzbild gepresster oder gekühlter Gläser, einer Alaunplatte oder dergl. beobachten, so hat man das Rohr *u* mit seinem gesammten Inhalte zu entfernen und durch das einfache kürzere Rohr *z* Fig. 593 zu ersetzen, in welches oben der Nicol *q* passt (die unten angesetzte Kappe *δ* dient für die Stauroskopmessung und ist daher für diesen Fall fortzulassen, ebenso ist auf *l* der gewöhnliche Krystallträger *k* zu denken). Ferner hat man das Sammellinsen-System aus dem Rohre *f* zu entfernen und letzteres wieder in die Hülse *g* des Trägers *B* einzuschieben, wie es Fig. 593 zeigt.

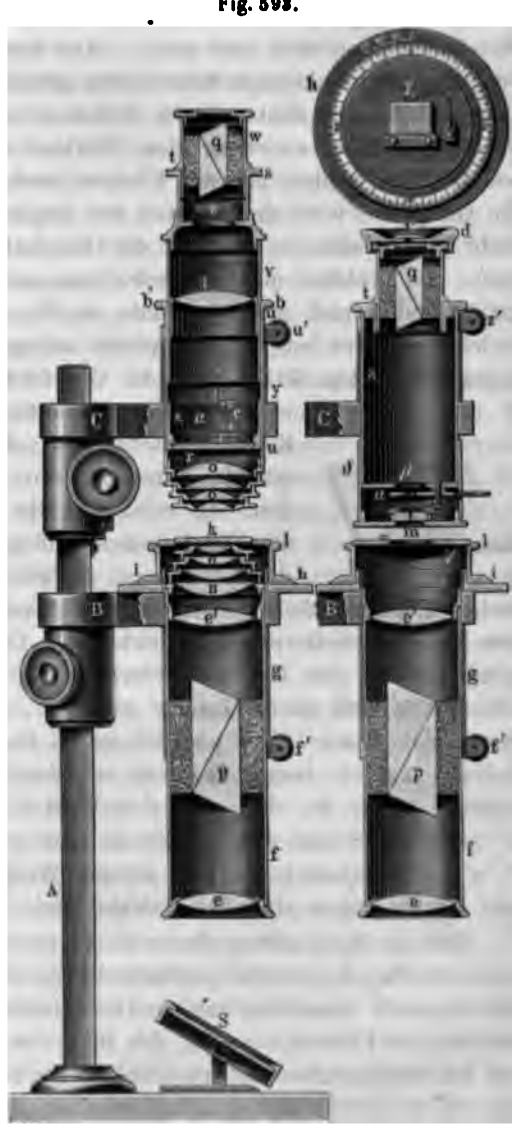
Will man Platten, welche eine complicirte Zwillingsbildung oder Zusammensetzung aus verschiedenen, optisch anomalen Partien zeigen, im parallelen Lichte untersuchen, so empfiehlt sich eine mässige Vergrösserung der Objecte. Nach dem Vorschlage von Klocke liefert Fuess auf Verlangen zu seinen Apparaten ein besonders hierzu eingerichtetes Rohr, welches unten eine Convexlinse trägt und oben mit zwei Schlitzen zum Einschieben eines empfindlichen Gypsblättchens (s. S. 124) versehen ist. Dasselbe wird an Stelle von *z* eingeschoben und der Analysator *q* wie sonst aufgesetzt.

§. 118. **Das Stauroskop.** Dieses Instrument soll im Folgenden zunächst in derjenigen Form beschrieben werden, wie sie jetzt von Fuess geliefert wird, und welche sich hauptsächlich dadurch von der älteren unterscheidet, dass an Stelle der S. 491 beschriebenen Brezina'schen Doppelplatte die von Calderon (Zeitschr. f. Kryst. 2, 68 ff.) vorgeschlagene Platte zur Einstellung der Schwingungsrichtungen benutzt wird. Dieselbe besteht in einem künstlichen Zwilling von Kalkspath, in der Weise hergestellt, dass man ein Rhomboëder nach der kurzen Diagonale durchschneidet, von jeder Hälfte eine keilförmige Partie abschleift und beide mit den Schliffflächen an einander kittet. Durch Abschleifen des ein- und ausspringenden Winkels erhält man eine planparallele Platte, halbirt durch die Trennungsebene der beiden Kalkspathstücke, welche Ebene, von oben gesehen, als eine äusserst feine gerade Linie erscheint. Die beiden Hälften dieser Platte zeigen genau den gleichen Grad der Auslöschung, wenn die Nicols des Instrumentes gekreuzt sind und der Hauptschnitt des einen genau der Trennungslinie der Doppelplatte parallel ist. Fügt man eine Krystallplatte, deren Schwingungsrichtung abweicht, in den Gang der Lichtstrahlen ein, so werden die beiden Hälften wieder ungleich erhellt resp. gefärbt erscheinen, und erst wenn der Krystall so weit gedreht ist, dass seine Schwingungsrichtungen genau mit denen der Nicols zusammenfallen, ist die Gleichheit der beiden Hälften der Doppelplatte wieder hergestellt.

Als Stauroskop dient die in Fig. 593 dargestellte Zusammensetzung des verticalen Polarisationsinstrumentes, in welcher dasselbe für paralleles Licht eingerichtet ist. Da jede Abweichung der Sehrichtung von der Axe des Apparates wieder eine Ungleichheit der beiden Plattenhälften hervorbringt, so kommt es bei dieser optischen Einstellung hauptsächlich auf den Parallelismus der Strahlen an. Es wird deshalb auf die gewöhnliche, über dem Analysator befindliche Kappe eine andere (*ε*) mit ganz kleiner Oeffnung

gesetzt. Auf das Rohr *z* wird ein Messingrohr *δ* aufgeschoben, welches unten durch die Doppelplatte geschlossen ist und eine Diaphragmenscheibe *α* enthält, mit deren Hülfe man je nach der Grösse des zu untersuchenden Krystalls das Gesichtsfeld einschränken kann; diese Scheibe trägt Oeffnungen von 4—10 mm Durchmesser und kann, da sie mit ihrer Drehungsaxe mit dem festen Diaphragma *β* verbunden ist und durch einen Schlitz des Messingrohres herausragt, an diesem Theile leicht gedreht werden. Statt des Krystallträgers *k* wird nun der Träger *γ*, ebenfalls mit einer am Rande befindlichen Durchbohrung in den Stift des Rohres *l* passend, aufgesetzt; derselbe, über dem Instrumente noch einmal, von oben gesehen, gezeichnet, besteht aus einer Messingplatte mit rectangulärem weitem Ausschnitt, neben welchem mit zwei Schräubchen eine Stahlplatte aufgeschraubt ist, deren nach der Mitte zu gerichtete Seitenfläche nach unten abgeschrägt ist, während die obere Kante derselben eine sehr wenig von einer Geraden abweichende Wellenlinie darstellt, von welcher zwei Punkte, rechts und links dem Ende genähert, am meisten nach der Mitte des Instrumentes zu hervorragen (eine so schwache Krümmung ist deshalb gewählt worden, um die Abnutzung der vorspringenden Stellen auf ein Minimum zu reduciren). Wenn man also an diese Schneide der Platte eine zur Ebene des Krystallträgers verticale ebene Fläche anlegt, so wird diese nur in zwei Punkten von jener berührt; die Verbindungslinie dieser beiden Punkte ist genau parallel der Geraden

Fig. 598.



zwischen den Punkten 90° und 270° auf dem Theilkreise *hi*, mit welchem die Platte γ ja in fester Verbindung steht. Auf letztere wird nun eine kleine rectanguläre, aus Spiegelglas verfertigte Platte so aufgelegt, dass sie den viereckigen Ausschnitt von γ völlig bedeckt und zugleich durch eine kleine Feder mit einer Seitenfläche an die Schneide der aufgeschraubten Stahlplatte gegengedrückt wird. Diese Seitenfläche ist genau senkrecht zur Oberfläche geschliffen und polirt. Aus dem Bisherigen folgt nun, dass die von der rechtwinkeligen Seitenfläche gebildete Kante der Glasplatte, wenn diese in der erwähnten Weise befestigt ist, genau parallel sein muss der Verbindungslinie zwischen den Punkten 90° und 270° am Theilkreise, welche der beiden grossen Flächen auch nach oben gekehrt sei. Auf die Glasplatte wird der Krystall mit möglichst wenig Canadabalsam aufgeklebt. Zu diesem Zwecke wird die Glasplatte herabgenommen, die Krystallkante, mit welcher man die Schwingungsrichtung vergleichen will, ungefähr parallel und möglichst nahe an diejenige Kante der Glasplatte, mit welcher letztere an der Stahlplatte anliegt, gebracht und so der Krystall angekittet (s. Fig. 594). Möge die Oberfläche der Glasplatte mit v', deren rechtwinkelige Seitenfläche mit v'', die Oberfläche der Krystallplatte mit w', die Randfläche, welche die erwähnte Kante mit ihr bildet, mit w'' bezeichnet werden. Es wird nun die Glasplatte mit dem Krystall auf den Tisch eines Reflexionsgoniometers aufgesetzt und die Kante $v'\,v''$ centrirt und justirt; war der Krystall vorher fest angedrückt, so muss seine Fläche w' parallel v' sein, also die von beiden gelieferten Reflexbilder des Collimatorsignals im Fernrohr zusammenfallen; das von der andern Krystallfläche w'' reflectirte Bild*) wird jedoch nur dann in der Zone $v'\,v''$ liegen, wenn die Kante $w'\,w''$ wirklich genau der Kante $v'\,v''$ parallel ist. Statt diesen Parallelismus herzustellen, was ein langes Probiren erfordern würde, verfährt man in einfacherer Weise so, dass man den Winkel bestimmt, um welchen der von w'' reflectirte Strahl von der Ebene abweicht, in welcher die Reflexion von v', v'', w' stattfindet, und aus diesem Winkel berechnet, wie viel die beiden Kanten gegen einander gedreht sind.

Fig. 594.

Für die Bestimmung dieser Correction ist das in §. 120 beschriebene, dem optischen Apparat beigegebene kleine Goniometer besonders eingerichtet, Das Fernrohr desselben hat ein Gesichtsfeld von 5—6°, so dass nach dem Justiren der Flächen v' und v'' das Bild von w'' noch im Gesichtsfelde sichtbar ist, wenn selbst die Krystallkante um 2—3° schief angelegt worden war.

*) Wenn die Krystallplatte sehr dünn, die Fläche w'' also sehr schmal ist, kann es kommen, dass der vorspringende Theil der Glasplatte die Spiegelung an w'' ganz verhindert. Für solche Fälle benutzt man eine Glasplatte, wie sie in Fig. 594 abgebildet ist, an welcher ein Stückchen der vorspringenden Kante ausgeschliffen ist, um den Lichtstrahlen den Zugang zur Fläche w'' zu gestatten.

Daraus, ob dasselbe zu hoch oder zu tief ist, ersieht man, nach welcher Seite die Kante w' w'' gegen diejenige v' v'' gedreht ist; und wie viel die Abweichung des von w'' reflectirten Strahls aus der Reflexionsebene der justirten Flächen beträgt, bestimmt man durch ein feines, in der Brennebene des Fernrohres befestigtes Glasmikrometer, von dem vorher durch Messung festgestellt worden ist (s. §. 120), welchem Winkel ein Theilstrich desselben entspricht. Dreht man das Mikrometer so, dass seine Theilung vertical aufrecht im Gesichtsfelde, dessen Mittelpunkt dem Nullpunkt jener entspricht, steht, so gehen die Reflexbilder der beiden justirten Flächen beim Drehen genau durch den Nullpunkt, das der Fläche w'' nicht; man stellt letzteres nun auf die Theilung ein, liest an dieser die Abweichung in Strichen und (durch Schätzung) deren Theilen ab, und findet durch Umrechnung in Winkelwerth den Winkel δ, die Abweichung des von w'' reflectirten Strahls von der Ebene der übrigen. Um aus δ die gesuchte Grösse α, d. i. den Winkel, welchen die Kante $w' : w''$ mit $v' : v''$ bildet, zu berechnen, bedarf es der Kenntniss des Einfallswinkels der Strahlen bei der Reflexion und des Winkels der Flächen $w' : w'' = \gamma$. Der letztere muss durch Messung bestimmt sein; was den ersteren betrifft, so macht man denselben $= 45^0$, d. h. stellt die optische Axe des Fernrohrs auf dem Goniometer genau normal zum Collimator, indem man erst auf diesen direct einstellt und dann das Beobachtungsfernrohr genau um 90^0 dreht. Um die Justirung der Kante v' v'' des Glases und die Abweichung des Reflexes aus der Zone recht genau bestimmen zu können, stellt man alsdann den Websky'schen Spalt horizontal. Natürlich kann man sich auch zur Messung der Abweichung aus der Zone des noch genauer getheilten Fuess'schen Goniometers No. 2 bedienen und benutzt alsdann am besten das Signal c (s. S. 565) und eine von Websky (Zeitschr. f. Kryst. 4, 568) vorgeschlagene Methode: Das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres wird unter 45^0 gestellt (s. Fig. 595), was durch einen entsprechenden Kerb, in den die Nase des Klemmringes geschoben wird, genau erzielt werden kann; nachdem die Zone v' v'' so justirt ist, dass die Reflexe beim Drehen durch die Mitte des Fadenkreuzes passiren, stellt man das Reflexbild der abweichenden Fläche w'' einmal in den einen Faden (Position r_1), das andere Mal in den zweiten Faden (Pos. r_2) ein; die zwischen diesen beiden Positionen abgelesene Drehung des Krystallträgers misst den halben Bogen $r_1 r_2$ und somit den gesuchten Abstand $rm = \delta$. Stehen bei dieser Messung Beobachtungsfernrohr und Collimator senkrecht zu einander, so folgt die gesuchte Correction aus den Winkeln δ und γ nach der Formel (s. Websky, Zeitschr. f. Kryst. 4, 567; Liebisch, ebenda 7, 304):

Fig. 595.

$$\sin \alpha = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma \sqrt{2}}.$$

Zu grösserer Bequemlichkeit ist die folgende Tabelle berechnet worden, welche gestattet, die gesuchte Correction α für bestimmte Werthe von γ und δ unmittelbar abzulesen, resp. sehr einfach zu interpoliren:

Tabelle der Correction α für die Stauroskopmessung.

	$\gamma = 20^0$	$= 25^0$	$= 30^0$	$= 35^0$	$= 40^0$	$= 50^0$	$= 60^0$	$= 70^0$	$= 80^0$	$= 90^0$
$\delta = 0^0\ 10'$	$0^0\ 21'$	$0^0\ 17'$	$0^0\ 14'$	$0^0\ 12'$	$0^0\ 11'$	$0^0\ 9'$	$0^0\ 8'$	$0^0\ 8'$	$0^0\ 7'$	$0^0\ 7'$
— 20	0 41	0 33	0 28	0 25	0 22	0 18	0 16	0 15	0 14	0 14
— 30	1 2	0 50	0 42	0 37	0 33	0 28	0 24	0 23	0 22	0 21
— 40	1 23	1 7	0 57	0 49	0 44	0 37	0 33	0 30	0 29	0 28
— 50	1 43	1 24	1 11	1 2	0 55	0 46	0 41	0 38	0 36	0 35
1 0	2 4	1 40	1 25	1 15	1 6	0 55	0 49	0 45	0 43	0 42
— 10	2 25	1 57	1 39	1 26	1 17	1 5	0 57	0 53	0 50	0 49
— 20	2 45	2 14	1 53	1 89	1 28	1 14	1 5	1 1	0 58	0 57
— 30	3 6	2 31	2 7	1 51	1 39	1 23	1 13	1 8	1 5	1 4
— 40	3 27	2 47	2 21	2 3	1 50	1 32	1 22	1 15	1 12	1 11
— 50	3 48	3 4	2 36	2 16	2 1	1 42	1 30	1 23.	1 19	1 18
2 0	4 8	3 21	2 50	2 28	2 12	1 51	1 38	1 30	1 26	1 25
— 10	—	3 38	3 4	2 40	2 23	2 0	1 46	1 38	1 33	1 32
— 20	—	3 54	3 18	2 53	2 34	2 9	1 54	1 45	1 41	1 39
— 30	—	4 11	3 32	3 5	2 45	2 18	2 2	1 53	1 48	1 46
— 40	—	—	3 46	3 17	2 56	2 28	2 11	2 0	1 55	1 53
— 50	—	—	4 1	3 30	3 7	2 37	2 19	2 8	2 2	2 0
3 0	—	—	4 15	3 42	3 18	2 46	2 27	2 15	2 9	2 7

Beispiel: Werde das in §. 120 beschriebene Goniometer angewendet, und sei 1 Theilstrich des Mikrometers gleich einem Winkel von 18′ 30″, seien die Flächen v' und v'' so genau justirt, dass das Signalbild auf dem Nullstrich steht, wenn es in die Mitte eingestellt wird, und sei die Abweichung des Reflexes von $w'' = 3{,}3$ Theilstrich. d. h. $\delta = 1^0\ 1'$; sei der Winkel $w' : w'' = \gamma$ mit Vernachlässigung der Minuten $= 54^0$, so folgt aus der Tabelle die Correction α

für $1^0\ 1' = 0^0\ 56$ (Columne 50^0)
- - $= 0\ 50$ (- 60^0),

der Werth für die zu interpolirende Columne 54^0 ist also

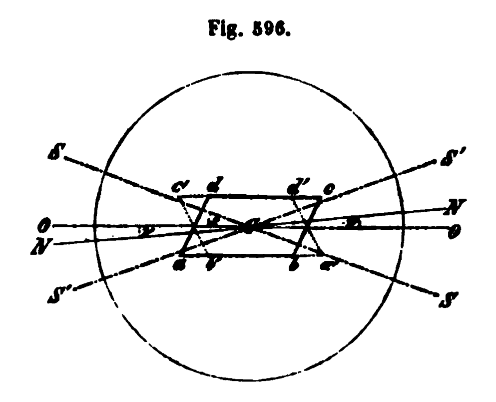
$$\alpha = 0^0\ 54'.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass man die Lage der Kante des Krystalls gegen die Nullrichtung des Nonius am Instrument ebenso genau bestimmen kann, wie man Krystallwinkel zu messen im Stande ist. Würde man die Schwingungsrichtung des unteren Nicols ganz genau jener Richtung parallel machen können, welche den Nullpunkt mit dem Mittelpunkte des festen Nonienkreises verbindet, so gäbe die Drehung des Theilkreises (mit der Krystall-

platte; von 0 bis zu der Position, wo die optische Einstellung erkennen lässt, dass eine Schwingungsrichtung des Krystalls parallel der des Polarisators ist, — unmittelbar den Winkel der ersteren mit der Nullrichtung des Kreises, und — nach Zufügung der Correction α — denjenigen mit der Krystallkante. Jenen Parallelismus herzustellen, ist jedoch mittelst der am Instrumente angebrachten Marken, resp. Klemmringe, nicht so genau möglich, als es die Messung erfordert. Der hierdurch hervorgebrachte Fehler lässt sich aber leicht eliminiren, wie folgende Betrachtung zeigt:

Sei in Fig. 596: OO die Richtung 90°—270° an dem drehbaren Kreise, wenn dieser genau auf 0 gestellt ist (wie es die obere Fig. 593 darstellt), und sei das Rohr f so eingeschoben, dass die Schwingungsrichtung des einen der beiden gekreuzten Nicols nicht genau parallel OO sei, vielmehr die Richtung NN habe, welche mit OO den unbekannten Winkel ν einschliesst; sei ferner der ausgezogene Rhombus $abcd$ die Krystallplatte, deren eine Kante ab genau parallel OO*), SS deren Schwingungsrichtung, so ist der Winkel $s = SCO$ derjenige, welcher mittelst des Stauroskops gefunden werden soll. Dreht man nun den Krystall bis zur Gleichheit der beiden Hälften der Calderon'schen Doppelplatte, d. h. bis $SS \parallel NN$, so ist der abgelesene Drehungswinkel $SCN = s + \nu$, also um ν grösser, als der gesuchte. Legt man nunmehr die Platte um, so dass die vorher oben befindliche Fläche unten zu liegen kommt, die vorher OO parallele Kante ab es auch jetzt ist, der Krystall also die durch den punktirten Umriss $a'b'c'd'$ bezeichnete Stellung hat, bei welcher $S'S'$ dessen Schwingungsrichtung ist, und dreht wieder bis zum Eintritt gleicher Auslöschung der Doppelplatte, d. h. bis $S'S' \parallel NN$, so ist der abgelesene Drehungswinkel $S'CN$, d. h. $s - \nu$, also um ν zu klein gegen den gesuchten. Addirt man aber die beiden, so gefundenen Drehungen

Fig. 596.



$$s + \nu$$
$$\text{und } s - \nu,$$

so erhält man $2s$, d. h. das arithmetische Mittel beider ist der gesuchte Winkel s.

Hieraus ergiebt sich nun folgendes Verfahren zur Bestimmung des Winkels, welchen eine Schwingungsrichtung mit einer Kante eines Krystalls bildet:

*) Dieser Parallelismus braucht nicht erfüllt zu sein, wenn nur die Abweichung davon bekannt ist; diese ist aber die soeben besprochene Correction α.

Das Polarisationsinstrument für paralleles Licht wird derart eingerichtet, wie es Fig. 593 darstellt; der Polarisator wird so gestellt, dass seine Schwingungsrichtung ungefähr parallel der Richtung 0° auf dem Nonienkreise ist, der Analysator genau senkrecht dazu, also auf vollständige Dunkelheit. Alsdann wird die Kappe δ, welche die Calderon'sche Doppelplatte enthält, über das Rohr z geschoben: letzteres hat unten einen Schlitz, in welchen das Ende eines in δ sitzenden Schräubchens passt; dadurch wird die Kappe an der Drehung verhindert und in derjenigen Stellung festgehalten, in welcher die beiden Hälften der Doppelplatte genau den gleichen Grad der Auslöschung zeigen. Alsdann wird die Glasplatte mit dem aufgeklebten Krystall, an welcher Combination vorher die Correction α festgestellt worden ist, auf den weiten Ausschnitt der in Fig. 593 oben dargestellten Platte vorsichtig aufgesetzt, wobei man die Feder γ etwas zurückzieht, und nun der vorher auf 0 gestellte Kreis gedreht bis zum Eintritt des gleichen Grades der Auslöschung der beiden durch die Halbirungslinie der Doppelplatte getrennten Hälften des Krystalls. Diese Stellung wird am genauesten so gefunden, dass man diejenigen Positionen abliest, welche eben noch eine Ungleichheit der beiden Hälften erkennen lassen, einmal, wenn die rechte, das andere Mal, wenn die linke heller erscheint, und dass man von diesen beiden Ablesungen, welche nur Bruchtheile eines Grades verschieden sein sollen, das Mittel nimmt. Diese Operation wird zweckmässig 5—6 mal wiederholt und von den erhaltenen Resultaten das arithmetische Mittel genommen. Alsdann wird die Glasplatte mit dem darauf befestigten Krystall abgehoben und vorsichtig, um den letzteren nicht zu verschieben, umgelegt, so dass die Oberfläche mit dem Krystall nach unten und die Fläche v'' wieder an die Stahlschneide angedrückt liegt, der Krystall sich also in dem rectangulären Ausschnitt der kreisförmigen Platte befindet. Damit er hierbei nicht an den Rand des Ausschnittes anstösst, muss er etwas von der Kante $v' : v''$ entfernt sein (s. Fig. 594). Nach dem oben über die Construction der Stahl- und der Glasplatte Bemerkten sieht man leicht ein, dass durch diese Manipulation der Krystall ganz genau so gedreht worden ist, wie es Fig. 596 darstellt; wiederholt man also jetzt die Einstellungen durch Drehen nach der anderen Seite ganz in derselben Weise, nimmt von deren Mittel und dem zuerst erhaltenen die halbe Summe und corrigirt endlich die resultirende Zahl noch mit dem Werthe von α in positivem oder negativem Sinne, je nach der Seite, nach welcher die Krystallkante $w' : w''$ schief angelegt war, so hat man den gesuchten Winkel, welchen die Schwingungsrichtung mit jener Kante einschliesst.

Die Calderon'sche Doppelplatte hat vor der S. 491 beschriebenen Březina'schen den Vortheil, dass man den Krystall während der ganzen Operation im Instrumente erblickt. Was die Genauigkeit der Einstellung bei Anwendung der einen oder der andern betrifft, so hängt diese wohl von der Beschaffenheit des Auges ab, d. h. von der Empfindlichkeit des

einzelnen Beobachters für geringe Unterschiede der Helligkeit oder für kleine Ortsveränderungen in einer Interferenzfigur. Will man mit der Březina'schen Platte arbeiten, so bedarf man schwach convergirenden Lichtes, um die in Fig. 541 abgebildete Interferenzerscheinung zu sehen. Man schraubt zu dem Zwecke von dem verticalen Polarisationsinstrumente Fig. 592 nur die drei untersten Objectivlinsen *o* ab und behält die oberste grösste derselben im Rohre *u**). Auf das letztere wird dann von unten die, die Doppelplatte enthaltende, Kappe aufgeschoben, welche eine ähnliche Gestalt hat, wie *δ* in Fig. 593, aber kürzer ist und keine Diaphragmen enthält. Durch Drehen dieser Kappe giebt man der Doppelplatte die erforderliche Stellung gegen die Hauptschnitte der vorher sorgfältig gekreuzten Nicols und führt die optische Einstellung des zu untersuchenden Krystalls nach S. 491 aus. Da hierbei kein Licht neben dem Krystall vorüber gehen darf, wird die S. 620 beschriebene Glasplatte durch eine solche von schwarzem Glase ersetzt, in welcher sich eine Oeffnung befindet; die Krystallplatte wird so aufgeklebt, dass sie diese (in Fig. 594 durch einen punktirten Kreis angedeutete) Oeffnung vollständig verdeckt. Das ganze übrige Verfahren ist natürlich das gleiche, wie bei Anwendung der Calderon'schen Platte.

Ueber die Prüfung und Justirung des Stauroskopes s. Laspeyres, Zeitschr. f. Kryst. 6, 429. Derselbe Autor hat ferner eingehende Untersuchungen darüber angestellt (ebenda 8, 97), wie eine noch grössere Genauigkeit der stauroskopischen Messungen durch Anwendung eigens construirter Polarisatoren zu erzielen sei, und hat auf Grund der gesammelten Erfahrungen die Construction eines »Präcisionsstauroskops« in Aussicht gestellt, welches von Fuess ausgeführt und baldigst in der Zeitschrift für Krystallographie beschrieben werden soll.

Da die vorstehende Untersuchung fast nur bei monosymmetrischen und asymmetrischen Krystallen vorgenommen wird, bei denen die Schwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben dispergirt sind, so versteht es sich von selbst, dass das Instrument hierbei mit homogenem Lichte erleuchtet werden muss. Am besten verwendet man einen Bunsen'schen Brenner, dessen Rohr oben eine plattgedrückte Form besitzt, so dass das Gas aus einem circa 30 Millim. langen und 3 Millim. breiten Schlitz austritt; man erhält dann eine circa 40 Millim. breite und hohe Flamme, welche man in ihrer ganzen Flächenausdehnung färbt, indem man in den unteren Theil derselben von jeder Seite her eine, an einem Platindraht befindliche Perle von geschmolzenem schwefelsaurem Lithium (roth), schwefelsaurem Natrium (gelb) oder schwefelsaurem Thallium (grün) einführt. Diese Flamme stellt man dann möglichst nahe vor dem Spiegel des Polarisationsinstrumentes

* Da nunmehr die Bildebene des Objectivs viel höher liegt, als vorher, muss man das Ocularrohr *r* so weit als möglich herausziehen, um ein scharfes Interferenzbild zu erhalten.

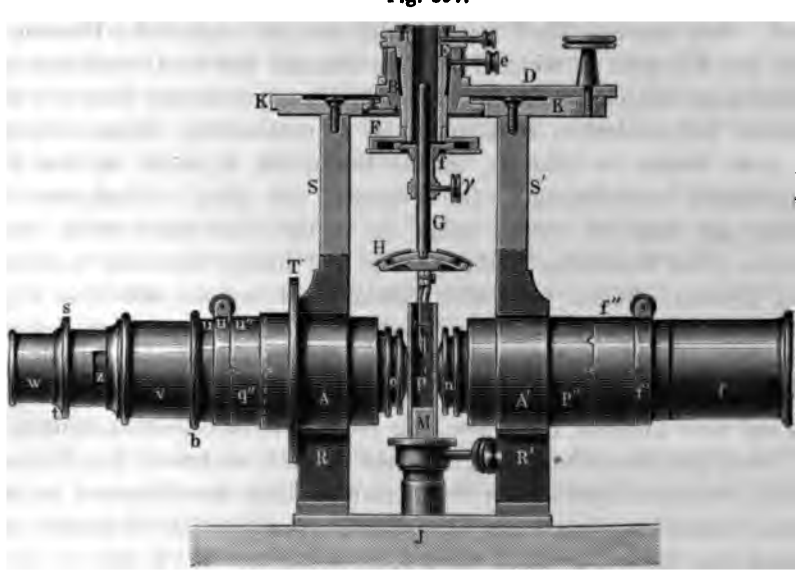
auf und dreht diesen so, dass ihr Bild gerade in die Mitte des Gesichtsfeldes reflectirt wird*).

§. 119. **Einrichtung des optischen Universalapparates zur Axenwinkelmessung.** Um den Winkel der optischen Axen in Luft oder in Oel zu messen (s. §. 26), werden die optischen Theile des Polarisationsinstrumentes Fig. 592 benutzt, aber in ein anderes Stativ eingesetzt, welches in Fig. 597 in $\frac{1}{3}$ nat. Grösse dargestellt ist. Dasselbe besteht aus einer hölzernen oder eisernen Fussplatte *J*, auf welcher zwei horizontale Messingrohre *A* und *A'* mittelst zweier verticaler Säulen befestigt sind. In das eine wird nun das Rohr *u* des verticalen Instrumentes mit allen seinen Theilen, in das andere ebenso das Rohr *f* mit den Sammellinsen *n* eingeschoben, und die Nicols beider Theile so gestellt, dass ihre Schwingungsrichtungen mit der Horizontalebene 45°, mit einander 90° bilden, welche Stellungen durch Einpassen der Nasen an den Klemmringen *u'* und *f'* in entsprechende Einschnitte der festen Rohrstücke *q''* und *p''* gegeben sind. Zwischen Objectiv- und Sammellinsen muss genügender Zwischenraum bleiben, um die zu untersuchende Krystallplatte frei umdrehen zu können. Die beiden Rohre *A* und *A'* tragen je eine verticale Säule, *S* und *S'*, auf welche der horizontale Theilkreis *K*, der in der Mitte eine weite Durchbohrung hat, aufgeschraubt ist; in dieser Durchbohrung dreht sich der Ring *B*, welcher mittelst des Armes *D*, der

*) Wie bereits S. 585 erwähnt wurde, ist es bei derartigen Arbeiten zu empfehlen, den Bunsen'schen Brenner unter einen Abzug zu stellen, welcher mit dem Schornstein in Verbindung steht. Für die monochromatischen Flammen hat H. Laspeyres in der Zeitschr. f. Instrumentenk. 1882, 70, eine sehr praktische Lampe beschrieben, mit welcher ein senkrechtes Metallstück mit drei horizontalen Armen verbunden ist, an deren Ende sich je eine Rolle von Platindraht oder Platingaze (für das Thalliumsalz seiner leichten Reducirbarkeit wegen ein Bündel Asbestfasern) befindet, welche mit dem geschmolzenen Salze getränkt werden und, in die Flamme gebracht, die ganze Breite derselben intensiv und andauernd färben. Eine einfache Drehung der Arme genügt, um die Färbung durch Natrium mit der durch Lithium oder Thallium zu vertauschen. Will man diese breite monochromatische Flamme auch zu andern Zwecken (Bestimmung der Schwingungsrichtung unter dem Mikroskop, Messung der Brechungsexponenten, des optischen Axenwinkels u. s. w.) benutzen, so empfiehlt sich die in den mineralogischen Instituten zu Strassburg und München getroffene Einrichtung: der Brenner mit der erwähnten Vorrichtung ist mittelst eines knieförmigen Trägers an einem Holzstück befestigt, welches zwischen zwei an der Wand unter dem Abzugskasten angebrachten Holzschienen verschiebbar ist und durch eine Schraube in der gewünschten Höhe geklemmt werden kann. Der knieförmige Träger ist so hoch, dass der Brenner sich in dem unten offenen Abzugskasten befindet und zwar dicht an einem an der Vorderseite angebrachten, ziemlich hohen Glas- oder Glimmerfenster, vor welchem der Apparat aufgestellt wird; je nach dessen Höhe wird die Flamme hinter dem Fenster in die erforderliche Höhe gestellt. Um sie anzünden und die Färbung derselben reguliren zu können, hat der Abzugskasten an der Seite eine Thür. Das Innere in der Nähe des Fensters wird zweckmässig mit Asbestpappe ausgefüttert, damit man die Flamme der Vorderseite ohne Gefahr möglichst nähern kann. Brenner der beschriebenen Art mit dem knieförmigen Träger liefern Böhm und Wiedemann in München (s. Preisverz. am Schluss).

am Ende durch eine Schraube am Kreise festgeklemmt werden kann, bewegt wird. Ausserdem sind an *B* zwei diametral entgegengesetzte Arme mit Nonien angebracht, beide rechtwinkelig zu *D*. Der Ring *B* ist innen conisch ausgebohrt und umfasst den ringförmigen Conus *E*, welcher durch die kleine Schraube *e* festgeklemmt werden muss, wenn man den Axenwinkel messen will. Auf das Ende von *E* wird nun von unten her die kreisförmige Metallscheibe *F* aufgeschraubt, welche auf ihrem verdickten Rande eine federnde, kreisförmig ausgeschnittene, dünnere Platte trägt, so dass in dem zwischen beiden befindlichen Raume die Scheibe *f* und mit ihr die den Krystall *p* tragende Pincette horizontal verschoben werden kann. Diese Verschiebung dient zum Centriren der Krystallplatte: man

Fig. 597.



lässt *G* durch Lösen der Klemmschraube *γ* so weit nieder, bis man, durch das Instrument blickend, die Interferenzfigur am besten sieht, also eine klare, zur Messung geeignete Stelle des Krystalls sich in der verlängerten Axe des Rohres *u* befindet; dann zieht man das letztere in dem Rohre *A* so weit zurück, dass man den Krystall selbst deutlich erblickt, und centrirt ihn, ebenso wie einen Krystall bei einer Goniometermessung, durch Hin- und Herschieben von *f* in seiner Ebene, bis die zur Messung zu benutzende klare Stelle desselben bei jeder Drehung der Pincette und des Conus *E* still steht. Nähert man jetzt wieder die Objectivlinsen *o* der Platte und stellt durch Drehung derselben die beiden Axenbilder im Gesichtsfelde des Instrumentes ein, so wird man finden, dass diese nicht in die Mitte zu bringen sind, weil die optische Axenebene des Krystalls noch nicht genau horizontal gestellt ist; entweder sind beide zu hoch, oder zu niedrig, oder

ihre Verbindungslinie ist nicht parallel dem Horizontalstrich im Mikrometer, d. h. die Platte ist noch zu justiren. Dies geschieht mittelst der Kugelverschiebung des Theiles *H* der Pincette; *H* bildet nämlich ein kreisförmiges Segment einer Kugeloberfläche, auf deren verdicktem Rande ein zweites, concentrisch mit dem ersten und in der Mitte mit weitem kreisförmigem Ausschnitt versehen, aufgeschraubt ist. Zwischen beide ist die kreisrunde, ebenfalls ein Kugelsegment bildende, kleinere Scheibe, welche das untere Ende von *G* bildet, eingeklemmt; man kann demnach den unteren Theil der Pincette nach jeder beliebigen Richtung um einen gewissen Winkel neigen. Dabei ist das Drehungscentrum dieses Kugelgelenks (des sogen. Petzval'schen Trägers) einige Millimeter unter dem Ende der Pincette, an welcher Stelle sich die Krystallplatte befindet, deren Centrirung also durch das Neigen derselben nach irgend einer Seite keine erhebliche Aenderung erfährt. Den unteren Theil von *H* bildet nun die eigentliche Pincette zum Halten des Krystalls *p*, welcher zu dem Zwecke auf ein Glasstückchen mit Canadabalsam aufgekittet ist (um bei möglichst genäherten Linsen *o* und *n* die Platte frei umdrehen zu können, ist es nothwendig, dieses Glasstückchen nicht breiter zu nehmen, als die Breite des Krystalls in der Ebene der optischen Axen beträgt). Die Pincette, aus stark vernickeltem Stahl gefertigt (um nicht zu rosten, wenn sie in Oel verwendet wird), besteht aus einer nicht federnden Hälfte (in Fig. 597 links), mit einer verhältnissmässig grossen ebenen verticalen Fläche, auf welche die den Krystall tragende Glasplatte mittelst der horizontalen Schneide der andern, federnden Hälfte fest gepresst wird; in Folge dessen behält die Platte stets die Lage jener ebenen Fläche. Es versteht sich von selbst, dass man die Krystallplatte auf dem unteren Theil des lang rectangulären Glasstückchens so aufkittet, dass ihre Axenebene so genau als möglich senkrecht zur Längsrichtung des letzteren steht; denn wenn man alsdann das Glasstück so in die Pincette einklemmt, dass seine Längsrichtung vertical ist, so bedarf es zur Justirung der Platte nur noch einer kleinen Correction.

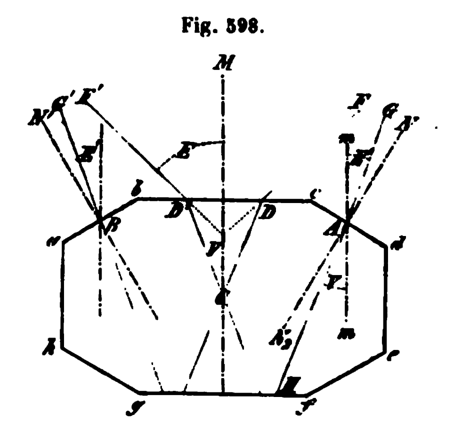
Bei der einfachen Messung des Axenwinkels in Luft hat man das in Fig. 597 gezeichnete Oelgefäss *M* wegzulassen und, wie schon bemerkt, mit den Linsen *o* und *n* so nahe an die Krystallplatte heranzugehen, als es möglich ist, ohne dass dieselbe beim Herumdrehen an einen der beiden Theile anstreift. Je grösser die Breite der Platte, desto weiter muss der Abstand der Linsen bleiben, desto kleiner ist das Gesichtsfeld; doch bleibt dieses selbst bei sehr grossen Platten immer noch gross genug, um bei einiger Uebung schnell die Lage der Axen aufzufinden, wenn man nur den Krystall in der oben angegebenen Weise nahezu richtig eingesetzt hatte, wozu man ihn vorher im verticalen Instrumente zu betrachten hat. Nach der Centrirung und Justirung nimmt man nun die Messung so vor, wie es S. 115 und 116 (vergl. Fig. 85) angegeben wurde, während man zur Beleuchtung die im vorigen § erwähnte breite Flamme eines nahe vor das Rohr *f* gesetzten Bunsen'schen Brenners benutzt, welche einmal durch

Lithium-, die andern Male durch Natrium- und Thalliumsulfat gefärbt wird. Die Drehung der Pincette geschieht jetzt durch den Arm D, indem man dessen Klemmschraube fasst, und die Ablesung mittelst der dazu rechtwinkeligen Nonien. Will man ein möglichst genaues Resultat erzielen, so stelle man bei jeder Farbe die schwarze Hyperbel nicht nur auf den mittelsten Strich des Mikrometers, sondern auch auf mehrere benachbarte ein, aber gleich viel zu beiden Seiten (z. B. — 2, — 1, 0, + 1, + 2), und nehme das arithmetische Mittel; ganz ebenso verfahre man bei der Einstellung der zweiten Axe: die Differenz der beiden Mittel ist der gesuchte scheinbare Axenwinkel $2E$. Die Einstellung einer Hyperbel auf einen Mikrometerstrich kann am genauesten ausgeführt werden, wenn die Ringe der Interferenzfigur ziemlich klein, aber doch noch deutlich sichtbar sind; weit weniger genau, wenn dieselben so eng sind, dass man sie nicht deutlich sieht, sondern nur die hyperbolischen dunklen Büschel erblickt, ebenso, wenn die Platte so dünn ist, dass ganz weite, dann auch stets sehr verwaschene, Interferenzstreifen auftreten. Hat man also in Bezug auf die der Platte zu gebende Dicke freie Wahl, so schleife man sie so, dass recht deutliche, aber nicht zu weite Lemniscaten entstehen.

Es ist S. 117 gezeigt worden, dass man den wahren Axenwinkel $2V$ aus dem gemessenen scheinbaren, $2E$, berechnen kann, wenn man den mittleren Brechungsexponenten β kennt. Ist dies nicht der Fall, so muss man zwei Platten, eine senkrecht zur ersten, die andere senkrecht zur zweiten Mittellinie, haben und deren Messung in Oel vornehmen (s. S. 120). Es giebt indessen einen Fall, in welchem man den wahren Axenwinkel $2V$ mit einer einzigen Platte durch Messung in Luft bestimmen kann, und dieser soll jetzt erörtert werden.

Sei Fig. 598 der Durchschnitt eines rhombischen Krystalls nach der optischen Axenebene desselben, und sei letzterer demnach gebildet von den beiden Pinakoiden, welche normal zu den beiden Mittellinien stehen (von denen das zur zweiten Mittellinie senkrechte übrigens auch fehlen kann), und einem Prisma. Man wird alsdann in den meisten Fällen sowohl durch das Pinakoid bc (fg) beide Axen sehen, als auch je eine durch ein Paar paralleler Prismenflächen. Centrirt man also im Axenwinkelapparat die Mitte der Fläche bc, so kann man den scheinbaren Winkel $2E$ messen, welchen DF mit $D'F'$ macht (wenn CD und CD' die Richtungen der wahren optischen Axen des Krystalls sind). Centrirt man darauf einen Punkt des Krystalls, welcher auf der Geraden CM so weit

Fig. 598.



nach rückwärts gelegen ist, dass beim Drehen einmal die Prismenfläche ab, das andere Mal cd gerade in die Mitte des Gesichtsfeldes kommt, wenn die Richtung der gebrochen aus derselben austretenden optischen Axe, d. i. AG, resp. BG', der Axe des Instrumentes entspricht, — so kann man durch Einstellung der Axenbilder, welche aus den beiden Prismenflächen austreten, den Winkel messen, welchen der Strahl AG mit BG' einschliesst. Werde dieser Winkel mit $2E'$ bezeichnet, ferner der Winkel, welchen die Normalen zu den beiden Prismenflächen, AN und BN', bilden, mit $2P$, und seien $2E$, $2E'$ und $2P$ gemessen worden, so ist daraus der wahre Axenwinkel $2V$ zu finden, wie folgende Betrachtung lehrt:

Bekanntlich ist

$$\beta \cdot \sin V = \sin E \qquad (1)$$

und, da $\frac{\sin GAN}{\sin HAN_2} = \beta$ und $mm \perp bc$,

$$\beta \cdot \sin(P - V) = \sin(P - E') \qquad (2)$$

Dividirt man Gleichung (1) durch (2), so folgt:

$$\frac{\sin V}{\sin(P-V)} = \frac{\sin E}{\sin(P-E')} .$$

Um diese Gleichung auf eine Form zu bringen, welche eine leichte Berechnung der Unbekannten V gestattet, setzen wir

$$\frac{\sin E}{\sin(P-E')} = p;$$

dann ist:

$$\sin V = p \cdot \sin P \cdot \cos V - p \cdot \cos P \cdot \sin V,$$

durch $\cos V$ dividirt:

$$\text{tang } V = p \cdot \sin P - p \cdot \cos P \cdot \text{tang } V$$

$$\text{tang } V = \frac{p \cdot \sin P}{1 + p \cdot \cos P};$$

für p seinen Werth eingesetzt und gekürzt, folgt

$$\text{tang } V = \frac{\sin E}{\cos E' - \text{cotang } P (\sin E' - \sin E)} .$$

In allen andern Fällen, als dem soeben besprochenen, bedarf es zu der directen Bestimmung des optischen Axenwinkels zweier Platten, welche senkrecht zur ersten, resp. zur zweiten Mittellinie geschliffen sein müssen. Um den Axenwinkel derselben in Oel zu bestimmen, bedient man sich des in Fig. 597 im Querschnitt sichtbaren Oelgefässes *M*. Dasselbe besteht aus einem parallelepipedischen Glasstück mit einem Einschnitte, an welches zu beiden Seiten dünnere planparallele Glasplatten angekittet sind; dieses Gefäss füllt man mit einem farblosen Oel (gebleichtem Oliven- oder Mohnöl, Cassiaöl) oder noch besser (wegen seiner starken Brechbarkeit) mit α-Bromnaphtalin und setzt es auf den zwischen den beiden Säulen RR' befindlichen Träger, welcher in einer Hülse nach oben und unten verschiebbar ist. Hat das Gefäss die richtige Stellung, so schiebt man die optischen Theile des Instrumentes derart an dasselbe heran, dass Sammel- und

Objectivlinse dessen Wände berühren. Da es, besonders bei kleinen Krystallen, wünschenswerth ist, ein möglichst grosses Gesichtsfeld zu haben, d. h. die Linsen denselben möglichst nähern zu können, so empfiehlt es sich, ein so schmales Oelgefäss zu nehmen, wie es in Fig. 597 gezeichnet ist. Bei einer grossen Platte dagegen kann man eher auf ein weites Gesichtsfeld verzichten, weil diese leichter zu centriren und zu justiren ist, und kann daher für solche ein zweites Oelgefäss verwenden, weit genug, um sie darin umdrehen zu können, d. h. etwa mit dem doppelten Abstande der beiden Glaswände von dem des ersten.

Zur Messung des Axenwinkels in höherer Temperatur bringt man an Stelle des Oelgefässes ein metallenes Luftbad, d. h. einen parallelepipedischen Kasten, von ca. 22 cm Länge und 5 cm Höhe, mit zwei, bis 300° getheilten Thermometern und einer in der oberen Fläche befindlichen Oeffnung zur Einführung der Pincette mit dem Krystall; jene kann alsdann mit einem die Pincette umfassenden Metallscheibchen wieder geschlossen werden. Dieser Kasten wird (mit seiner Längsrichtung senkrecht zur Zeichnungsebene der Fig. 597) an Stelle des Oelgefässes so auf den Träger aufgesetzt, dass ein an seiner Unterseite befindlicher dicker Messingstift in eine Oeffnung des Trägers eingreift und durch die in Fig. 597 sichtbare Schraube festgeklemmt wird. Der Kasten wird von seinen beiden, ca. 10 cm auf beiden Seiten des Axenwinkelapparates hervorragenden Enden durch zwei Flammen erhitzt. In der Mitte der beiden grossen Wände befindet sich je ein Fenster, durch eine eingesetzte planparallele Glasplatte gebildet, an welche die Linsen des Instrumentes von beiden Seiten nahe herangeschoben werden. Um auch hier bei kleinen Krystallen den Vortheil eines grossen Gesichtsfeldes zu haben, andererseits aber auch grosse Krystalle frei umdrehen zu können, ist die Weite des mittleren Theils veränderlich, indem die beiden Metallscheiben, in welche je ein rundes Planglas eingesetzt ist und durch eine kleine Feder festgehalten wird (um es austauschen zu können, wenn es ja einmal durch zu schnelles Erhitzen springen sollte), in röhrenförmigen Ansatzstücken, welche in das Innere des Kastens hineinreichen, mittelst eines Schlüssels hereingeschraubt und dadurch einander genähert oder so weit herausgeschraubt werden können, bis sie sich in einer Ebene mit den Seitenwänden des Erhitzungskastens befinden. Man schraubt die beiden Fenster für jede Messung in denjenigen gegenseitigen Abstand, welcher den Dimensionen der Krystallplatte entspricht, bringt den Kasten durch Verschiebung des Trägers in die richtige Höhe, führt die Platte mit dem untersten Theil der Pincette hinein und centrirt und justirt ganz ebenso wie in freier Luft; alsdann schliesst man die obere Oeffnung und erhitzt das Luftbad von unten her durch zwei kleine Flämmchen, bis der Stand der Thermometer constant geworden ist; etwa eine halbe Stunde später notirt man denselben und führt die Messung des Axenwinkels ganz so aus wie bei gewöhnlicher Temperatur. Verträgt der Krystall einen höheren Wärmegrad, so vergrössert man nun die Flammen und wiederholt den Versuch.

Um sich davon zu überzeugen, dass die zur Messung des Axenwinkels benutzte Platte normal zur Mittellinie der Axen sei, genügt es in den meisten Fällen, dass man sie auf den Krystallträger des verticalen Polarisationsinstrumentes auflegt und sieht, am besten in homogenem Licht, ob der Mittelpunkt des Lemniscatensystems mit demjenigen des Gesichtsfeldes (dem Nullpunkt des Mikrometers) zusammenfällt. Will man jedoch genau ermitteln, ob beide optische Axen denselben Winkel mit der Normale der Platte einschliessen, was der Fall sein muss, wenn diese genau senkrecht zur Mittellinie ist, so kann man dies auf folgende Weise: In das Ocularrohr des Axenwinkelapparates Fig. 597 wird nach Wegnahme des Nicols *w* ein, den Fuess'schen Apparaten beigegebenes, geschwärztes kleines Rohr so eingeschoben, dass ein Ausschnitt, welcher an einer Seite desselben befindlich ist, gerade mit einem der beiden rectangulären Schlitze des Ocularrohrs coincidirt; jenes Rohr enthält eine kleine Spiegelglasplatte, welche man von vorn mittelst eines in die Fassung einzusteckenden Stahlstäbchens drehen kann. Lässt man nun das Licht einer seitlich aufgestellten Flamme durch den Schlitz *z* fallen und von dem unter 45° Neigung aufgestellten Spiegel parallel der Axe der Linsen reflectiren, bis es an die Oberfläche der Krystallplatte gelangt, so wird es hier (besonders wenn man hinter die Platte mattes schwarzes Papier schiebt) in derselben Richtung zurückgeworfen, wenn jene polirte oder mit Glas bedeckte Oberfläche genau senkrecht zur Axe des Linsensystems steht. Man wird also im andern Falle das von der Platte reflectirte Bild der Glasmikrometerstriche neben dem direct gesehenen Bilde erblicken und beide durch Drehen der Krystallplatte (mittelst des Armes *D* Fig. 597) zur Deckung zu bringen haben. Nachdem man bei dieser Stellung den Nonius abgelesen, hat man einzeln die Einstellungen der beiden Axen vorzunehmen; ist die Platte genau senkrecht zur Mittellinie, so ist die erstere Einstellung das Mittel zwischen den beiden letzten *). Dieselbe Methode wendet man auch an, wenn man zu dem S. 527 angeführten Zwecke den Winkel einer einzigen, durch eine Fläche austretenden optischen Axe mit der Normale der Fläche messen will. Man kann diese Bestimmung, gemäss einem älteren Vorschlage von Neumann, noch genauer, als es mit dem Axenwinkelapparat möglich ist, ausführen mit dem Fuess'schen Goniometer No. 2 wobei man folgendermaassen verfährt: Die Krystallplatte wird zuerst justirt und zwar mit derjenigen Schraube des Justirapparates, zu welcher senkrecht sie auf dem Goniometer befestigt ist; alsdann wird das Signal des Collimators durch ein Rohr mit einer einfachen Linse ersetzt und auf dieses das Beleuchtungsrohr mit eingeschobenem Nicol (s. S. 566), dessen Hauptschnitt auf 45° gestellt wird, aufgesetzt;

*) Es ist klar, dass eine solche Prüfung ganz unnöthig ist, wenn die Platte von natürlichen Krystallflächen gebildet wird, welche vermöge der Symmetrie des Krystalls die erforderliche Lage haben müssen, oder wenn nur eine derartige Fläche vorhanden ist, weil man alsdann die zweite, durch Schleifen herzustellende, mit dem Goniometer auf ihren Parallelismus mit der ersten prüfen kann.

ebenso wird vor dem Ocular y der drehbare Nicol (s. S. 605) angebracht und mit dem ersteren gekreuzt. Durch Drehen der justirten Platte in ihrer Ebene mit Hülfe der zweiten Justirschraube kann man bewirken, dass die optische Axe, welche durch die Platte austritt, in die horizontale, dem Limbus parallele Ebene fällt, also beim Drehen der inneren Axe in die Richtung des Collimators gebracht werden kann. Richtet man nun das Beobachtungsfernrohr ebenfalls auf den Collimator welche Position vor dem Wegnehmen des Signalspaltes genau bestimmt worden ist), so erblickt man die dunkle Hyperbel mit dem innersten Theil der Interferenzringe und kann die erstere, durch Klemmung der Axe und Feinstellbewegung, mit dem Fadenkreuze zur Deckung bringen. Indem man die Platte in ihrer Position fixirt lässt, hat man nun die Klemmschraube am Nonienkreise zu lösen und diesen mit dem Beobachtungsfernrohr zu drehen, bis das von der Rückseite gespiegelte Bild des inzwischen wieder eingesetzten Collimatorsignals im Fernrohre erscheint. Diese Position, am Kreise abgelesen und mit der des Collimators verglichen, ergiebt die Richtung der Normale der Platte, welche letztere selbstverständlich genau planparallel sein muss. Dass man in der soeben beschriebenen Zusammensetzung das Goniometer No. 2 auch als einen sehr genauen Axenwinkelapparat benutzen kann, folgt aus dem Gesagten von selbst.

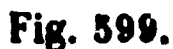
Der zum Universalapparat gehörige, in Fig. 597 dargestellte Axenwinkelapparat kann auch zur Messung der durch eine Krystallplatte hervorgebrachten Drehung der Polarisationsebene des Lichtes benutzt werden. Zu diesem Zwecke werden aus dem Rohre f die Sammellinsen n entfernt, um paralleles Licht zu erhalten, und das Rohr u mit seinem gesammten Inhalt herausgezogen. Statt des letzteren wird auf das links von T hervorragende feste Rohrstück eine den Apparaten beigegebene Kappe aufgesetzt, welche in den Figg. 599 und 600 mit abgebildet ist, und in diese das Nicolrohr w so eingesetzt, dass Analysator und Polarisator das Maximum der Dunkelheit zeigen, d. h. so genau als möglich gekreuzt sind. T besitzt eine Kreistheilung, auf welcher diese Stellung mittelst einer am Rande der Kappe angebrachten Nonientheilung abgelesen werden kann; ist dies geschehen, so wird letztere wieder entfernt und das Rohr u ohne Nicol, aber mit der a. vor. S. beschriebenen kleinen Spiegelglasplatte, eingesetzt. Die nunmehr in der Pincette befestigte Krystallplatte wird jetzt mit Hülfe des S. 632 beschriebenen Verfahrens genau senkrecht zur Axe des Instrumentes gerichtet, weil sonst die Strahlen dieselbe in einer schiefen Richtung, in welcher sie eine grössere Dicke besitzt, durchsetzen würden. Nachdem dies geschehen und das Rohr u wieder durch die Kappe mit dem Nicol ersetzt worden ist, erscheint jetzt durch die in den Gang der Lichtstrahlen eingefügte circularpolarisirende Platte das Gesichtsfeld aufgehellt, und man muss um denselben Winkel, um welchen sie die Polarisationsebene dreht, in dem gleichen Sinne die Kappe mit dem Nicol nachdrehen, um wieder Dunkelheit zu erzeugen. Hat man bei Abnehmen und Aufsetzen der Kappe

die Stellung des Nicols in derselben nicht verändert, weshalb man sie immer an dem gekerbten Rande des weiteren Theiles anfassen muss, so ergiebt die Differenz der Dunkelstellung vor und nach Einfügung der Krystallplatte deren Drehung für das Licht der angewandten, selbstverständlich monochromatischen Flamme. Die Auslöschungsposition findet man am genauesten, wenn man auf den Eintritt der maximalen Dunkelheit einmal von rechts, einmal von links her einstellt und von beiden so erhaltenen Ablesungen das Mittel nimmt.

§. 120. **Einrichtung des optischen Universalapparates als Goniometer und Refractometer.** Der Kreis *K* des Axenwinkelapparates, welcher mittelst der Nonien eine Ablesung auf 1′ gestattet, kann zu einem sehr brauchbaren kleinen Goniometer benutzt werden. Die Zusammensetzung dieses Instrumentes zeigt die perspectivische Ansicht Fig. 599 in $^1/_2$ nat. Grösse. An den festen Kreis *K* wird von unten her der Arm *F′* eines Beobachtungsfernrohres (mit Vorsatzlupe zum Centriren) mittelst der Schraube *b* angeschraubt; die radiale Stellung des Armes *F′* wird durch zwei kleine Stellstifte, welche in zwei entsprechende Oeffnungen der Unterseite des Kreises passen, bestimmt. In den Conus *E* wird eine cylindrische Axe eingeschoben, welche oben eine vollständige Fuess'sche Centrir- und Justirvorrichtung trägt und durch die kleine, im obersten Theile von *E* befindliche Schraube (vgl. auch den Durchschnitt Fig. 597) in der erforderderlichen Höhe fixirt wird; an das untere Ende von *E* wird dagegen ein stärkerer Cylinder *a* mit einer am Rande gekerbten Scheibe zu bequemerer Drehung angeschraubt; mit diesem bewegt man beim Centriren und Justiren den Conus *E* (nachdem man die Schraube *e* gelöst hat) und mit ihm die innere Axe, auf welcher sich der Krystall befindet. Beginnt man die eigentliche Messung, so hat man *e* wieder anzuziehen und den Arm *D* mittelst der daran befestigten Klemmschraube (in der Fig. der Deutlichkeit wegen fortgelassen) zu drehen; der Träger des Fernrohres ist so construirt, dass er der Klemmschraube freien Durchgang gestattet, daher man *D* und somit den Krystall ungehindert um 360° drehen kann. Mittelst einer zweiten Durchbohrung des Kreises wird der mit einem Websky'schen Spalt ausgerüstete Collimator fest mit dem Theilkreise verbunden. Zu dem Zwecke wird in die weite Oeffnung des Trägers *C* eine, in der Fig. mit *i* bezeichnete runde geschwärzte Messingscheibe eingelegt, durch diese die Schraube *c* hindurchgesteckt und in die Kreisplatte eingeschraubt, wobei man dem Arm *C* und damit dem Collimator eine möglichst genau radiale Richtung zum Kreise geben muss.

Will man das Goniometer zur Messung von Brechungsexponenten benutzen, so wird, wie Fig. 600 (S. 636) zeigt, der Träger des Beobachtungsfernrohrs umgekehrt aufgesetzt, d. h. der Arm *F* auf dem beweglichen Arme *D* festgeschraubt; steckt man zu dem Zwecke das Fernrohr in entgegengesetzter Richtung in seine Hülse, so hat es nunmehr genau die gleiche Lage, wie in Fig. 599, nur dass es jetzt mit *D* und den Nonien um den Mittelpunkt

des Kreises K drehbar ist, und daher seine Drehung abgelesen werden kann. Das Prisma, dessen Brechungsexponent gemessen werden soll, wird, wie in der Zusammensetzung Fig. 599, auf den Tisch der Centrir- und Justirvorrichtung aufgesetzt; seine Drehung muss aber jetzt unabhängig gemacht werden von derjenigen des Armes D und des Beobachtungsfernrohrs. Dies ist dadurch erreicht, dass der Arm C des Collimators jetzt in anderer Weise an den Kreis angeschraubt wird, als vorher, nämlich so, dass die


Fig. 599.

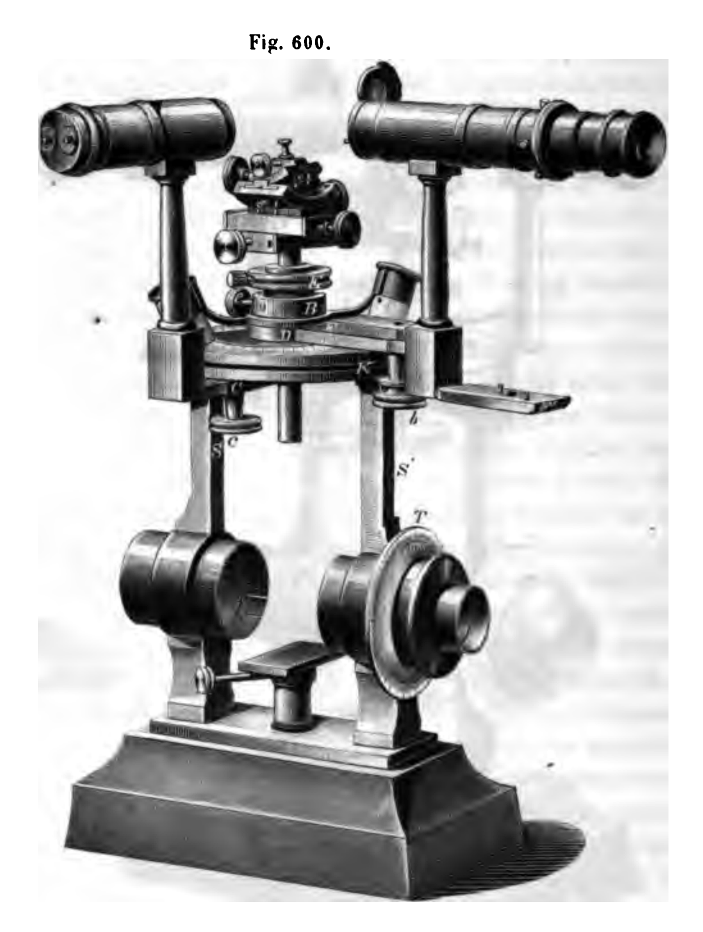


beiden in Fig. 599 sichtbaren Stellstifte in zwei entsprechende Oeffnungen an der Unterseite der Kreisplatte K eingreifen und daher der weite kreisförmige Ausschnitt von C, in welchen vorher die Metallplatte i gelegt war, unter die Mitte des Kreises kommt; in diesen mit Schraubengewinde versehenen kreisförmigen Ausschnitt wird der Conus E eingeschraubt.*) Da

* Bei der Zusammensetzung des Instrumentes muss der Conus E herausgenommen werden, ehe man den Collimator anschraubt, und erst, wenn dies geschehen, wieder eingesetzt werden.

der Arm C der Unterseite des Kreises unmittelbar anliegt, so berührt der Conus E, selbst wenn er ganz fest eingeschraubt wird, noch nicht sein Lager, die Hülse B, ist also jetzt von deren Drehung vollkommen unabhängig. Dabei bleibt aber die innere Axe für sich immer noch drehbar (und zwar dadurch, dass man das kleine, im Conus E befindliche Schräubchen löst), so dass man das aufgesetzte Prisma bequem centriren, justiren und in diejenige Stellung bringen kann, in welcher es das Minimum der Ablenkung zeigt.

Fig. 600.



Das soeben beschriebene Goniometer dient, wie S. 620 erwähnt, zugleich zur Bestimmung der Correction α bei der Stauroskopmessung, und ist zu diesem Zwecke das Beobachtungsfernrohr mit einem feinen Strichmikrometer versehen. Um dessen Strichwerth in Winkelmaass zu bestimmen, d. h. ausfindig zu machen, welchen Winkel zwei Bündel paralleler Strahlen mit einander einschliessen, deren Bilder im Gesichtsfelde einen Abstand von 1 Theilstrich haben, wählt man die in Fig. 599 dargestellte Zusammensetzung des Goniometers, setzt auf den Krystallträger einen Körper mit einer vollkommen ebenen spiegelnden Fläche, z. B. eine der zum Stauroskop gehörigen

Glasplatten, auf, bringt diese Fläche durch Centriren genau über den Mittelpunkt des Kreises und justirt sie, so dass beim Drehen derselben das von ihr reflectirte Bild des Collimatorsignals längs der horizontalen Mittellinie des Mikrometers durch das Gesichtsfeld des Fernrohrs läuft. Alsdann dreht man den Arm *D*, wie bei einer gewöhnlichen Krystallmessung, stellt das Bild des Signals auf zwei benachbarte Theilstriche des Mikrometers und liest beide mal den Nonius ab. Die Differenz beider Ablesungen ist, wie eine einfache Betrachtung lehrt, die Hälfte des gesuchten Winkels. Da man den Strichwerth des Mikrometers nur ein für alle mal bestimmt, und der Fehler der Messung durch die Multiplication mit 2 verdoppelt wird, so stelle man alle Striche von — 5 bis + 5 ein, so dass man die Ablesungen für 10 gleich gross sein sollende Intervalle erhält, und nehme von diesen das arithmetische Mittel.

Bei der Bestimmung der Stauroskopcorrection hat man, wie S. 621 auseinandergesetzt wurde, die beiden Fernröhre unter einem Winkel von genau 90° zu stellen. Zu diesem Zwecke bedient man sich der Zusammenstellung des Instrumentes als Refractometer Fig. 600, richtet das drehbare Beobachtungsfernrohr direct auf das Collimatorsignal und liest die entsprechende Position am Nonius ab; dann dreht man dasselbe seitlich, bis die Nonien eine um 90° grössere, resp. kleinere Ablesung liefern, und klemmt es in dieser Stellung fest; durch Drehen der inneren Axe, welche die Centrir- und Justirvorrichtung trägt, werden dann die von der Stauroskopplatte und dem aufgesetzten Krystall gespiegelten Signalbilder in das Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohres gebracht. Noch bequemer wäre es, wenn durch geeignet angebrachte Bohrungen in der Kreisplatte es ermöglicht würde, beide Fernröhre fest mit derselben unter einem Winkel von 90° (statt 45°, wie es Fig. 599 darstellt) zu verbinden und daher die Zusammenstellung des Instrumentes als Goniometer benutzen zu können. Fuess wird daher in Zukunft seine Instrumente mit den diesem Zwecke angepassten Bohrungen versehen.

§. 121. **Der Adams'sche Polarisations- und Axenwinkelapparat.** Um ein grösseres Gesichtsfeld zu erhalten und den Winkel der optischen Axen auch in solchen Fällen noch messen zu können, in welchen derselbe einen sehr grossen Werth besitzt, änderte W. G. Adams das Polarisationsinstrument für convergentes Licht dahin ab, dass er die oberste der Sammellinsen *n* des verticalen Apparates (Fig. 592) und die unterste der Objectivlinsen *o* fast halbkugelförmig machte und beide mit der dazwischen eingeklemmten Krystallplatte zu einem für sich drehbaren Ganzen verband, welches die Gestalt einer vollständigen Kugel besitzt. Die Folge davon ist, dass die diametral durch dieses System hindurchgehenden Lichtstrahlen, in welcher Richtung sie auch den Krystall passirt haben, aus der oberen Linse senkrecht zu deren Oberfläche heraustreten und daher keine Brechung erleiden. Klemmt man die Objectplatte derart zwischen die beiden Linsen ein, dass sich zwischen ihr und den letzteren beiderseits

eine dünne Schicht eines stark brechenden Oels (z. B. Cassiaöl) befindet, so werden selbst sehr schief durch den Krystall hindurchgehende Strahlen an der Grenzfläche desselben nicht total reflectirt, und nimmt man für die Linsen stark brechendes Flintglas, so wird, wenn der mittlere Brechungsexponent der Platte ein kleinerer als derjenige der Linsen ist, der Axenwinkel beim Austritt in das Glas (durch die zwischenliegende Oelschicht wird er nicht geändert, weil diese planparallel ist) sogar im Verhältniss zum wahren ($2V$) noch verkleinert. Dreht man nun das System mit der Platte, so kann man jede der Axen in die Mitte des Gesichtsfeldes bringen und daher mit diesem Instrumente, da beim Austritt der Strahlen aus der oberen Linse des Systems keine weitere Brechung stattfindet, den »scheinbaren Axenwinkel in Glas« (d. h. in dem stark brechenden Flintglas der Linsen) messen. Da nun durch die fast halbkugelförmig gekrümmten Linsen das Gesichtsfeld ein sehr grosses wird, so sind durch einen solchen Apparat die optischen Axen, auch wenn ihr Winkel ein so beträchtlicher ist, dass die Platte, im gewöhnlichen Polarisationsinstrumente untersucht, keinen Axenaustritt mehr zeigen würde, noch der Beobachtung und sogar der Messung zugänglich.

Nach dem vorstehend beschriebenen Principe und nach Angaben von A. Březina construirte der Mechaniker Schneider in Wien ein Instrument, welches die nöthigen Drehungen des mittleren Linsensystems getrennt vorzunehmen und zu messen gestattet, und da die von dem Genannten gelieferten Apparate die ersten waren, welche Verbreitung fanden, so werden dieselben auch vielfach als »Schneider'sche Polarisationsinstrumente« bezeichnet. Durch weitere Verbesserungen brachte endlich Fuess die Apparate in diejenige Form, welche jetzt wohl als die vollkommenste anzusehen ist, und in der sie an dieser Stelle beschrieben werden mögen.

An einem Stativ von genau derselben Form, wie sie dasjenige des verticalen Polarisationsinstrumentes Fig. 592 besitzt, ist in gleicher Weise ein Spiegel angebracht, und über diesem an zwei Trägern B und C die optischen Theile des Apparates, welche in Fig. 601 in $^2/_3$ nat. Grösse so abgebildet sind, dass die wichtigste mittlere Partie im verticalen Durchschnitte erscheint. Von dem Spiegel senkrecht reflectirt, treten die Lichtstrahlen in das Polarisatorrohr f, welches, dem ebenso bezeichneten in Fig. 592 gleichend, einen grossen Nicol P enthält und oben durch eine Spiegelglasplatte d, unten durch eine Linse e geschlossen ist. Wird dasselbe in das mit dem Träger B fest verbundene Rohr g, welches den Stellungen 0°, 45°, 90° entsprechende Marken trägt, so eingeschoben, wie es die Figur darstellt, dass nämlich die am drehbaren Rohre f befindliche Marke auf 90° gestellt ist, so fällt der Hauptschnitt des Polarisators mit der Zeichnungsebene der Fig. 601 zusammen. Ebenso wie g mit B, so ist auch das Rohr y mit dem Träger C in fester Verbindung, während zwischen g und y das grösstentheils im Durchschnitt dargestellte mittlere Rohrstück um die Axe

des Instrumentes gedreht und auch ganz herausgenommen werden kann, wenn man, nachdem der Spiegel zur Seite gedreht ist, die Schraube des Trägers *B* löst und letzteren an der dreikantigen Stahlschiene *A* abwärts schiebt (der andere Träger *C* ist an *A* festgeschraubt). Dieses Mittelstück passt mit einem kurzen vorspringenden Theile, in welchem sich die der unteren *e* correspondirende Linse *e'* befindet, in den oberen Rand des festen Rohres *y* und kann in diesem gedreht werden, so dass die auf letzterem angebrachte Marke mit einer der Marken 0°, 45°, 90° des drehbaren Mittelstückes zur Coincidenz gebracht werden kann. Ueber *e'* befindet sich die Sammellinse *n* und in entsprechender Entfernung vom oberen Ende die Objectivlinse *o*, auf deren Unterseite durch Einritzen und Schwärzen das in Fig. 602 dargestellte Liniensystem angebracht ist, welches als Fadenkreuz dient. Zwischen die beiden zuletzt erwähnten Linsen wird nun die kugelförmige Linsencombination *m* mit der Krystallplatte in sogleich zu beschreibender Weise eingefügt. In den obersten Rand des Mittelstückes passt wieder der untere des festen Rohres *y* mit einem angesetzten kurzen Theil von etwas geringerem Durchmesser, so dass nach dem Hinaufschieben des Trägers *B* bis zum vollständigen Ineinanderpassen der drei Rohre das mittlere durch *g* und *y* so festgehalten wird, dass es nur um die Axe des Instrumentes drehbar ist. In das obere feste Rohr *y* wird das die Ocularlinse *t* enthaltende, nicht drehbare Rohr *u* eingeschoben, dessen oberster Theil zu demselben Zwecke, wie am gewöhnlichen verticalen Polarisationsinstrumente, einen Schlitz *s* besitzt, welcher je nach Bedarf geöffnet oder geschlossen werden kann. Auf dem oberen Rande *s* des

Fig. 601.

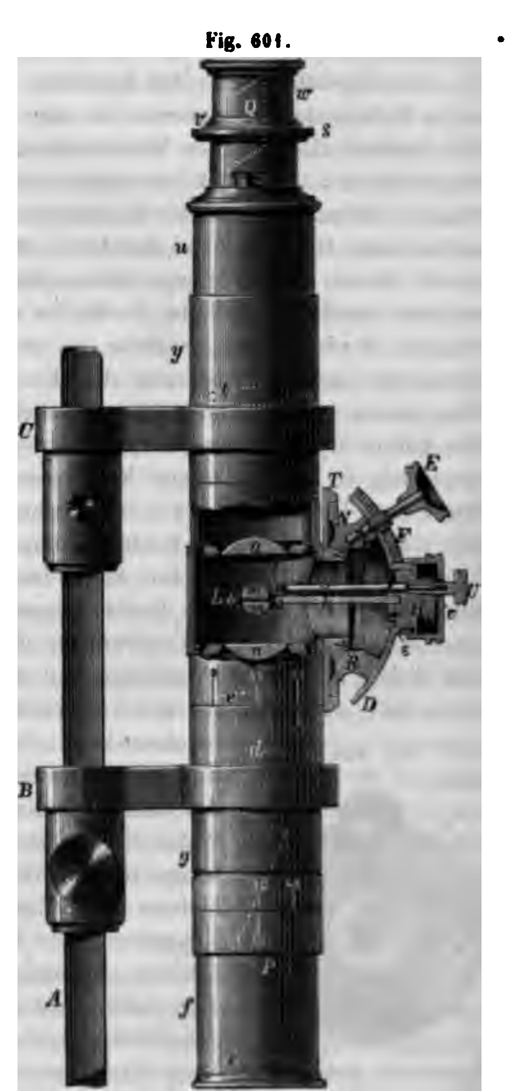


Fig. 602.

Ocularrohres, welcher eine Marke trägt, schleift die auf einer conischen Fläche v angebrachte Theilung des eingesetzten Rohres w; der im Innern des Letzteren befindliche Analysator Q ist mit dem Polarisator gekreuzt, wenn der Nullpunkt der Theilung mit der Marke zusammenfällt.

Das Eigenthümliche des Apparates gegenüber dem gewöhnlichen verticalen Polarisationsinstrumente ist nun die Construction des in Fig. 604 im Durchschnitt dargestellten Mittelstückes. Mit dem zu ihm gehörigen, bereits beschriebenen Rohrstück ist seitlich ein senkrechter Theilkreis T fest verbunden, dessen Axe in die Zeichnungsebene fällt, welcher daher in einem senkrechten Durchschnitte durch die Mitte erscheint, eine Stellung, welche durch Drehen des mittleren Rohres bis zur Coincidenz der Marken genau bewirkt werden kann. In die Fläche dieses Theilkreises ist eine drehbare Scheibe N eingelassen, welche an zwei gegenüberliegenden Stellen eine Nonientheilung zur Ablesung des Kreises (auf 1') besitzt. T hat in der Mitte einen weiten Ausschnitt, welchen ein nach aussen konisch abfallender kurzer Cylinder umgiebt; der auf diesen aufgeschraubte Ring hält die ringförmig in T eingelassene Nonienscheibe N in der breiten, kreisförmigen Rinne des Theilkreises fest. Die Drehung dieser Scheibe erfolgt durch den fest damit verbundenen breiten Knopf, dessen Gestalt aus dem Durchschnitte R ersichtlich ist. Das hohle Innere desselben ist bedeckt mit einer Messingplatte, welche die Gestalt eines kreisförmigen Stückes der Fläche einer Kugel hat, deren Centrum in der Mitte des Linsensystems m liegt. Von dieser mit vier Schräubchen auf dem dicken Rande von R befestigten Platte ist, wie man aus der von rechts aufgenommenen Ansicht Fig. 603 ersehen kann, der mittlere Theil herausgeschnitten, und zwischen den beiden abgeschrägten Seitenflächen der zurückgebliebenen Stücke eine schienenartige Platte D von derselben Krümmung, aber grösserer Länge mittelst des mit dem Knopfe E verbundenen kleinen Zahnrades verschiebbar. Wie aus der nebenstehenden Figur hervorgeht, trägt diese bogenförmige Schiene auf einer Seite ein Stück Kreistheilung, so dass vermittelst der an dem festen, links anliegenden Stücke angebrachten Marke der Winkelwerth der durch die Schraube E bewirkten Verschiebung der Schiene D, d. h. ihrer in der Ebene des Durchschnittes Fig. 604 stattfindenden Drehung um das Centrum der Linsen m, gemessen werden kann. Wenn die Marke auf 0 steht, so befindet sich D in der durch Fig. 604 wiedergegebenen Stellung, von welcher aus nach beiden Seiten der Schiene D eine Drehung von je 11° gestattet ist. In der Mitte trägt dieselbe nun einen cylindrischen Aufsatz mit einem Schraubengewinde, auf welches die Kappe v aufgeschraubt ist; die in Fig. 603 sichtbare Oberseite der letzteren hat einen schlitzförmigen Ausschnitt, durch welchen der kleine Schlüssel U gesteckt werden kann. Zieht man diesen heraus und schraubt die Kappe ab, so erblickt

Fig. 603.



man den mit dem Schlüsselloch versehenen Messingcylinder *H*, dessen vorspringender engerer Theil einen doppelten gekerbten Rand zeigt. *H* passt in den cylindrischen Aufsatz der Schiene *D* nur in einer, durch einen kleinen Stift *ε* bestimmten, Stellung und trägt das in das Innere des Instrumentes hineinragende Stahlstück *K*; dieses läuft am Ende in einen Ring *L* aus, welcher die durch Verschraubung mit einander verbundenen Fassungen der Linsen *m* so umgiebt, dass das Linsensystem mit der darin enthaltenen Krystallplatte in dem Ringe um die senkrechte Axe des Instrumentes gedreht werden kann. Diese Drehung erfolgt von aussen mittelst des Schlüssels *U* und des Stahlstäbchens *O*, dessen Ende ein kleines Zahnrad bildet, welches in den gezähnten oberen Rand der Linsenfassung eingreift.

Der Gebrauch des Instrumentes ist nun folgender: Nachdem man den Schlüssel *U* herausgezogen und die Kappe *v* abgeschraubt hat, zieht man den Messingcylinder *H* und mit ihm das mittlere Linsensystem vorsichtig heraus, legt dasselbe umgekehrt auf eine weiche Unterlage und schraubt die untere (jetzt nach oben gekehrte) Linse *m* heraus; auf die dadurch frei gewordene obere Seite der anderen Linse legt man nun die zu untersuchende Krystallplatte, deren Dicke nicht viel über einen Millimeter betragen darf, und klemmt sie durch Wiedereinschrauben der ersten Linse zwischen beiden mit schwachem Drucke ein; um ein Verschieben derselben zu vermeiden, ist es gut, sie am Rande, wo sie auf der Fassung der Linse aufliegt, an dieser mit etwas Wachs zu fixiren. Platten von geringerer Dicke, als der Abstand der zusammengeschraubten Linsen beträgt, bedeckt man mit einem oder mehreren Glasplättchen von der erforderlichen Grösse, damit sie nach dem Zusammenschrauben fest zwischen den Linsen liegen. Um beim Drehen Totalreflexion zu vermeiden, ist es in allen Fällen zu empfehlen, zwischen Linsen und Krystall, resp. auch zwischen diese und die eingelegten Glasplatten, dünne Oelschichten zu bringen. Nachdem so die zu untersuchende Platte gut eingeklemmt zwischen den Linsen angebracht ist, wobei man bei einem kleinen Präparate nur darauf zu achten hat, dass es genau im Centrum des Linsensystems *m* liegt, bringt man dieses wieder an seinen Platz im Innern des Instrumentes, indem man den kleinen Stift *ε* (an der Seite von *H*) in den entsprechenden Ausschnitt des an *D* angebrachten kurzen Rohrstückes eingreifen lässt, dann die Kappe *v* wieder aufschraubt, wodurch *H* in seiner Lage festgehalten wird, und den Schlüssel *U* einsetzt. Hat man die oben erwähnten Stellungen der Marken, bei denen der Hauptschnitt des unteren Nicols mit der Zeichnungsebene Fig. 604 zusammenfällt und der obere dazu gekreuzt ist, hergestellt, so erblickt man nun im Instrumente das Interferenzbild, etwa so wie Fig. 74 S. 107, mit irgend einem Winkel der optischen Axenebene gegen die Nicolhauptschnitte, je nach der zufälligen Orientirung, welche man der Krystallplatte beim Einklemmen zwischen die Linsen gegeben hatte. Durch Drehen derselben in ihrer Ebene mittelst des Schlüssels *U* bringt man nunmehr die Mittelpunkte der beiden Ringsysteme in diejenige Lage, bei welcher ihre Ver-

bindungslinie senkrecht zur Ebene des Durchschnittes in Fig. 601 ist; diese Richtung ist im Gesichtsfelde durch eine der beiden gestrichelten, nicht bis zur Mitte reichenden Linien des festen Fadenkreuzsystems Fig. 602 gegeben; man hat also den Schlüssel U so lange zu drehen, bis beide Axenpunkte mit der erwähnten Linie zusammenfallen. Steht die Ebene der optischen Axen nicht senkrecht zur Oberfläche der Krystallplatte, so kann man durch die Drehung der letzteren in ihrer Ebene die Verbindungslinie der beiden Axenpunkte wohl parallel der erwähnten Linie des Fadenkreuzes stellen, aber nicht mit ihr zusammenfallen lassen; um das Letztere zu erreichen, muss man schliesslich der Schiene D mittelst des Knopfes E die erforderliche Drehung ertheilen, und dadurch das centrale Linsensystem so weit neigen, dass die optische Axenebene der Platte senkrecht steht. Ist die Coincidenz jener beiden Linien hergestellt, d. h. fällt der horizontale schwarze Balken des Interferenzbildes, Fig. 73 S. 106, mit der erwähnten Fadenkreuzlinie zusammen, so dreht man das ganze Mittelstück um 45° (bis zur Einstellung der betreffenden Marken) und erhält nun die Hyperbelfigur Fig. 75 S. 107. Hierbei ist aber die Verbindungslinie der beiden Axenpunkte unverändert im gleichen Faden und senkrecht zur Drehungsaxe der Scheibe N geblieben; dreht man also jetzt die letztere mittelst des breiten Knopfes R, so gelingt es, die Scheitelpunkte jeder der beiden dunkeln Hyperbeln auf den Schnittpunkt der beiden durchgehenden Linien des Fadenkreuzsystems einzustellen. Die zwischen beiden Einstellungen erfolgte und am Kreise T abgelesene Drehung der Scheibe N ist nach Früherem gleich dem Winkel der beiden optischen Axen in dem Flintglase der centralen Linsen. Der Brechungsexponent der letzteren beträgt bei den Fuess'schen Instrumenten (nach einer Messung von Liebisch):

$$n = 1{,}5176 \text{ für } Na\text{-Licht}.$$

Kennt man also den mittleren Brechungsexponenten des Krystalls, so ist man im Stande, den wahren Axenwinkel desselben zu berechnen. Um etwaige Excentricitätsfehler bei der Messung zu eliminiren, kann man auch die Nonienscheibe N soweit drehen, dass die untere Linse nach oben gerichtet ist, alsdann von Neuem den Axenwinkel beim Austritt der Strahlen aus dieser messen und aus beiden Werthen das Mittel nehmen.

Auch zur Messung des Winkels zwischen je einer optischen Axe und der Normalen der Krystallplatte (vergl. S. 632) kann der Apparat gebraucht werden. Man nimmt zu diesem Zwecke den Nicol ab und ersetzt ihn, wie im Axenwinkelapparate (s. a. a. O.), durch eine schräggestellte Spiegelglasplatte, welche die Strahlen einer seitlich gestellten Flamme in der Axe des Instrumentes abwärts reflectirt; das von der Krystallplatte oder der ebenen Fläche der unteren Linse m gespiegelte Bild des Fadenkreuzes erkennt man durch Drehen des Linsensystems um eine seiner beiden horizontalen Drehungsaxen, bringt es durch die entsprechenden Bewegungen der Scheibe N und des Knopfes E mit dem direct gesehenen Fadenkreuze zur Deckung und liest diese Stellung, bei welcher die Normale der Platte

genau mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt, am Theilkreise T ab. Alsdann setzt man den Analysator wieder ein, dreht mittelst des Schlüssels U die Platte in ihrer Ebene so weit, dass das Bild einer optischen Axe in die zur Axe des Nonienkreises N senkrechte Linie des Fadenkreuzes fällt, und bringt dasselbe dann durch Drehen von N in die Mitte des Fadenkreuzes. Die hiezu erforderliche, am Kreise T abgelesene Drehung ist offenbar der scheinbare Winkel (nach der Brechung in Glas) zwischen der Plattennormale und der optischen Axe.

Der Hauptvortheil des Instrumentes besteht aber in seiner Verwendbarkeit zur Aufsuchung der optischen Axen in Krystallen, welche im Nörremberg'schen Apparate dieselben nicht mehr im Gesichtsfelde erkennen lassen. Will man sich z. B. über die Lage der optischen Axen orientiren an einem, nach einer Querfläche tafelförmigen, monosymmetrischen Krystalle, und zeigt dieser im gewöhnlichen Polarisationsinstrumente nur dunkle, beim Drehen der Platte das Gesichtsfeld durchlaufende Büschel, welche die Lage der Axenebene zweifelhaft lassen, so bringt man denselben in der angegebenen Weise in das vorstehend beschriebene Instrument und beleuchtet letzteres mit monochromatischem (Natrium-) Lichte. Man nimmt dann Interferenzcurven wahr, welche in Bezug auf die der Symmetrieebene des Krystalls entsprechende Linie rechts und links gleichgestaltet sind. Durch Drehen der Platte in ihrer Ebene (mit dem Schlüssel U) bringt man zunächst jene Linie in die zur Drehungsaxe der Scheibe N senkrechte Richtung und dreht die letztere (und somit den Krystall um seine Symmetrieaxe) nach beiden Seiten; tritt hierbei kein Axenbild in das Gesichtsfeld, so ist anzunehmen, dass die Symmetrieebene nicht optische Axenebene ist. Alsdann dreht man die Krystallplatte in ihrer Ebene um 90° und bewegt wieder den Nonienkreis nach beiden Seiten, nachdem man die Platte durch Drehung der Schiene D das eine Mal nach der einen, das andere Mal nach der anderen Seite geneigt hat; ist die optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene und nicht allzu schief gegen die Normale der Platte geneigt, so gelangen bei einer dieser Stellungen der Schiene D die optischen Axen durch Drehung von N ins Gesichtsfeld. In diesem Falle erblickt man auch bei horizontaler Stellung der Platte den Mittelpunkt des Lemniskatensystems, aber in der Symmetrieebene verschoben.

Ist die Abweichung dieses Punktes von der Mitte des Gesichtsfeldes nicht zu gross, so kann sie durch Verschiebung der Schiene D auf Null gebracht werden; alsdann liefert die Einstellung der beiden Axenbilder, durch Drehen der Nonienscheibe, sogar eine approximative Messung des optischen Axenwinkels, trotz der Schiefe der Platte zur Mittellinie.

Literatur:

W. G. Adams, Proceed. Phys. Soc. 1, 152; Phil. Magaz. 1875, 50 und 1879 [5] 8, 275. S. auch Zeitschr. f. Kryst. 5, 381.
E. Schneider, Carl's Repert. f. Exper.-Physik. 15, 774 (1879).
F. Becke, Tschermak's min. u. petrogr. Mitth. 1879, 2, 430.

§. 122. **Grosser Axenwinkelapparat von Fuess.** Es wurde zuerst von Kirchhoff (Poggendorff's Ann. d. Phys. 1859, 108, 567) eine Methode angegeben, um die Winkel der optischen Axen für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien zu messen. Zu dem gleichen Zwecke construirte V. von Lang eine Combination des Spectralapparates mit dem Axenwinkelapparate (Zeitschr. f. Kryst. 2, 492) und R. Fuess den im Folgenden (mit Benutzung einer von Liebisch im Jahrb. f. Min., Geol. u. s. w. 1885 darüber veröffentlichten Notiz) beschriebenen »grossen Axenwinkelapparat«.

Auf der Platte *J* eines niedrigen Dreifusses (Fig. 604 in $\frac{1}{2}$ nat. Grösse) ruhen zwei Säulen *SS*, und auf diesen ein Nonienkreis mit drehbarem Limbus *f* (Ablesung auf 30″); beide Kreise sind ganz so construirt, wie bei den horizontalen Fuess'schen Goniometern (s. S. 560), und mit ihnen auch in ähnlicher Weise Krystallträgeraxe, sowie Centrir- und Justirvorrichtung verbunden, nur mit dem Unterschiede, dass die zur Drehung der ersteren nöthigen Scheiben über und die Centrir- und Justirvorrichtung unter dem Kreise sich befinden. In der am Nonienkreise befestigten Büchse *e* geht die Kreisaxe, welche mittelst des Knopfes *i* gedreht, sowie auch durch *β* geklemmt und durch *γ* feingestellt werden kann. Die innerste Axe *s*, an welcher unten die Centrir- und Justirvorrichtung hängt, wird durch die Schraubenmutter *k* genau in derselben Weise, wie bei den Goniometern, gehoben und gesenkt und kann ebenso mit dem Schlüssel *p* geklemmt werden. An der Centrir- und Justirvorrichtung, welche vollkommen identisch mit derjenigen der Goniometer ist, wird an Stelle des Tischchens der pincettenartige Krystallträger *α* mittelst der Schraube *v* befestigt. Dieser gestattet durch die im oberen Theile desselben angebrachte Schleife eine Drehung der von einer gabelförmigen Feder festgehaltenen Platte um einen gewissen Winkel in ihrer Ebene, wodurch die Horizontalstellung der Axenebene erleichtert wird; die genaue Justirung der Platte erfolgt dann mittelst der Cylinderschlitten *t*. Mit dem Triebkopf *n* hebt oder senkt man den Cylinder *H*, in welchem der Fuss des Oelgefässes oder des Erhitzungskastens bei der Messung der optischen Axen in Oel oder in Luft von höherer Temperatur mittelst der Schraube *h* befestigt wird.

Die Lichtstrahlen passiren zuerst einen in *P* befindlichen Nicol, alsdann den in *b* angebrachten und durch die Schraube *c* verstellbaren, geradlinigen Spalt, und fallen, aus dem Objectiv des durchbrochen gezeichneten Collimators *C* parallel austretend, auf ein Flintglasprisma *B* auf, durch welches ein Spectrum erzeugt wird. Collimator und Prisma sind derart mit dem Tubus *D* verbunden, dass sie durch die Mikrometerschraube *T*, eine sogenannte Schraube ohne Ende, um eine verticale Axe gedreht werden können, um das Spectrum durch das Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohrs *F* zu führen, resp. eine bestimmte Lichtregion oder Fraunhofer'sche Linie in die Mitte des Gesichtsfeldes zu bringen. Der Tubus *D* kann ausserdem durch den Triebknopf *d* in der Richtung seiner Axe verschoben

werden. Dem Fernrohre *D* sind zwei Oculare beigegeben, um mehr oder weniger stark convergentes Licht erzeugen zu können; diesen Ocularen entsprechen auch zwei verschiedene Beobachtungsfernrohre *F*. Auf letztere wird das drehbare Rohr *A* mit dem Analysator aufgesetzt.

Der vorstehend beschriebene Apparat muss vor seinem Gebrauche mit Hülfe der Beobachtung im Sonnenlichte für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien justirt, d. h. die Ablesungen der Mikrometertrommel *T* bestimmt

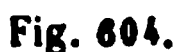


Fig. 604.



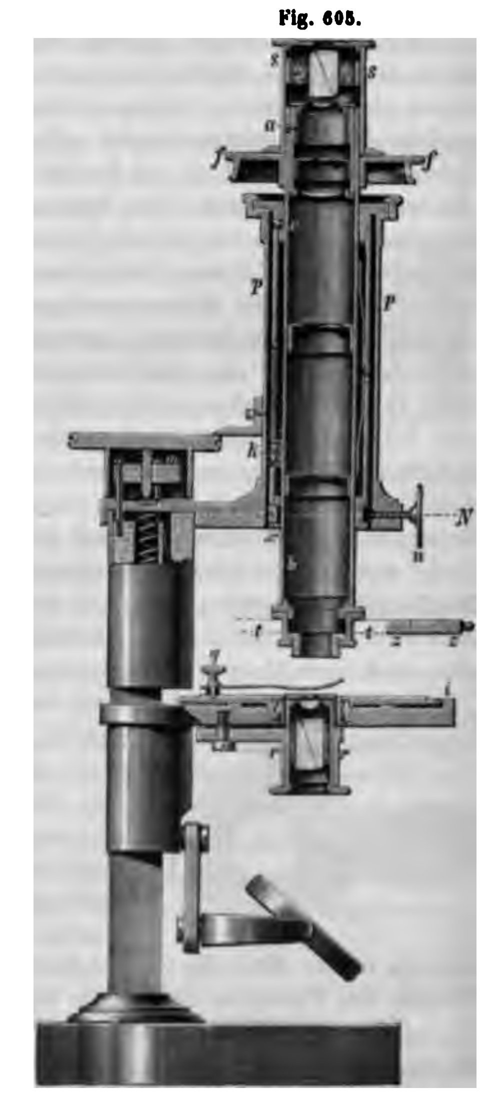
werden, bei welchen die einzelnen Linien sich in der Mitte des Gesichtsfeldes befinden. Ist dies einmal geschehen, so kann man sich bei der Messung der Axenwinkel einer weissen Gas- oder Petroleumflamme zur Beleuchtung bedienen. Man stellt *T* so ein, dass der einer bestimmten Fraunhofer'schen Linie, für welche die Messung ausgeführt werden soll, entsprechende Theil des Spectrums in die Axe des Beobachtungsfernrohrs

fällt, orientirt die beiden Nicols gekreuzt und unter 45° gegen Kreis-axe und führt einmal die eine, dann die andere Hyperbel der j[illegible] Krystallplatte in die Mitte des Gesichtsfeldes. Die Differenz der bei Positionen ist gleich dem Axenwinkel für die in der Mitte des Ge[illegible] feldes erscheinende Farbe, d. h. für die betreffende Fraunhofer'sche I[illegible] Zur Justirung der Krystallplatte oder zur Messung des Winkels z[illegible] ihrer Normale und einer optischen Axe kann man, wie S. 632 andergesetzt worden ist, durch Einfügung einer schräg gestellten glasplatte an Stelle des Nicols das Fadenkreuzbild des Beobachtu[illegible] rohrs *F* von der Platte reflectiren lassen. Noch bequemer ist für d[illegible] Zweck der dem Apparate beigegebene, auf einer besondern Säule *R* befestigte Collimator *E*, welcher ein Fadenkreuzsignal enthält, dessen an Platte reflectirtes und im Beobachtungsfernrohr gesehenes Spieg[illegible] zur Einstellung benutzt.

C. Mikroskope und mikroskopische Messapparate.

§. 123. **Mikroskope zu krystallographischen Untersuchungen.** Die Haupterfordernisse eines zu krystallographischen Untersuchungen brauchbaren Mikroskops sind: ein drehbarer Objecttisch, dessen Drehung an einer Theilung abgelesen werden kann, und zwei davon unabhängige, in gekreuzte Stellung zu bringende Polarisatoren behufs der Prüfung der Krystalle im polarisirten Lichte. Im Folgenden soll nun zuerst das weitverbreitete und zu allen, gewöhnlich vorkommenden, mikromineralogischen Arbeiten ausreichende Mikroskop von R. Fuess (s. auch Rosenbusch, Jahrb. f. Min., Geol. u. s. w. 1876, 504) beschrieben werden, welches in Fig. 605, grösstentheils im Durchschnitt, in ⅘ nat. Grösse abgebildet ist.

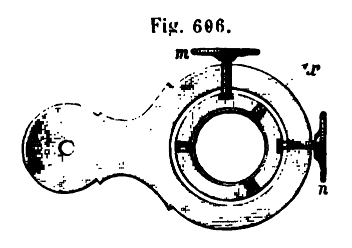
Fig. 605.



Das Stativ des Instrumentes besteht aus einer hufeisenförmigen Fussplatte und einem dreiseitigen Stahlprisma, an welchem zwei Träger sitzen, deren unterer sowohl den drehbaren Spiegel, als den Objecttisch und das fest mit letzterem verbundene Rohr *r* trägt. In dieses wird von unten das Polarisatorrohr, das oben durch eine Linse geschlossen ist, eingeschoben und so gedreht, dass der Nullpunkt der auf demselben angebrachten Theilung mit einer auf *r* befindlichen Marke coincidirt; bei dieser Orientirung fällt der Hauptschnitt des

darin befindlichen Prazmowski'schen Prisma (durch gerade Endflächen von den gewöhnlichen Nicols verschieden) in die Zeichnungsebene der Fig. 605. Ueber der festen Trägerplatte, an deren Unterseite *r* angeschraubt ist, befindet sich eine um die senkrechte Axe des Instrumentes drehbare Platte, der eigentliche Objecttisch *T*, dessen gekerbter Rand ringsum frei vorragt, so dass er leicht mit den Fingern gedreht werden kann; nur in der Ebene der Zeichnung greift die feste Platte nach vorn über mit einem Fortsatz, auf dessen Oberfläche eine Marke zur Ablesung der auf der drehbaren Scheibe *T* befindlichen Theilung angebracht ist. Mittelst der durch *q* angeschraubten Federn kann man das untersuchte Präparat auf dem drehbaren Tische festhalten. Der obere Träger, an dessen Arm der Tubus des Mikroskops befestigt ist, kann durch eine Feinstellschraube auf und nieder bewegt werden. Auf dem Stahlprisma des Stativs sitzen drei dünne Pfeiler (von denen zwei in der Figur sichtbar sind), die durch den Tubusarm hindurchgehen und die stählerne Mutter *m* tragen, welche die Mikrometerschraube aufnimmt. Die Scheibe, mittelst deren die letztere gedreht wird, ist am Rande in 500 Theile getheilt; da einer ganzen Umdrehung der Scheibe eine Hebung oder Senkung des Tubus von 0,5 mm entspricht, so kann man behufs Anwendung der Methode des Herzogs von Chaulnes (s. S. 33) eine Verticalverschiebung des Mikroskops auf 0,001 mm genau messen. Die Mikrometerschraube steht mit ihrem gehärteten Ende auf einer in den Tubusarm eingesetzten Stahl- oder Achatplatte; ihr todter Gang wird durch eine im Stahlprisma befindliche und von unten gegen den Tubusarm wirkende Spiralfeder aufgehoben. Die grobe Einstellung des Mikroskopes erfolgt durch einfache verticale Verschiebung des Tubus *b*, welchen man dabei an dem Rande *f* fasst, in der ihn umgebenden Hülse *p*. Letztere ist doppelwandig und so construirt, dass das innere der beiden Rohre, aus denen sie besteht, und welche nur oben mit einander verbunden sind, um zwei zu einander senkrechte horizontale Axen um einen kleinen Winkel gedreht werden kann, und zwar mittelst der Schrauben *n*, von denen eine in der Figur sichtbar ist. Dieselben greifen, wie aus dem horizontalen, der punktirten Linie *N* entsprechenden Durchschnitte Fig. 606 hervorgeht, nach zwei zu einander senkrechten Richtungen in den untersten Theil der inneren Hülse *p* ein, und man kann daher mit Hülfe derselben den Mikroskoptubus, dessen horizontalen Querschnitt der innerste Doppelring in Fig. 606 darstellt, so centriren, dass seine Axe in ihrer Verlängerung nach unten genau den Drehungspunkt des Objecttisches *T* trifft, und daher ein in die Mitte des Gesichtsfeldes gebrachter Punkt des Objectes beim Drehen des Tisches seinen Ort im Gesichtsfelde bewahrt. Wie S. 551 auseinandergesetzt wurde, ist die Erfüllung dieser Bedingung nothwendig zur Messung ebener Winkel unter dem Mikroskope.

Fig. 606.



Dem Instrumente werden die **Hartnack**'schen Objective 4, 7 und 9 beigegeben, von welchen das erste, je nach dem Ocular eine 90—200-fache Vergrösserung liefernd, am häufigsten gebraucht wird (eine noch schwächere Vergrösserung und noch grösseren Abstand vom Objecte erhält man, wenn man die untersten Linsen dieses Objectivsystems abschraubt). Das Objectiv, in Fig. 605 nicht mit abgebildet, wird auf das untere Ende des Tubus *b* aufgeschraubt. Ueber demselben kann man durch einen auf beiden Seiten des Rohres angebrachten Schlitz in der Ebene *tt* den Schieber *z* mit einer sogenannten **Biot**'schen Quarzplatte, von C. **Klein** zu diesem Zwecke empfohlen, einführen, um an den Objecten (durch Aenderung der empfindlichen Farbe der Quarzplatte) eine schwache Doppelbrechung und die Lage der Schwingungsrichtungen in den untersuchten Krystallen zu erkennen. In die obere Oeffnung des Tubus *b* wird das Ocularrohr (deren drei beigegeben sind) eingesetzt, dessen Construction aus dem Durchschnitt Fig. 605 und aus der Ansicht Fig. 607 ersichtlich ist: unten befindet sich eine feste Linse, über dieser das Fadenkreuz oder ein Glasmikrometer und zu oberst eine zweite Linse, deren Abstand durch Verschiebung des Rohres *A* geändert und hierdurch auf das Fadenkreuz scharf eingestellt werden kann. Das vorspringende Schräubchen *a* des Ocularrohres passt in einen senkrechten Schlitz des Tubus *b*, so dass dem Fadenkreuze hierdurch immer eine bestimmte Stellung gewahrt ist, nämlich diejenige parallel den Hauptschnitten der beiden Polarisatoren, sobald letztere so gedreht sind, dass die Nullpunkte ihrer Theilungen mit den Marken der festen Rohre coincidiren *). Auf das Ocular kann schliesslich das Rohr *s* mit dem Analysator aufgesetzt werden, welches mit einer Kreistheilung auf der mit dem Tubus fest verbundenen und eine Marke tragenden Platte *f* schleift. Fällt der Nullpunkt der Theilung mit der Marke zusammen, und ebenso derjenige am Polarisator, so sind beide Nicols gekreuzt, und es findet zugleich die soeben erwähnte Coincidenz ihrer Hauptschnitte mit den Linien des Fadenkreuzes statt.

Fig. 607.



Das vorstehend beschriebene Mikroskop kann zur Ausführung folgender Arbeiten dienen:

1) Zur **Messung ebener Winkel** nach dem S. 551 auseinandergesetzten Verfahren, wobei man sich nicht auf mikroskopische Krystalle und Krystalldurchschnitte zu beschränken braucht, da es zuweilen auch bei Untersuchung grösserer Krystalle nothwendig wird, einen ebenen Winkel an denselben zu bestimmen, wozu man sich natürlich, um eine möglichst lange Kante im Gesichtsfelde zu haben, der schwächsten Vergrösserung

---

*) Diese Orientirung der Hauptschnitte der Kalkspathprismen erleidet mit der Zeit kleine Aenderungen, wahrscheinlich durch Contractionen der Korkfassungen, und muss daher von Zeit zu Zeit durch Bestimmung der Schwingungsrichtung einer Krystallplatte z. B. eines rhombischen Krystalls von prismatischer Ausbildung) geprüft werden.

bedient. Bei derartigen Messungen sind die Nicol'schen Prismen unnöthig; es ist also wenigstens der obere, welcher das Gesichtsfeld einschränkt, zu entfernen.

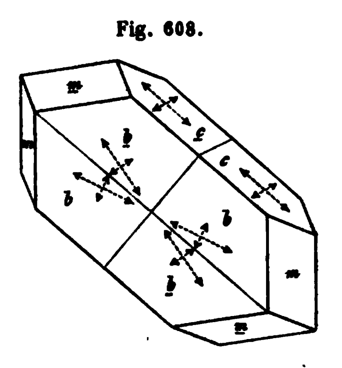
2) Zur Erkennung des Pleochroismus nach der Methode von Tschermak (s. S. 153), bei welcher man eines Nicols bedarf, daher am besten der Polarisator in seinem Rohre r belassen und das Präparat mit dem Objecttische gedreht wird.

3) Zur Prüfung der Krystalle auf Doppelbrechung: Das Instrument wird mit beiden Polarisatoren ausgerüstet und diese gekreuzt, darauf der Objecttisch mit dem Präparate gedreht und beobachtet, ob der zu untersuchende Krystall abwechselnd hell und dunkel wird (vergl. S. 72—74 und 105). Dieser Wechsel der Intensität kann in Folge schwacher Doppelbrechung ein sehr geringer sein; alsdann bedient man sich der erwähnten empfindlichen Quarzplatte oder einer ebensolchen Gypslamelle (vergl. auch S. 618). Es giebt indess einige Fälle, in denen trotz starker Doppelbrechung ein Wechsel zwischen Hell und Dunkel beim Drehen des Präparates zwischen gekreuzten Nicols nicht eintritt. Die erste dieser, bei mikroskopischen Untersuchungen nicht allzu selten eintretenden Ausnahmen liegt dann vor, wenn der zu untersuchende Durchschnitt eines zweiaxigen Krystalls ungefähr senkrecht zu einer optischen Axe liegt, in welchem Falle das Präparat beim Drehen gleichmässig hell, resp. farbig, bleibt (über die Ursachen dieser Erscheinung s. E. Kalkowsky, Zeitschr. f. Krystallogr. 9, 486); um sich zu überzeugen, dass in der That hierbei der Austritt einer optischen Axe erfolgt, hat man die weiterhin erwähnte Untersuchung im convergenten Lichte auszuführen. Ausserdem kann aber das Ausbleiben der Dunkelstellungen auch dadurch verursacht sein, dass der untersuchte Krystall ein Zwilling ist, bestehend aus zwei übereinanderliegenden Hälften, deren Schwingungsrichtungen ungleich orientirt sind; alsdann wird nämlich die Auslöschung des polarisirten Lichtes, welche einer der beiden Krystalle in bestimmten Lagen bewirken würde, durch den andern wieder aufgehoben. Im letzteren Falle hat man den Krystall in anderer Richtung oder anders orientirte Durchschnitte auf das Vorhandensein von Zwillingsbildung zu prüfen, welche sich durch die Verschiedenheit der Dunkelstellung documentirt, sobald die beiden Zwillingspartien nicht übereinander liegen, sondern neben einander sichtbar sind.

4) In allen anderen Fällen kann man aus der Richtung des Krystalls in einer seiner Dunkelstellungen die Orientirung seiner Schwingungsrichtungen feststellen (vergl. S. 105), indem man eine Krystallkante mit einem Faden zur Coincidenz bringt, die entsprechende Stellung am drehbaren Objecttisch abliest, dann letzteren dreht, bis die Dunkelstellung des Krystalls eintritt, und wiederum abliest. Diese Messung liefert zwar kein so genaues Resultat, wie die mit dem verbesserten Stauroskope (§. 118), sie kann aber doch mit einer in vielen Fällen genügenden Schärfe ausgeführt werden, wenn man das Mikroskop mit monochromatischem Lichte

beleuchtet und die Dunkelstellung auf folgende Weise bestimmt: nachdem man die zur Ausgangsrichtung genommene Krystallkante auf einen Faden eingestellt (vergl. S. 551) und abgelesen hat, dreht man den Objecttisch, bis das Maximum der Dunkelheit des Krystalls eintritt, durch diese hindurch und rückwärts, bis wieder das Maximum der Auslöschung erscheint, liest beide Stellungen ab und nimmt das Mittel; solcher Doppeleinstellungen führt man eine Reihe aus und benutzt deren arithmetisches Mittel als wahrscheinlichsten Werth der Dunkelstellung; schliesslich stellt man noch einmal die Krystallkante auf den Faden ein, um sich zu überzeugen, dass das Präparat während der Operation keine Verschiebung erlitten hat. Diese einfachste Methode zur Bestimmung der Schwingungsrichtung, welche das vollkommene Analogon der S. 580—581 beschriebenen Methode der Schimmermessung bildet, ist auch bei makroskopischen Krystallen (natürlich unter Benutzung einer schwachen Vergrösserung, damit man möglichst den ganzen Krystall im Gesichtsfelde erblickt) anzuwenden, wenn von denselben keine genügend grossen, orientirten Platten zur stauroskopischen Untersuchung herzustellen sind und wenn es sich nicht um Erreichung höchster Genauigkeit handelt. Besonders vortheilhaft ist dieselbe bei Zwillingen, deren Schwingungsrichtungen gegen die Zwillingsebene geneigt sind. Untersucht man z. B. eine regelmässige Verwachsung von ähnlicher Form, wie sie die Fig. 523 (S. 504) des Gyps darstellt, durch die Symmetrieebene *b* gesehen, so müssen die Auslöschungsrichtungen der beiden Zwillingshälften gegen die der Verticalaxe parallele Zwillingsebene entgegengesetzt geneigt sein, die eine Hälfte also hell erscheinen, wenn die andere dunkel ist, und umgekehrt. Diese Beobachtung bildet zugleich das gewöhnlichste Mittel zur E r k e n n u n g v o n Z w i l l i n g e n, besonders dann, wenn zwei Krystalle derart durch einander gewachsen sind, dass sie einem einfachen gleichen, wie z. B. der in Fig. 608 dargestellte Durchkreuzungszwilling des monosymmetrisch krystallisirten D e s m i n, an welchem *b* die Symmetrieebene {010}, *c* die Zwillingsebene {001}, $m = \{110\}$; während die durch gestrichelte Linien angedeuteten Schwingungsrichtungen auf der Querfläche *c* in beiden Krystallen parallel sind, also durch diese Fläche die Zwillingsbildung optisch sich nicht erkennen lässt, erscheinen, durch die Symmetrieebene gesehen, die Theile *b* in anderer Stellung dunkel, als die Theile *b̲*. Da die Schwingungsrichtungen beider Krystalle in Bezug auf die Zwillingsebene symmetrisch sein müssen, so bilden die einander entsprechenden Schwingungsrichtungen den doppelten Winkel mit einander, als jede einzelne mit der Zwillingsebene. Stellt man also einmal die eine, das andere Mal die andere Hälfte eines derartigen symmetrischen Zwillings nach der oben

Fig. 608.



angegebenen Methode auf das Maximum der Dunkelheit ein, so ist die Hälfte des abgelesenen Drehungswinkels derjenige, welchen die eingestellte Schwingungsrichtung mit der Zwillingsebene bildet. Da hierbei der Fehler. welchen man bei der Einstellung auf eine Kante begeht, ganz wegfällt, und derjenige bei der Einstellung auf die Auslöschung halbirt wird, so ist diese Methode genauer, als dieselbe, auf einen einfachen Krystall angewendet, und es wurde daher vor Entdeckung des Stauroskops von Sénarmont vorgeschlagen, aus Krystallen, deren Schwingungsrichtungen man bestimmen will, künstliche Zwillinge herzustellen und diese in der angegebenen Weise zu untersuchen. Endlich kann man mit dem Mikroskope auch die Stauroskop-Methode zur Bestimmung der Vibrationsrichtungen eines Krystalls anwenden, indem man eine beigegebene, senkrecht zur Axe geschliffene Kalkspathplatte auf das Ocular legt und darauf den Polarisator wieder aufsetzt; man erblickt alsdann zugleich mit dem Krystall, welcher den mittleren Theil des Gesichtsfeldes ausfüllen muss, das schwarze Interferenzkreuz, und zwar nur dann ungestört, wenn die Schwingungsrichtungen des Krystalls mit denen der Nicols zusammenfallen.

5) In neuerer Zeit ist die Anwendung des mit zwei gekreuzten Nicols versehenen Mikroskops sehr wesentlich erweitert worden durch die Erkennung der Möglichkeit, dasselbe als Polarisationsinstrument zur Untersuchung sehr kleiner Krystalle oder Krystallschnitte im convergenten polarisirten Lichte zu benutzen*). Zu diesem Zwecke legt man, wie es in Fig. 605 dargestellt ist, auf die den oberen Theil des Polarisatorrohres abschliessende Linse noch eine zweite kleinere, dem Instrumente beigegebene, welche die auf das Präparat fallenden Lichtstrahlen noch stärker convergent macht; dem entsprechend wendet man als Objectiv auch eines der stärkeren, wenigstens No. 7, an und stellt mit diesem den zu untersuchenden Krystall genau in die Mitte des Gesichtsfeldes. Um nun nicht das eingestellte Object, sondern durch dasselbe hindurch das von ihm hervorgebrachte Interferenzbild zu sehen, entfernt man jetzt das Ocularrohr aus dem Tubus *b* und setzt dann den Analysator wieder auf. Liegt der eingestellte Krystall so, dass die einer optischen Axe entsprechenden Strahlen noch in das Gesichtsfeld fallen, so erscheint in der kleinen hellen Oeffnung, welche man jetzt im Mikroskop erblickt, die dunkle Hyperbel (resp. bei einaxigen Krystallen das schwarze Kreuz) und gewöhnlich auch ein oder mehrere Farbenringe**). Dieses Interferenzbild, welches man besonders gut sieht, wenn man das Auge etwas über den Analysator

*) Vergl. E. Bertrand, Compt. rend. 85, 1175, Dec. 1877; Bull. d. l. soc. min. d. Fr. 1878 1, 22 und 96, sowie Zeitschr. f. Kryst. 3, 644; A. von Lasaulx, Jahrb. f. Min. 1878, 377 und Zeitschr. f. Kryst. 2, 256, 3, 661, C. Klein, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1878, 461; H. Laspeyres, Zeitschr. f. Kryst. 4, 441, 460.

**) Eine Reihe derartiger Interferenzerscheinungen findet man abgebildet und erläutert in der für Studirende der Petrographie empfehlenswerthen: »Anleitung zum Bestimmen der gesteinbildenden Mineralien« von E. Hussak, Leipzig 1885«.

erhebt, kann man (nach einem Vorschlag von Bertrand) noch vergrössern durch Einsetzen eines dem Mikroskope beigegebenen, mit einer Linse versehenen Tubus in das Rohr *b*. In diesem Verfahren besitzt man somit ein wichtiges Hülfsmittel zur Erkennung der Orientirung eines Krystalls (vergl. S. 552), weil man mit demselben selbst mikroskopisch kleine und sehr dünne Krystallschnitte auf ihre optischen Eigenschaften prüfen kann. Wie bei dem gewöhnlichen Polarisationsinstrumente, kann man natürlich auch hier mit einer Viertelundulations-Glimmerplatte oder einem Quarzkeile den Charakter der Doppelbrechung bestimmen (s. §. 27).

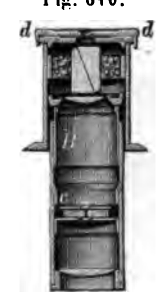
Fig. 609.



Ausser dem S. 647—649 beschriebenen Mikroskope liefert Fuess noch ein grösseres Modell (S. Dessen Preisverz.), welches Fig. 609 in $\frac{2}{3}$ nat. Grösse darstellt. Das Stativ dieses Instrumentes stimmt im Wesentlichen mit dem des vorigen überein, nur wird die grobe Einstellung hier nicht durch verticale Verschiebung des Tubus, sondern durch eine solche des unteren Trägers mittelst des, einen Zahntrieb bewegenden Knopfes *e* bewirkt. Ebenso kann das Rohr, welches den Polarisator enthält, durch den Knopf *t* auf- und niederbewegt und dadurch dem Object genähert oder von ihm entfernt werden. Der wesentlichste Unterschied von der Construction des kleinen Modells besteht aber darin, dass hier nicht der Tubus des Mikroskops in Bezug auf den drehbaren Objecttisch centrirt wird, sondern umgekehrt der letztere, *C*, durch zwei auf einander senkrechte Schlittenbewegungen mit den Schrauben *m* und *n* so weit verschoben werden kann,

bis sich das Drehungscentrum genau in der Mitte des Gesichtsfeldes befindet. Die Schraube *m* dient hierbei zugleich als Mikrometer und ist zu diesem Zwecke mit einer Trommel versehen, deren Theilstriche je einer Verschiebung des Objecttisches und des darauf befindlichen Präparates um 0,002 mm entsprechen. Der über *n* befindliche feste Nonius gestattet, eine Drehung des Objecttisches *C* auf 5′ abzulesen. An dem oberen, mit Feinstellschraube versehenen Träger, welcher genau so construirt ist, wie bei den zuerst beschriebenen Instrumenten, ist der Mikroskoptubus befestigt, mit welchem vier verschiedene Objective (Hartnack No. 3, 5, 7, 9), um sie schnell vertauschen zu können, durch eine sogen. Revolvervorrichtung verbunden sind. Dem Instrumente werden vier Oculare, von derselben Construction wie Fig. 607, beigegeben, deren eines speciell zu stauroskopischen Bestimmungen dient. Das letztere, in Fig. 610 im Durchschnitt abgebildet, enthält an Stelle des Fadenkreuzes die Calderon'sche Doppelplatte (s. S. 618); das kleine Gesichtsfeld, begrenzt durch das dicht über der Doppelplatte befindliche enge Diaphragma *c*, wird durch die Schnittlinie der Stauroskopplatte in zwei gleiche Hälften zerlegt, deren Trennungsebene mit dem Hauptschnitte des Polarisators zusammenfällt, wenn der Nullpunkt der Theilung des letzteren mit der Marke des Rohres *p* coincidirt. Da die Schnittlinie im Gesichtsfelde wie ein feiner Faden erscheint, so ist man im Stande, selbst einen sehr kleinen Krystall damit zu bisectiren und durch Einstellung der gleichen Auslöschung in beiden Hälften eine sehr scharfe Bestimmung seiner Schwingungsrichtungen vorzunehmen. Damit der Beobachter dabei genau in der Axe des Instrumentes hindurch blickt, wird auf das Ocular die mit kleiner Oeffnung versehene Kappe *d* aufgelegt. Die Vorrichtungen zur Erzeugung convergenten Lichtes und Beobachtung der Interferenzbilder, sowie zur Erkennung schwacher Doppelbrechung, sind bei dem grossen Fuess'schen Mikroskope dieselben, wie bei dem vorher beschriebenen kleineren Modell.

Fig. 610.

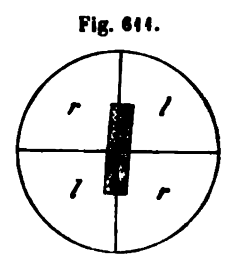


E. Bertrand, dem wir ganz besonders die Erweiterung der Anwendbarkeit des Mikroskopes auf die Beobachtung der optischen Erscheinungen im convergenten Lichte verdanken, ermöglichte die letztere durch eine Construction, welche es unnöthig macht, jedesmal zur Beobachtung der Interferenzfigur eines eingestellten Krystalles den Analysator abheben, das Ocularrohr herausziehen und dann den Analysator wieder aufsetzen zu müssen. Derselbe zeigte nämlich, dass es genügt, über dem Objectiv des Mikroskops (ohne sonst an letzterem Etwas zu ändern, als dass man das aus dem Polarisator austretende Licht durch die beiden in Figur 605 dargestellten Linsen convergent macht) eine achromatische Linse von 3—4 cm Brennweite einzufügen, um statt des eingestellten Krystalls die von demselben erzeugte Interferenzfigur zu sehen. Nach diesem, offenbar ein rascheres und bequemeres Arbeiten ermöglichenden Principe construirte Bertrand

ein Mikroskop, mit welchem die erwähnte Linse, in einem Schieber befestigt, derart verbunden ist, dass dieselbe in jedem erforderlichen Augenblicke während der Beobachtung am Instrumente eingeschoben und alsdann durch eine Schraube vertical verstellt werden kann; letzteres ist zur Hervorbringung eines guten Interferenzbildes nothwendig, da die scharfe Einstellung desselben mit dem jedesmal benutzten Objective variirt. Das einfache Herausschieben der Linse genügt, um das Mikroskop wieder in ein gewöhnliches, d. h. ein zur Beobachtung im parallelen Lichte eingerichtetes, Instrument zu verwandeln. Das Bertrand'sche Mikroskop (s. Bulletin d. l. soc. minéralog. de France 1880, 3, 98) unterscheidet sich von dem in Fig. 609 abgebildeten Instrumente zunächst dadurch, dass der Drehungspunkt des Objecttisches nicht centrirbar ist, sondern sich auf dem letzteren zwei Schlitten zur Verschiebung des Objectes nach zwei zu einander senkrechten Richtungen befinden, welche eine rasche und bequeme Einstellung der zu untersuchenden Stelle in die Mitte des Gesichtsfeldes gestatten und welche auch als Mikrometer gebraucht werden können; die Drehung des Tisches kann frei oder, nach Klemmung desselben, durch eine Feinstellschraube erfolgen. Da bei dieser Construction eine Centrirung seines Drehungspunktes in Bezug auf die Axe des Objectivsystems nicht möglich ist, muss das letztere, ähnlich wie bei den Fuess'schen Mikroskopen Fig. 605, in Bezug auf den Objecttisch centrirt werden; es geschieht dies hier durch zwei Schrauben, welche das Objectiv allein in zwei zu einander und zur Axe des Mikroskops senkrechten Richtungen verschieben. Weitere Unterschiede bestehen darin, dass die grobe Bewegung am Tubus stattfindet, und dass das Stativ des Instrumentes bis zur Beobachtung in horizontaler Richtung umgelegt werden kann. Ferner gehört zu demselben eine kleine, auf den Objecttisch aufzusetzende Vorrichtung zur Messung des optischen Axenwinkels, welche gestattet, diese Messung auch in Oel auszuführen. Die Objective sind nicht in der Weise vereinigt, wie es in Fig. 609 dargestellt ist, können aber durch eine am Tubus angebrachte federnde Vorrichtung sehr rasch vertauscht werden. Derartige, nach Bertrand's Angaben construirte Mikroskope werden von Dagincourt, sowie von Hartnack und Prazmowski in Paris geliefert.

Für stauroskopische Zwecke hat Bertrand (Zeitschr. f. Kryst. 1, 69 ein Ocular empfohlen, in welchem sich an Stelle des Fadenkreuzes eine aus vier Theilen, zwei rechtsdrehenden *r r* und zwei linksdrehenden *l l*, zusammengesetzte Quarzplatte befindet, deren Trennungsflächen als feine Linien erscheinen (s. Fig. 611) und den Hauptschnitten der Nicols parallel gestellt werden. Ein in die Mitte gebrachter Krystall zeigt nun, wenn seine Schwingungsrichtungen nur um einen kleinen Winkel von denen der Nicol'schen Prismen abweichen, deutliche Farbenunterschiede in der Figur durch verschiedene Schraffirung bezeichnet); daher ist die

Fig. 611.



Einstellung auf Gleichheit in den vier Quadranten so empfindlich, dass ein derartiges Stauroskopocular von manchen Beobachtern dem Calderon'-schen vorgezogen wird, um so mehr als die Quarzplatten mit ihrer empfindlichen Farbe auch zur Erkennung schwacher Doppelbrechung dienen können (s. Schrauf, Zeitschr. f. Kryst. 8, 81).

Etwas von dem Bertrand'schen Mikroskope abweichend sind die vorzüglich gearbeiteten Instrumente von Nachet in Paris, deren Construction darauf beruht, dass das an einem besonderen Rohre *B* (Fig. 612) angebrachte Objectivsystem mit dem auf dem Objecttisch befindlichen Präparate zusammen gedreht werden kann, man dem letzteren also jede beliebige Stellung gegen die Nicolhauptschnitte geben kann, ohne dass eine Verschiebung desselben im Gesichtsfelde eintritt. Der Objecttisch kann frei gedreht oder durch die Schraube *E* fein geführt werden und trägt dieselbe Vorrichtung zur Verschiebung des Objectes in zwei Richtungen, wie der des Bertrand'schen Mikroskopes. Mit demselben ist die kürzere (linke) Säule, an welcher die Feinstellschraube angebracht ist, in fester Verbindung, so dass letztere mit dem daran befestigten Rohre *B* und dem Objecttische, ganz unabhängig von dem übrigen Instrumente, um dessen Axe gedreht werden kann. Dadurch wird die Vorrichtung zum Centriren des Objectives in Bezug auf den drehbaren Objecttisch unnöthig gemacht. Im Uebrigen besitzt das Mikroskop alle Einrichtungen des Bertrand'schen, nur wird der Analysator nicht auf das Ocular aufgesetzt, sondern in einem Charnier beweglich in den Tubus bei *A* eingeführt; dies hat den Vortheil, dass man während der Beobachtung, ohne das Auge vom Ocular zu entfernen, rasch gewöhnliches und polarisirtes Licht vertauschen kann (nur die Scharfstellung des Objectes erleidet dabei eine Aenderung und muss jedesmal corrigirt werden). Um auch

Fig. 612.



in dem durch gekreuzte Nicols verdunkelten Gesichtsfelde das Fadenkreuz zu sehen, kann dasselbe durch einen kleinen, an der Aussenseite des Tubus angebrachten Spiegel *M* beleuchtet werden. Dem Instrumente werden sechs verschiedene Objective beigegeben, deren schwächste eine, für manche Zwecke vortheilhafte, sehr grosse Focaldistanz besitzen.

Ein nach dem Bertrand'schen Principe construirtes Mikroskop mit allen, den bisher erwähnten Instrumenten beigegebenen Nebenapparaten, hat C. Klein neuerdings von Voigt und Hochgesang in Göttingen ausführen lassen und empfohlen (s. Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen, Nov. 1884).*)

Bei der im Bisherigen erwähnten Methode mikroskopischer Krystallmessung musste man sich beschränken auf die Bestimmung ebener Winkel, da einer eigentlich goniometrischen Untersuchung mikroskopischer Krystalle die Schwierigkeit, solche beliebig zu orientiren, entgegensteht. Nach einem Vorschlage von Bertrand kann man diese Orientirung entbehrlich machen — wenn man nur im Stande ist, den Krystall in beliebiger Weise an einem kleinen Glaswürfel zu befestigen, welcher alsdann mit dem Mikroskope in einer bestimmten Stellung verbunden wird — indem man nämlich die Winkel misst, welche die ideellen Durchschnittsrichtungen der Ebenen des Krystalls und des Glaswürfels mit den Kanten des letzteren bilden, und aus diesen die Krystallwinkel berechnet. Für die Messung jener Winkel hat Bertrand eine eigene Vorrichtung erfunden und seinen Mikroskopen beigegeben, aber bisher sind, ausser einigen zur Prüfung der Methode mit Krystallen von Quarz, Zinkblende und Kalkspath angestellten Experimenten des Autors, keine Untersuchungen mit dieser sehr umständlichen und schwierig anzuwendenden Methode gemacht worden (s. Zeitschr. f. Kryst. 3,642). Dasselbe gilt von der durch Thoulet (s. ebenda 4,222) vorgeschlagenen Methode, die verticalen und horizontalen Distanzen mehrerer Punkte auf den Krystallflächen unter dem Mikroskope zu bestimmen und daraus die Winkel zu berechnen, welche die Flächen mit einander einschliessen. Auf anderem Wege ist es neuerdings Brögger (Zeitschr. f. Kryst. 9,225 f.) gelungen, Messungen von mikroskopischen Krystallen zu erhalten, indem er die feste Verbindung eines Mikroskopes mit einem Goniometer, welche in dem S. 546 erwähnten Hirschwald'schen Mikroskopgoniometer vorliegt, benutzte, den Krystall durch ein zweites, horizontal gestelltes, schwaches Mikroskop beleuchtete und die Flächen der unter dem verticalen Mikroskope justirten

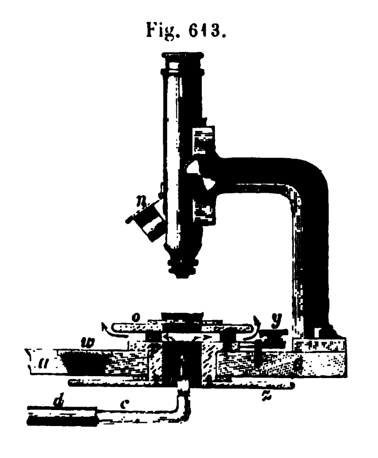
*) Ein noch vollständigeres, mit Benutzung aller bisheriger Erfahrungen construirtes Instrument wird nach gef. Privatmittheilung z. Z. von Fuess ausgeführt und demnächst von Liebisch beschrieben werden. Dasselbe enthält ausser den Nebenapparaten der bisher erwähnten Mikroskope noch mehrere neue, z. B. ein Ocularschraubenmikrometer zur Messung des Axenwinkels in den Interferenzbildern; einen der S. 625 erwähnten Polarisatoren, um selbst bei starken Vergrösserungen feinere stauroskopische Messungen ausführen zu können, ferner Spectralocular, Vorrichtung zur Erzeugung monochromatischen Lichtes nach Abbe u. a.

Zone auf Schimmer nach der S. 580—581 auseinandergesetzten Methode einstellte. Um dieses Verfahren auch in Ermangelung eines **Hirschwald**'-schen Instrumentes ausführen zu können, liess der Autor einen zu dem grossen **Fuess**'schen Mikroskope gehörigen kleinen Messkreis mit einer vereinfachten Centrir- und Justirvorrichtung versehen. Es ist zu erwarten, dass man auf dem hiermit betretenen Wege noch zu weiteren Fortschritten in der Messung mikroskopischer Krystalle gelangen werde.

§. 124. **Das Lehmann'sche Krystallisationsmikroskop.** Dieses Instrument dient dazu, die Vorgänge während der Bildung der Krystalle unter willkürlich geänderten Temperaturverhältnissen zu beobachten, und ist namentlich zu den Untersuchungen der Umwandlungen der verschiedenen Modificationen eines Körpers unentbehrlich (s. O. **Lehmann**, über physikalische Isomerie, Zeitschr. f. Kryst. 1,97; über das Wachsthum der Krystalle, ebenda 1,453, und zahlreiche Abhandlungen in den späteren Bänden derselben Zeitschrift. Ueber die neueste Construction des Apparates s. Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1884,369).

Das zu den Beobachtungen dienende Mikroskop ist auf einem eigenen, aus Eisen gefertigten Arbeitstisch angebracht, mit welchem alle erforderlichen Nebeneinrichtungen verbunden sind. Dieser Tisch ist in Fig 614 zur Hälfte (in der Mitte durchschnitten gedacht) abgebildet, nach Abnahme der durch punktirte Linien angedeuteten, viereckigen eisernen Object- und Mikroskop-Trägerplatte *aaaa*, welche durch vier an ihrer Unterseite befindliche Stifte auf die Schienen *b*, deren jede zu dem Zwecke mit zwei Löchern versehen ist, aufgepasst wird. Diese Eisenplatte, *aa* in Fig 613, trägt nun den Objecttisch *o*, welcher mit drei Füsschen in die Oberseite des Hohlcylinders *p* eingesetzt und mit diesem, sowie mit der daran befestigten getheilten kreisförmigen Scheibe *z* zusammen, durch die Handhabe *y* gedreht werden kann. Die Füsschen des Objecttisches passen in drei Löcher der Oberseite von *p* nur so weit hinein, dass zwischen *p* und *o* noch Raum zum Abzug der Verbrennungsgase der Heizflamme *x* übrig bleibt. Die Kreistheilung auf *z* wird durch eine in der Eisenplatte *a* angebrachte Oeffnung *w* abgelesen, welche mit einer als Lupe dienenden Linse geschlossen ist; wenn der Handgriff *y* an den in der Fig. 613 sichtbaren Stift anstösst, zeigt der Index der Theilung genau auf 0°; geht man also bei einer Winkelmessung von dieser Stellung aus, indem man durch Drehung des Oculars einen Faden mit einer Krystallkante zusammenfallen lässt und dann den Objecttisch dreht, bis eine zweite Kante mit demselben Faden zur Deckung gelangt, so giebt die Ablesung unmittelbar den Winkel zwischen

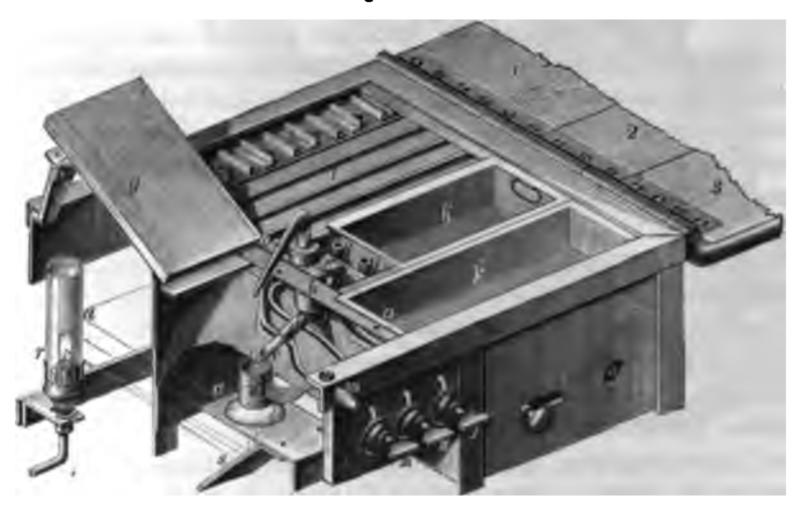
Fig. 613.



den beiden Krystallkanten an. Auf die vordere (dem Beobachter zugewendete) Seite der Platte *a* ist der sehr stabile, eiserne Mikroskopträger aufgeschraubt, an welchem der Tubus durch ein Trieb verstellt werden kann. Das Objectiv des Mikroskopes soll möglichst grosse Brennweite haben, um es den erhitzten Präparaten nicht allzusehr nähern zu müssen, daher man nur mit mässigen Vergrösserungen arbeitet. Die Fassung des Polarisators bildet ein kurzes Rohr *n*, welches (wie bei den Nachet'schen Mikroskopen S. 656) durch ein Charnier beweglich in den Tubus eingebracht oder aus demselben entfernt werden kann, ohne die Beobachtung zu unterbrechen. Der untere Nicol befindet sich in einem Rohre *u* (s. Fig. 644), welches an einem beweglichen Arme befestigt ist, dessen Ende als Griff *m* aus dem Tischgestell hervorragt; durch Verschieben dieses Griffes bis zu einer Arretirung wird der Nicol entweder in die richtige Stellung unter die Mitte des Objecttisches gebracht oder zur Seite geschoben. Zur Beleuchtung dient ein Argand'scher Gasbrenner *r*, dessen Licht durch einen Spiegel *s* nach oben reflectirt und durch eine Linse *t* concentrirt wird.

Um das zu untersuchende Präparat während der Beobachtung erwärmen zu können, dient das bereits erwähnte Flämmchen *x*; der Brenner *c* ist an einem drehbaren Arme *d* befestigt, welcher durch den Knopf *e* in Be-

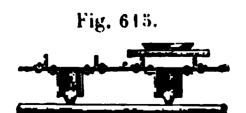
Fig. 644.



wegung gesetzt werden kann. Letzterer ragt durch einen Schlitz über die hölzerne Tischplatte (in Fig. 644 zur Seite geschlagen) hervor, und man kann mit Hülfe desselben, ohne die Beobachtung zu unterbrechen, das Flämmchen *x* nach Belieben entfernen und wieder unter das Präparat bringen, wobei die richtige Stellung, wie beim Einfügen des Nicolrohres *u*, durch eine Arretirung hervorgebracht wird. In das an der Unterseite der Schiene *b* befestigte Gelenk des Brenners münden zwei Röhren, wovon eine Luft, die andere Gas zuführt, deren Zutritt durch die Hähne I und II

an der Vorderseite des Tisches regulirt wird. Wenn man nur schw er-wärmen will, bringt man zweckmässig über dem Flämmchen eine Glas- oder Glimmerplatte an, welche mittelst eines Schiebers an *d* ist. Das abnehmbare Rohr *f*, durch welches ein mittelst des regulirbarer Luftstrom von oben auf die Mitte des Objecttisches geri werden kann, dient dazu, eine momentane Abkühlung des Präpa erzeugen. Das schräggestellte Bret *g* kann man dazu benutzen, die ein über dem Ocular angebrachtes geneigtes Deckgläschen auf die Fl *g* geworfenen Bilder zu zeichnen. Zu beiden Seiten des Mikroskops hält der Arbeitstisch Blechkästen *kk'*; einen derselben kann man zweck-mässig mit Wasser zum Abwaschen der Objectgläser füllen; die andern dienen zur Aufnahme von Reagentien, Glasplatten, Tropfgläschen, Pincet u. a. Utensilien. An der hinteren, dem Beobachter abgewendeten L seite des Tisches ist ein System von Vorwärmern *h* angebracht, deren zwei im Durchschnitt in Fig. 615 dargestellt sind; auf dieselben wird, wie es rechts abgebildete zeigt, das Objectglas aufgelegt, so dass man stets Reihe gleicher Präparate vorgewärmt zur Untersu bereit haben kann. Statt dieses Systems kann zu demselben Zwecke auch die Hitze der tungsflamme benutzen, indem man über die Aufsatz von Eisenblech mit kleinen Oeffnun n Auflegen der Präparate anbringt. Im eren T des Tischgestelles befindet sich einerseits ein Glockengasometer des Luftstromes für die Erhitzungsflamme und für das Rohr *f*, zum gleichen Zwecke ein Wassergebläse, welches zt Wasserleitung zur Verfügung steht, in welchem Falle n j auch noch in den Gasometer eintreten lässt, um den Dr Höhe zu erhalten.]

Fig. 615.



Für Beobachtungen in sehr hoher Temperatur lichen Objecttisch durch einen anderen, auf der Unte frei baren, ersetzen; vortheilhaft umgiebt man dann aber h mit einer Kühlvorrichtung. Bei den gewöhnlich vork suchungen für chemische Zwecke kommt man jedoch mit r be-schriebenen Einrichtung aus.

Der Lehmann'sche Apparat wird von dem Mechaniker F. Maier in Strassburg i. Els. Krämerg. 10) mit einem Nachet'schen Mikroskope, welches sich bei den vollkommen ausreichenden Vergrösserungen der Objective II und III durch grosse Focaldistanz auszeichnet, für den Preis von 150 M. geliefert.

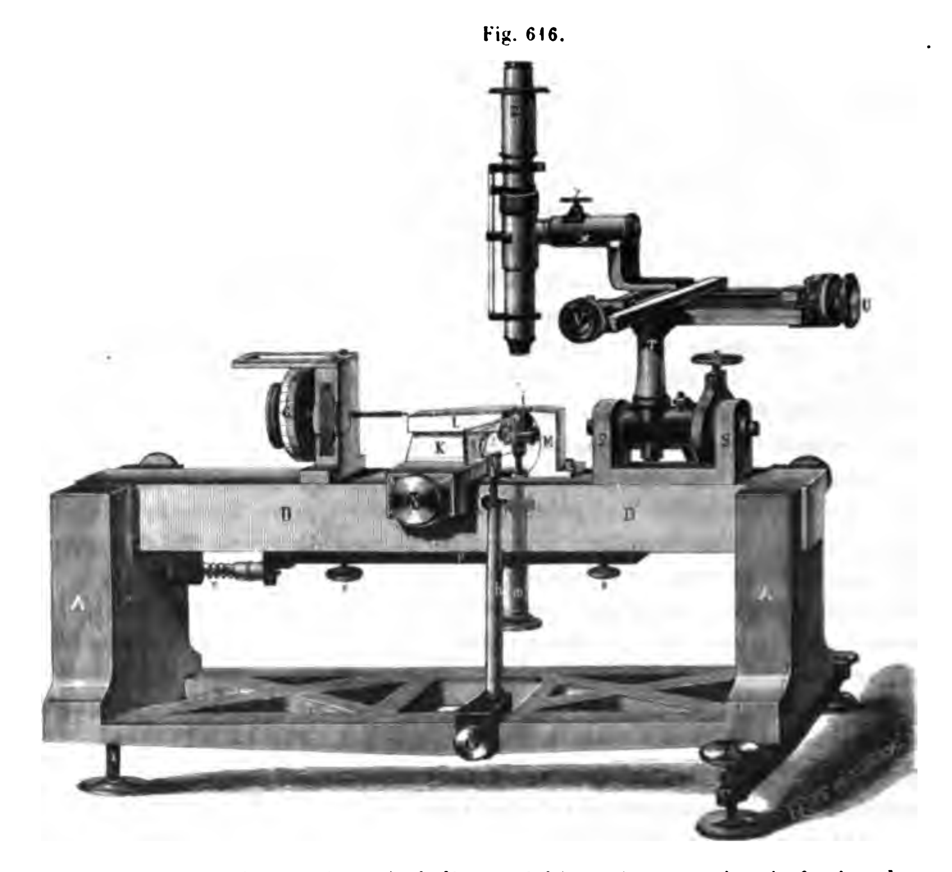
§. 125. **Apparat zur Bestimmung der Elasticitätscoëfficienten.** Der S. 12 seinem Principe nach erläuterte Apparat, welchen K. R. Koch*)

*) S. Wiedemann's Ann. d. Phys. 5, 251 und Ber. d. Verhandl. der naturforsch. Gesellsch. Freiburg i. B. 8, 2, auch Zeitschr. f. Kryst. 9, 206; ferner Beckenkamp, ebenda 10, 15.

zu seinen Bestimmungen der Elasticitätscoëfficienten regulärer Krystalle benutzte, soll im Folgenden in derjenigen Form beschrieben werden, in welcher er z. Z. von dem math.-mechan. Institute von F. W. **Breithaupt** u. Sohn in Kassel geliefert wird*) und, durch einige Einrichtungen vervollständigt, auch für mehrere andere mikrometrische Zwecke verwendet werden kann.

In einem sehr stabilen Stativ von lackirtem Eisen, *A* Fig. 616 ($^1/_4$ nat. Gr.), liegt ein gussstählerner prismatischer Stab *D*, welcher an der Hinterseite durch zwei Schrauben in dem auf drei verstellbaren Füssen *a* ruhen-

Fig. 616.



den Stative eingeklemmt ist. Auf dieser Schiene ist zunächst befestigt das stählerne Lager *M*, dessen Oberseite sanft nach links ansteigt, so dass eine an der Stelle *i* befindliche ebene Platte, deren Biegung bestimmt werden soll, nur auf einer Schneide, welche durch die linke Kante des Lagers gebildet wird, aufliegt. Die zweite Schneide stellt die rechte Kante des in ähnlicher Weise nach rechts ansteigenden Lagers *L* dar, welches jedoch nicht fest ist, sondern seinerseits auf einer, der Längsaxe der Schiene

*) Zum Preise von 600 Mk. ohne die in Fig. 618 dargestellte Belastungsvorrichtung, welche von jedem Mechaniker gefertigt und bei der Aufstellung des Apparates richtig befestigt werden kann.

parallelen scharfen Schneide reitet; hierdurch wird es bewirkt, dass eine auf die Lager aufgelegte Platte stets auf beiden in der ganzen Länge der Schneiden aufliegt, indem das drehbare Lager *L* durch das Gewicht der belasteten Platte bis zur vollständigen Berührung seiner Schneide mit jener gedreht wird. Das Lager *K* kann, nach Lösung der Schraube *N*, auf dem Stabe *D* verschoben, und dadurch der Abstand der beiden Schneiden zwischen den Grenzen 10 und 30 mm verändert werden. Zwischen den beiden Lagern befindet sich nun ein kleines, rechtwinkeliges, totalreflectirendes Glasprisma *i*, in welches die von einer zur Linken des Apparates aufgestellten Natronflamme*) kommenden Lichtstrahlen durch die auf dem Träger *h* befindliche schräggestellte Spiegelglasplatte geworfen und von dessen nach hinten ansteigender Hypotenusenfläche vertical nach oben reflectirt werden, so dass sie aus seiner horizontalen Kathetenfläche austreten. Mit Ausnahme der letzten Fläche und eines kreisförmigen Ausschnittes der nach vorn gekehrten Kathetenfläche, durch welche die Strahlen eintreten, ist das Prisma mit einer Metallfassung umgeben, welche auf einer, unten sphärisch geformten Platte befestigt ist, die ihrerseits mit einer zweiten von gleicher Gestalt durch drei Schräubchen in Verbindung steht, so dass man durch die letzteren eine Justirung des Prismas, d. h. die Parallelstellung der Oberseite mit der unteren Fläche der auf den Schneiden aufliegenden Platte, bewerkstelligen kann. Der Prismenträger geht durch einen Schlitz des Stabes *D* hindurch und kann mittelst einer Drehung des am untern Ende von *m* angebrachten Knopfes langsam gehoben oder gesenkt werden. Um denselben bei jedem Abstande der beiden Lager in die Mitte des Zwischenraumes derselben bringen zu können, ist er parallel der Längsrichtung der Schiene *D* verschiebbar durch Drehen der Schraube *n*, zu welchem Zwecke vorher die beiden Schräubchen *o* gelöst und nachher wieder angezogen werden; durch letztere Manipulation wird die Platte *P*, an welcher der Prismenträger befestigt ist, in ihrer Lage fixirt. Die Bestimmung des jedesmaligen Abstandes der Schneiden kann durch die Mikrometerschraube *G*, deren Ende mit dem verschiebbaren Lager *L* in Contact gebracht wird, sehr genau ausgeführt werden, noch bequemer und mit ausreichender Genauigkeit durch die Verschiebbarkeit des Mikroskopes *z*.

Auf der rechten Seite der Schiene *D* ist das hufeisenförmige Lager *SS* angebracht, in welchem eine horizontale Axe gedreht und durch die Schraube *s* fixirt werden kann; auf dieser Axe erhebt sich die Säule *T*, welche oben zwei zu einander senkrechte Schlitten trägt, die durch Mikrometerschrauben um 4 cm verschoben werden können. Die ganzen Umdrehungen der letzteren, welche an einer auf dem Schlitten befindlichen Skala abgelesen werden, betragen je 0,5 mm, und da die mit den Knöpfen *U* und *V* der beiden Schrauben verbundenen Trommeln in 100 Theile ge-

*) Die Natronflamme wird mit einem Schornstein umgeben, an welchem sich ein Ansatzrohr befindet, das durch eine Sammellinse geschlossen ist, um die Strahlen möglichst concentrirt in das Prisma zu leiten.

theilt sind, so entspricht ein Trommeltheil einer Verschiebung um 0,005 mm. Auf dem oberen Schlitten ist der eigentliche Träger des Mikroskops befestigt, welches ausserdem noch um die Axe x gedreht und durch die Schraube y in seiner Stellung fixirt werden kann. Das nur mässig vergrössernde Mikroskop gestattet eine grobe Einstellung durch Verschiebung des Tubus und eine feine durch Drehung des in der Mitte befindlichen gerieften Ringes; in der Focalebene befinden sich ein fester und ein drehbarer Faden, dessen jedesmalige Stellung mittelst einer Theilung an der Aussenseite des Tubus abgelesen werden kann (vergl. S. 552).

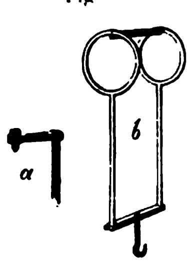
Mit Hülfe der Verschiebung des Mikroskopes durch die Mikrometerschraube U kann man nun beide Schneiden nach einander einstellen und somit den Abstand derselben bestimmen, ferner nach dem Auflegen der zu untersuchenden Platte (oder des Stabes) durch Einstellen der Ränder derselben beurtheilen, ob sie die erforderliche Lage besitzt. Ist dies der Fall, so wird die Schraube s gelöst, der vorher mit der Hand gefasste Mikroskopträger langsam heruntergelassen, bis das Mikroskop in horizontaler Stellung vor dem Apparate befindlich und auf die Vorderseite des Prismas i gerichtet ist, und an dem in Fig. 616 unteren Ende der Säule T ein dem Apparat beigegebenes Gegengewicht eingeschraubt. Die beiden Endpunkte der dadurch erfolgten Drehung um 90°, d. h. die verticale und die horizontale Stellung des Mikroskopträgers sind durch corrigirbare, an der Drehungsaxe SS befindliche, Anschläge bestimmt, von denen einer mit dem zugehörigen Schräubchen in der Figur sichtbar ist, und zwar derjenige, welcher vorn an die Schiene D anschlägt, wenn die horizontale Stellung erreicht ist. In der letzteren blickt man nun mit dem Mikroskop durch die schräggestellte, vor i befindliche Spiegelglasplatte hindurch in das Innere des Prismas und nähert das Mikroskop bis zur Einstellung auf dessen Oberseite; ist die über i aufgelegte Platte durchsichtig, so kann man durch dieselbe hindurch die aufsitzende Belastungsvorrichtung wahrnehmen (natürlich von unten gesehen, wegen der Reflexion der Strahlen im Prisma) und dadurch die richtige Einstellung des Mikroskoptubus leicht finden. Das Prisma wird durch Drehen von m so weit gehoben, dass es die Unterseite der zu untersuchenden Platte berührt; in Folge einer sehr schwachen sphärischen Krümmung der Oberseite des Prismas erfolgt diese Berührung nur in der Mitte, und beleuchtet man nun mit dem oben erwähnten monochromatischen Lichte, so sieht man diese Stelle umgeben von ringförmigen Interferenzstreifen*). Senkt man nun das Prisma sehr langsam, so beginnen diese Streifen sich nach der Mitte hin zusammenzuziehen, sobald die Platte auf den Schneiden aufliegt und zwischen ihr und dem Prisma ein Zwischenraum entsteht; eine Verschiebung um einen ganzen Streifen tritt

*) Ist die zu untersuchende Platte eine metallische, welche das gesammte auffallende Licht reflectirt, so sind wegen des ungeeigneten Intensitätsverhältnisses der beiden interferirenden Strahlen keine Streifen zu sehen; alsdann kittet man ein dünnes Glasplättchen auf die Unterseite der Platte.

ein, wenn der senkrechte Abstand beider um eine halbe Wellenlänge (in Luft) des Natriumlichtes, d. i. um 0,00029 mm, geändert wird, daher man durch Schätzung der Theile eines Streifens diese Aenderung und damit die Biegung des zu untersuchenden Stabes mit diesem Apparate auf Hunderttausendstel eines Millimeters zu messen im Stande ist.

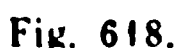
Die Belastung wird nun bewirkt entweder durch eine auf die Mitte der zu untersuchenden Platte aufgesetzte konische Spitze *a* Fig. 617 (in welchem Falle man ein kleines, sehr dünnes Kautschukplättchen unter die Spitze zu legen hat) oder durch eine übergelegte Schneide *b* Fig. 617, deren zwei abwärts gehende Bügel an der Stelle, wo die Lichtstrahlen zum Prisma gelangen müssen, kreisförmig erweitert sind. Dass die Spitze resp. Schneide genau in der Mitte angreift, kann durch die der Schiene *D* parallele Verschiebung des Mikroskops controlirt werden, indem man die Schraube *y* löst, das Mikroskop aus der horizontalen Richtung um den erforderlichen Winkel dreht, dann auf die beiden Schneiden der Lager *L* und *M* und auf die Belastungsspitze oder -Schneide einstellt und deren Entfernungen an der Schraube *U* bestimmt. Von der letzten Stellung aus geht man durch Drehen des Mikroskops um die Axe *x* abwärts, bis man die belastete Stelle, durch das Prisma von unten gesehen, im Gesichtsfelde erblickt, und erhält so die Einstellung, für welche man die Senkung der Platte zu bestimmen hat.

Fig. 617.



Der Apparat wird am besten auf eine in die Wand eingemauerte Steinconsole *C* Fig. 618, welche in der Mitte eine 5—6 qcm grosse Oeffnung besitzt, derart aufgestellt, dass das offene Viereck in der Mitte des Statives und damit zugleich der Prismenträger *m* sich gerade über jener Oeffnung befinden. Durch letztere geht nun der mit der Belastungsschneide oder -Spitze verbundene Metallstab *a* vertical abwärts bis zu einem Knie, welches das verstellbare Balancirgewicht *b* trägt; an dem horizontalen Arme des Knies ist ein Gabelstück mit einer Schnur, die durch Drehen der Schraube *c* länger oder kürzer gemacht werden kann, befestigt. In dieser Schnur hängt nun mit ihrem oberen, hakenförmigen Ende die eigentliche Belastungsvorrichtung. Dieselbe besteht aus einem entsprechend gebogenen starken Stahldraht *e*, welcher unten in eine Messingscheibe *g* endigt, die zur Dämpfung etwaiger kleiner Stösse während der Senkung in Oel eintaucht; an der oberen Schleife des Drahtes wird eine gestielte Scheibe *f* aufgehängt, auf welche die Gewichte *k* (à 100 g oder 50 g) nach Bedarf aufgelegt werden. Das Gewicht des oberen Theiles der Vorrichtung bis zur Schnur *d* soll höchstens 150—200 g betragen und bildet die Belastung der zu untersuchenden Platte beim Anfange der Beobachtung; zu der Wirkung dieses constanten Gewichtes lässt man dann diejenige der eigentlichen Belastungsvorrichtung *efk*, deren Gewicht demnach (mit Berück-

sichtigung des Gewichtsverlustes der in das Oel tauchenden Scheibe *g*) genau bestimmt werden muss, hinzutreten, aber so allmählich, dass die hierdurch hervorgebrachte Verschiebung der Interferenzstreifen im Mikroskope noch verfolgt, d. h. die Streifen gezählt werden können. Dies geschieht durch Senkung der an der Wand in einem Charnier drehbaren Platte *c*. Im Anfange der Beobachtung wird diese Platte durch die Spannung der *U*-förmig gebogenen Feder *s*, mit welcher sie durch den Arm *r*


Fig. 618.

verbunden ist, in derjenigen Stellung gehalten, in welcher sie die mit ihrem hakenförmigen Ende aufsitzende Belastungsvorrichtung vollständig trägt. Dreht man nun an der Schraube *t*, welche sehr niedrige Umgänge besitzt, so wird die Feder *s* zusammengepresst, der Arm *r* der Wand genähert und dadurch der Unterstützungspunkt der Belastungsvorrichtung so langsam gesenkt, dass die nunmehr erfolgende Verschiebung der Interferenzstreifen im Mikroskope mit Ruhe und Sicherheit verfolgt werden kann.

Diese Verschiebung hört auf, wenn die Senkung des Tisches *i* so gross geworden ist, dass das gesammte Belastungsgewicht auf die zu untersuchende Platte wirkt. Da der verticale Faden des Mikroskops jedesmal wieder dieselbe Stellung zwischen den Streifen besitzt, wenn eine Verschiebung um einen ganzen Streifen eingetreten ist, so kann man durch Vergleichung dieser Stellung am Anfange und am Ende der Senkung, ausser der Zählung der hindurchgegangenen ganzen Streifen, auch noch eine Schätzung des hinzukommenden Bruchtheiles vornehmen. Man wiederholt dies mehrere Male; findet man hierbei die Zahl der ganzen Streifen übereinstimmend, so kann man weitere Wiederholungen des Versuchs so ausführen, dass man nur Anfangs- und Endstellung vergleicht und die Senkung rascher bewerkstelligt. Dies geschieht mittelst der Kurbel *u*, durch deren Bewegung die Scheibe *v* gedreht wird, welche, durch eine Schnur mit dem Ende der Feder *s* verbunden, dieses der Wand nähert. Die ganze Belastungsvorrichtung ist an einem mit der Mauer fest verbundenen Brete *B* befestigt, welches unten eine horizontale Holzplatte *B'* trägt; auf diese wird das mit Oel gefüllte Glas gesetzt, in welches die Scheibe *g* eintaucht, und vortheilhaft auf die rechte und die vordere Kante je ein senkrechtes Bret befestigt, um zu verhindern, dass der Beobachter während der Arbeit an die Belastungsvorrichtung anstösst.

Da der vorstehend beschriebene Apparat ein vollständiges Mikrometer darstellt, mit welchem man innerhalb des durch die Verschiebung der Schrauben *U* und *V* bestimmten Flächenraumes von 4 qcm Längen und Winkel zu bestimmen im Stande ist, so kann derselbe als mikroskopischer Messapparat zu den verschiedensten Zwecken Anwendung finden. Man setzt alsdann auf die Schiene *D* einen einfachen, die Lager *K* und *M* überdeckenden Objecttisch mit einer drehbaren Glasplatte in Messingfassung, auf welche die zu messenden Objecte aufgelegt und, sei es von oben durch eine Linse, sei es von unten durch das totalreflectirende Prisma *i* oder nach dessen Entfernung durch einen kleinen Spiegel, beleuchtet werden. Besonders vortheilhaft verwendbar ist das so eingerichtete Instrument zur Messung des Durchmessers der Sénarmont'schen oder Röntgen'schen Wärmeleitungsellipsen (s. S. 159 f.) und zur Untersuchung von Aetzfiguren auf Krystallflächen, im letzteren Falle namentlich dann, wenn es sich um Messung des Winkels handelt, welchen die Kante einer Aetzfigur mit einer entfernten Krystallkante bildet, d. h. wenn der Krystall so gross ist, dass eine besonders gut ausgebildete Aetzfigur und die Umrisskanten der Krystallfläche im Mikroskope nicht mehr gleichzeitig sichtbar sind; man stellt alsdann einfach den drehbaren Faden des letzteren auf die Kante der Aetzfigur ein, verschiebt das Mikroskop mit den Schrauben *U* und *V* bis zur Einstellung der Krystallkante und bestimmt deren Richtung ebenfalls mit Hülfe des drehbaren Fadens.

D. Schneide- und Schleifapparate.

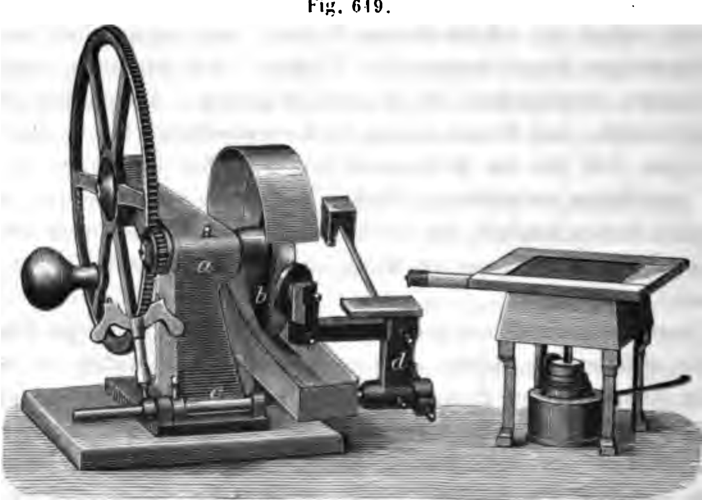
§. 126. **Das Schneiden, Schleifen und Poliren der Krystallplatten.** In vielen Fällen liefern natürliche Flächen, oder Ebenen einer deutlichen Spaltbarkeit, schon die erforderlichen Platten, und solche sind, selbst bei nur mittelmässiger Beschaffenheit der Flächen, den künstlich hergestellten im Allgemeinen vorzuziehen, da es niemals gelingt, namentlich nicht bei kleinen Krystallen, eine Ebene genau in der erforderten Lage anzuschleifen. Der günstigste Fall für die Richtigkeit des Schliffes liegt vor, wenn eine von zwei parallelen natürlichen Flächen direct verwendbar ist, wenn es sich also nur darum handelt, die zweite derselben parallel durch Abschleifen herzustellen, sei es weil sie zu klein ausgebildet oder weil der Krystall zu dick ist.

Will man aus einem einigermaassen dicken Krystalle eine Platte herstellen, die abfallenden Stücke aber noch weiter verwenden, so muss man ihn in der erforderlichen Richtung durchschneiden. Ist die Substanz hart, so bedarf es hierzu einer Schneidemaschine, auf welcher der Schnitt durch Andrücken des betreffenden Stückes gegen die Kante einer rasch rotirenden Metallscheibe bewirkt wird. Solcher Maschinen sind in neuerer Zeit mehrere empfohlen worden, von denen die von R. Fuess in Berlin (s. dessen Preiscourant im Anhange) gelieferten wohl die meiste Verbreitung besitzen und daher im Folgenden (nach Angaben des Verfertigers selbst) beschrieben werden mögen.

Fig. 619 stellt eine kleine Maschine für Handbetrieb in $^1/_6$ nat. Gr. dar. Durch Drehen des grossen Zahnrades wird die in dem Eisengestell *a* horizontal gelagerte Spindel, an welcher die Schneidscheibe *b* befestigt ist, in schnelle Rotation versetzt. Die Scheibe *b* ist aus Eisenblech (Weissblech) von $^1/_2$ mm Dicke gefertigt. Der Rand derselben muss genau rundlaufend mit der Spindel abgedreht sein; ferner ist erforderlich, dass die Fläche der Scheibe eine zur Spindelaxe senkrechte Ebene bilde, damit bei der Rotation kein seitliches Schwanken stattfindet. Scheiben, deren Ränder wellenförmig schwanken, sind unbrauchbar, weil sie sich leicht in der Schnittfuge festklemmen. Am Fusse des Eisengestells *a* befindet sich eine,

parallel zur Spindel gelagerte, cylindrisch stabförmige Axe *c*, welche in ihrer Längsrichtung verschoben und vermittelst zweier Klemmringe in ihrer jeweiligen Stellung so fixirt werden kann, dass unbehindert ihrer Drehung seitliche Verschiebungen nicht stattfinden können. Die Axe *c* trägt an ihrem rechten, weit hervorragenden Ende den Pfeiler *d*, in welchen ein nach links gerichteter horizontaler Arm drehbar eingesetzt ist, welcher den kleinen dreh- und festklemmbaren, senkrechten Pfeiler *e* aufnimmt. An diesen werden nun die zur Befestigung der zu schneidenden Substanzen dienenden, aus flachen oder hohl ausgedrehten Eisenscheiben bestehenden Hülfsstücke angeschraubt, an welche die Mineralien mit Kolophoniumkitt oder Siegellack angekittet werden. Zu dem gleichen Zweck ist ein mit Kitt gefülltes Eisenkästchen beigegeben, in welchem man Mineralien durch gelindes Anhitzen eindrücken und auf diese Weise befestigen kann. Durch

Fig. 649.



obige »Support-Vorrichtung« lassen sich, wie an dem Centrirkopf eines Goniometers, alle diejenigen Drehungen und Neigungen ausführen, welche für die Justirung des zu schneidenden Krystalls nothwendig sind. Das Andrücken des letzteren an den Rand der Schneidscheibe geschieht durch den am rechten Ende der Axe *c* angeschraubten Hebel mit versetzbarem Reitergewicht. Grössere Mineralien oder Gesteinsstücke lassen sich nach Abnahme des horizontalen Armes vom Träger *d* auf der Plattform des letzteren mit einer Schraubzwinge, welche der Maschine beigegeben ist, befestigen.

Nachdem in der beschriebenen Weise ein Mineral zum Schnitt vorbereitet ist, lässt man die Maschine rotiren und trägt mit einem Holzspatel reichlich nassen Schmirgel an der Stelle auf den Krystall, an welcher die Schneidscheibe eindringen soll. Dieses Auftragen des Schmirgels aus einem

bereit stehenden Gefäss muss fortwährend geschehen; je fleissiger diese Operation besorgt wird, um so schneller dringt die Scheibe ein. Der grösste Theil des aufgetragenen Schmirgels kommt hierbei nicht zur Verarbeitung und wird in das unter die Scheibe gestellte Blechgefäss fallen, von welchem man indessen, wenn sich genügender Vorrath angesammelt hat, ebenfalls entnehmen kann. Der von der Rückwand des Gefässes ausgehende, die Scheibe grösstentheils umschliessende Blechbügel verhindert das Umherspritzen des fortgeschleuderten Wassers. Die passende Schmirgelsorte muss je nach der zu schneidenden Substanz ausgewählt werden — man wird für zarte Mineralien ein feineres, für gröbere Gesteinsstücke ein gröberes Korn nehmen.

Zum Schneiden von sehr harten Substanzen verwendet man zweckmässiger solche Blechscheiben, welche mit Diamantpulver imprägnirt sind. Das Verfahren der Herstellung einer Diamant-Schneidscheibe ist folgendes: In den Rand einer gut laufenden Blechscheibe werden in Abständen von ca. 2 mm mit einem stumpfen Messer kleine Kerben eingeschlagen; darauf drückt man eine Achatplatte, welche mit einem Teig von Diamantpulver und Petroleum bestrichen ist, fest dem Rande der Scheibe an, lässt diese gewissermaassen sich auf der Achatplatte abrollen und dann die Scheibe auf der Achatplatte einige Male umlaufen, sodass ein Einschnitt entsteht. Die Diamantsplitterchen drücken sich in das weiche Metall ein und bilden so eine Säge mit mikroskopischen Zähnchen. Eine derartig präparirte Scheibe schneidet vorzüglich harte und homogene Mineralien, welche mit Schmirgel schwer zu bearbeiten sind, nur darf man nicht versäumen, fortwährend auf die Schneidstelle Petroleum träufeln zu lassen. Auf weichere Substanzen hingegen ist die Diamant-Schneidscheibe fast unwirksam.

Will man parallel einem Schnitte einen zweiten ausführen, also eine Lamelle ausschneiden, so lüftet man mit einem Schraubenschlüssel (derselbe ist in der Abbildung auf der Schraube des am weitesten links befindlichen Klemmringes aufgesteckt gezeichnet) die Klemmringe der Axe *c* und verschiebt die letztere um die gewünschte Breite der Lamelle.

Es möge noch eine goniometrische Vorrichtung Erwähnung finden, welche an Stelle des Trägers *d* auf der Axe *c* befestigt werden kann und welche gestattet, kleinere Krystalle mit Hülfe eines festklemmbaren Cardani'schen Gelenks und einer in der Ebene der Schneidscheibe aufgestellten entfernten, schmalen Flamme optisch einigermaassen zu justiren. Die Schnittebene fällt dann senkrecht zu den orientirten Flächen. Um aber auch in bestimmten Winkeln zu den Flächen einen Schnitt ausführen zu können, kann die Vorrichtung auf einem am Fusse derselben angebrachten Kreise gedreht und festgestellt werden.

Fig. 620 stellt eine Schneidemaschine mit Fussbetrieb dar. Wie bei den gewöhnlichen Drehbänken geschieht die Übertragung der Bewegung vom Schwungrad auf die Spindel. Die Support-Vorrichtung ist derjenigen der Handbetriebsmaschine gleich, — nur grösser. Ausser dem Schneide-

werk kann die Maschine zum Schleifen auf der horizontal laufenden Gusseisenscheibe *s* benutzt werden. Zum Betriebe der senkrechten Spindel geht eine Schnur vom Schwungrade in rechtwinkeliger Umbiegung über zwei Leitrollen. Die Abbildung stellt den Mechanismus der Maschine so dar, als ob beides, Schneide- und Schleifwerk, gleichzeitig betrieben werden

Fig. 620.



könne. Dieses würde jedoch unzweckmässig sein, und es werden deshalb die neueren Maschinen nicht mehr mit flachrandigem Kranz des Schwungrades gemacht, sondern mit schwererem Radkranz, in welchen nur eine Rinne für den Schnurlauf eingedreht ist.

Diejenigen, welchen eine derartige Maschine zum Schneiden und Schleifen harten Körper nicht zur Verfügung steht, oder welche einer

solchen Arbeit die damit verbundene Mühe und Zeit nicht widmen wollen, erhalten von den optischen Instituten der Herren: Dr. W. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H., R. Fuess in Berlin, Voigt und Hochgesang in Göttingen, Strübin in Basel, Werlein in Paris u. A., Schliffe jeder Substanz in gewünschter Orientirung angefertigt.

Bei geringerer Härte dagegen, wie sie bei der Untersuchung künstlich dargestellter, krystallisirter Körper fast allein vorkommt, kann man das Durchschneiden eines Krystalls leicht durch eine feine Laubsäge bewerkstelligen, deren Sägeblatt sehr schmal sein muss oder durch einen feinen Draht ersetzt wird. Das Sägen muss sehr langsam und vorsichtig ausgeführt werden und zwar stets unter Benetzung des Sägeblattes oder des Drahtes; wo es nicht nöthig ist, die durchschnittenen Flächen zu conserviren, wende man ein Lösungsmittel der Substanz zum Benetzen an. Bei der Anwendung des Drahtes ist die Verwendung von Schmirgelpulver kaum zu entbehren. Ist der Krystall gross und etwas bröckelig, so kittet man ihn mit einer Mischung von Wachs und Colophonium auf einem horizontalen Brettchen fest, auf welchem seitlich zwei verticale Wände befestigt sind; diese sind mit je einem senkrechten Schlitz versehen, welcher der Säge zwar eine Bewegung vor und zurück, nach oben und unten, aber keine Abweichung nach rechts und links gestattet.

Kommt es dagegen auf die abfallenden Stücke nicht an, so stelle man die Fläche zuerst durch vorsichtiges Feilen, oder noch besser Abschaben mit einem Messer, annähernd her und schleife sie alsdann eben. Ist nicht sehr viel Substanz zu entfernen, so beginne man direct mit dem Schleifen.

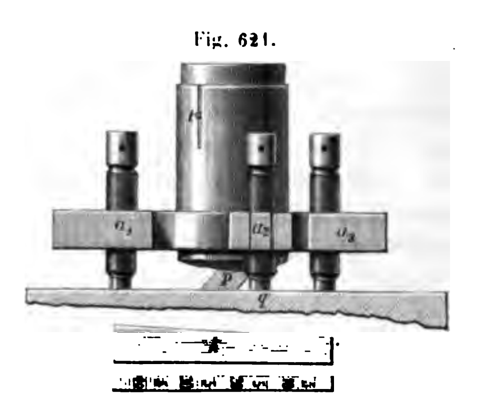
Ist der Krystall klein, so hat man beim Schleifen eine sicherere Führung nöthig, als es das Fassen mit den Fingern gestattet. Man senkt alsdann denselben in Siegellack, oder in Gyps oder fasst ihn mittelst Kork in folgender Weise: ein guter, dichter und weicher Korkstöpsel wird von oben nach unten (parallel der Cylinderaxe) durchschnitten und die Schnittfläche beider Hälften eben gefeilt; dann werden beide wieder aneinandergelegt und vier horizontale Stecknadeln durch das Ganze gesteckt; zwischen die beiden, beliebig von einander zu entfernenden Schnittflächen wird der Krystall so eingeklemmt, dass der abzuschleifende Theil über eine Endfläche des Korkes hervorragt, und die anzuschleifende Ebene dieser Endfläche parallel ist. Dieser kleine von Nörremberg angegebene Apparat gestattet selbst bei sehr kleinen Krystallen eine ziemlich sichere Führung, wenn man ihn nur durch einen geringen Druck der Finger in seiner Lage erhält. Das Schleifen selbst wird auf einer matten Glasplatte mit einer Benetzungsflüssigkeit (Oel, Wasser oder Alkohol *) ausgeführt; hierzu kann man, wenn die die Umgrenzung der Platte bildenden Flächen nicht intact zu bleiben

* Absoluter Alkohol darf nicht verwendet werden beim Schleifen der Krystalle wasserhaltiger Salze, da denselben hierdurch das Krystallwasser entzogen und die Durchsichtigkeit genommen würde

brauchen, ein Lösungsmittel anwenden, wodurch das Schleifen in hohem Grade beschleunigt wird; andernfalls nimmt man feinen Bimsstein. bei etwas härteren Krystallen feinstes Schmirgelpulver neben dem Benetzungsmittel. Eine leidlich ebene, nicht convexe Fläche zu schleifen, erfordert eine ziemlich grosse Uebung; hat man die Neigung des Krystalls w des Schleifens etwas geändert, so bildet sich eine sehr stumpfe I und es sitzt nur noch ein Theil der Fläche auf der Glasplatte auf: dann sehe man zu, welcher der beiden Flächentheile die richtigere l hat, und schleife nur diese fort (indem man auf dieser Seite auf Krystall drückt), bis sie die ganze Fläche bildet.

Auf diesem Wege kann man natürlich nur annähernd ebene Flä erhalten. Hat man grössere Krystalle zur Verfügung und ist also im S an die Vollkommenheit der Platten grössere Anforderungen zu stellen, empfiehlt sich die Anwendung der von Fuess construirten Vorri zum Schleifen und Poliren planparalleler Platten Fig. 621. Die cylind Hülse h besitzt drei Arme a_1, a_2, a_3, welche die Muttern dreier l Stahlschrauben s_1, s_2, s_3 bilden; in derselben kann der Cylinder c, we mit dem Stifte t in einem S der Hülse gleitet und an seiner l seite das zu schleifende Object p Canadabalsam oder einer Mis von Kolophonium und Wachs kittet trägt, auf und niederges werden. Die Stahlschrauben wer mit Hülfe des an seiner abge ten Fläche mit einer Theilung versehenen Keiles k so eingeste ihre Enden in einer zur Unte von c parallelen Ebene lie . Die Vorrichtung wird auf der Schleifplatte q so mit der Hand geführt, dass das Object mit der ersteren durch einen leichten Druck auf c stets in Berührung gehalten wird.

Fig. 621.



Zur Herstellung eines Dünnschliffes aus einem Gesteine schleift man eine geschnittene Platte oder einen mit dem Hammer geschlagenen Scherben auf der rotirenden Scheibe der Schleifmaschine oder mit freier Hand auf einer ebenen Eisenplatte mit grobem Schmirgel und Wasser auf einer Seite eben; alsdann wird diese Fläche auf einer mattgeschliffenen Glasplatte mit feingeschlämmtem Schmirgel polirt und mit Canadabalsam auf einer starken, quadratischen Glasplatte aufgekittet. Hierzu, wie überhaupt zum Erwärmen, Kitten u. s. w. von Präparaten, dient ein eisernes Stativ mit einem kleinen Flämmchen wie solche von Desaga in Heidelberg und Bohm und Wiedemann in München geliefert werden) oder der sehr bequeme Erwärmungsapparat von Fuess, welcher auf Fig. 619 zur Rechten der Handschneidemaschine mit abgebildet ist. Derselbe besteht aus einem

viereckigen Kasten von Zink, dessen Oberfläche von einem Holzrahmen umgeben ist, welcher als Stützpunkt für die Hand dient. Ein in den Kasten eingeführtes Thermometer hat den Zweck, die Temperatur zu ermitteln, welche die zur Verfügung stehende Sorte von Canadabalsam bedarf, um haltbare Präparate zu gewinnen. Das aufgekittete Präparat wird dann abgeschliffen, bis es im durchfallenden Lichte im Mikroskope untersucht werden kann, die zweite Fläche ebenfalls polirt und, eventuell nach Uebertragung der dünnen Platte auf ein anderes Objectglas, mit dünnem Deckglase bedeckt. Ueber das Nähere der Behandlung von Gesteins-Dünnschliffen s. Hussak, Anleitung z. Best. d. gesteinbild. Mineralien, Leipzig 1885.

Zum Poliren der geschliffenen Flächen dient feines, sämisch gegerbtes Leder, weiche Leinwand oder Seide, auf eine ganz ebene Fläche (Holz oder Glas) aufgespannt; als Polirmittel benutzt man am besten englisch Roth (caput mortuum, Fe^2O^3) oder feinst geschlämmte Zinnasche mit Alkohol oder Aether. Weiche Körper nehmen selten gute Politur an und hat man sich dann mit den durch den Schliff erhaltenen Flächen zu begnügen, nachdem man sie auf einem ausgespannten Leder ohne Polirmittel ein wenig abpolirt hat; namentlich für die Messung des Axenwinkels in Oel reichen solche Platten fast immer hin. Sind die Flächen zu matt, um ein scharfes Axenbild, ein deutliches Spectrum (bei Prismen) zu liefern, so werden mittelst Canadabalsam dünne planparallele Glasplättchen auf dieselben gekittet und möglichst fest angedrückt, damit nicht die Canadabalsamschicht keilförmig werde und Fehler erzeuge (s. auch S. 589—590). Statt des Canadabalsams kann man auch Mastixlösung in Aether oder eine Mischung beider, welche schneller erhärtet, zum Kitten anwenden.

Was die Genauigkeit betrifft, mit welcher die Richtung einer künstlichen Fläche herzustellen ist, so kann dieselbe eine sehr verschiedene sein, je nach Umständen. Hat man z. B. von einem Körper festgestellt, dass er einfachbrechend ist, und will seinen Brechungsexponenten bestimmen, so ist die Richtung der beiden zu schleifenden Prismenflächen ganz gleichgültig; man hat also nur darauf zu achten, dass dieselben recht eben sind und einen passenden Winkel mit einander bilden (bei mittlerer Grösse des Brechungsindex zwischen 40 und 70°). Sind ein Paar geeigneter Ebenen, z. B. zwei gegenüberliegende Oktaëderflächen (Prismenwinkel 70° 32′), als natürliche Krystallflächen vorhanden, so benutzt man diese und bedeckt die übrigen mit einer Schwärze, welche man aus Russ und einem schnell trocknenden Oel herstellt. Ist der zu untersuchende Körper nach den Messungen tetragonal oder hexagonal, und handelt es sich nur um die Feststellung der optischen Einaxigkeit und des Charakters der Doppelbrechung, hat man also die Basis, wenn diese nicht auftritt, anzuschleifen, so braucht dies nur ganz angenähert zu geschehen, denn die erforderten Bestimmungen lassen sich noch ausführen, wenn selbst die Platte 6—8° schief geschliffen ist, wenn man nur das Interferenzbild noch in seinem ganzen Umfange im

Gesichtsfelde des Polarisationsapparates sieht. Will man dag‹ ch-
ungsquotienten eines einaxigen Krystalls bestimmen und dazu ein P
parallel der Axe verwenden, so muss dieses sehr genau geschliffen ;
ein besonders günstiger Umstand ist hierbei eine vorherrschend prisma
Entwickelung der Krystalle nach der Hauptaxe, indem man alsdann bei
hexagonalen Krystallen direct zwei einander unter 60° schneidende Pr
flächen (unter Schwärzung der übrigen), bei tetragonalen eine solche
eine, leicht in genügender Genauigkeit herzustellende, künstliche, v ale
Fläche verwenden kann. Platten von zweiaxigen Krystallen, welche
Messung des Axenwinkels dienen sollen, müssen so geschliffen s .
ihre Normale nicht mehr als 1° von der Mittellinie abweicht, wenn ‹
sung auf 2—3′ genau ausfallen soll; bei sehr kleinen Krystallen w
sich allerdings mit einer geringeren Genauigkeit begnügen mü n. P
zur Bestimmung der Brechungsexponenten müssen auf 1° au e
derliche Richtung haben, sollen die erhaltenen Zahlen dur mit
3 Decimalen richtig sein. Bei rhombischen Krystallen kann r oft
ein natürliches Prisma, gebildet von zwei Flächen einer prism
oder einer solchen und einer Pinakoidfläche (s. S. 100 und 101), :
zwei Hauptbrechungsexponenten bestimmen. Bei mono- und asyı
Krystallen genügt es meist, wenn nämlich die Dispersion der E i‹
nicht 1—2° übersteigt, die Schliffe für mittlere Farben richt
und auch für die übrigen zu verwenden.

E. Darstellung der Resultate krystallographischer Untersuchungen.

§. 127. **Gang einer krystallographischen Untersuchung und Dar-llung der Resultate.** Bei der Bestimmung der Krystallform eines Körpers t man es in den weitaus meisten Fällen mit durchsichtigen Krystallen zu ın und kann daher die optischen Eigenschaften bei der Bestimmung zu lfe nehmen. Man verfährt alsdann folgendermaassen: Aus einer vorliegenden ystallisation werden zunächst die am besten und vollständigsten ausge-deten Krystalle ausgewählt und ihren Formen nach dem Augenmaasse, entuell mit Hülfe der Lupe, eine bestimmte krystallographische Deutung geben versucht. Diese hypothetische Bestimmung wird dann auf op-hem Wege geprüft, indem ein Krystall in das Polarisationsinstrument ge-ıcht und eine ungefähre Bestimmung der Auslöschungsrichtungen vorge-nmen, sowie die Wahrnehmung eines etwaigen Axenaustrittes auf den herrschenden Flächen versucht wird*). Ist das Ergebniss dieser Prüfung irgend einem Punkte im Widerspruch mit der angenommenen Auffassung r Krystallform, zeigen z. B. die Flächen eines für rhombisch gehaltenen smas schiefe Auslöschungen, oder lässt eine vermeintlich monosymme-sche Querfläche das Bild nur einer optischen Axe seitwärts von der ver-ıtheten Symmetrieebene erkennen, so ist die erste Hypothese über die ystallform als falsch erkannt und muss durch eine andere ersetzt werden. mmen dagegen alle optischen Beobachtungen, welche die Ausbildung der ystalle ohne Weiteres gestattet, mit der gemachten Hypothese überein, kann dieselbe, als sehr wahrscheinlich richtig, vorläufig angenommen d zur Messung übergegangen werden, über welche das Nöthige bereits 584 gesagt worden ist. Haben mehrere Krystalle zur Messung gedient, werden sie numerirt aufbewahrt, bis die ganze Untersuchung beendigt um jederzeit noch eine nachträgliche Controle zu ermöglichen.

*) Benutzt man für beide Zwecke das gewöhnliche verticale Polarisationsinstru-nt, indem man dasselbe (s. S. 617) einmal so hoch stellt, dass man den Krystall er-kt, das andere Mal bis zur Einstellung der Interferenzfigur hinabgeht, so darf man ıt unberücksichtigt lassen, dass man im ersteren Falle den Krystall verkehrt sieht, Ort der im Gesichtsfelde sichtbaren optischen Axenbilder also mit dem umgedreht, ı. in seiner wirklichen Lage gedachten Krystall zu vergleichen hat.

Durch Eintragung der beobachteten Flächen in eine aus freier I anzufertigende sphärische Projection orientirt man sich darüber, welche an den Krystallen gut messbaren Winkel am geeignetsten der Re zu Grunde gelegt werden; hierbei ist in erster Linie nicht die g Einfachheit der Berechnung, sondern der Umstand maassgebend, betreffenden Winkel solche sind, welche am genauesten gemessen können, und bei denen die Fehler der Messung nicht auf die Rech resultate einen vergrössernden Einfluss besitzen. Diese Winkel, wel möglichst vielen gleichwerthigen Kanten bestimmt werden, nim Fundamentalwinkel, die nächst besten als Controlwerthe zur Prüfu der Genauigkeit des berechneten Axenverhältnisses, während man von ordnet und wenig gut ausgebildeten Flächen des Krystalls nur so Messungen auszuführen nöthig hat, als zur Bestimmung ihrer I umgänglich erfordert werden.

Ist die Berechnung vollendet und hat dieselbe zu einer befriedi Uebereinstimmung mit den Resultaten der Messungen geführt, so e die nähere Untersuchung der physikalischen Eigenschaften der Kr zuerst der Spaltbarkeit, dann der optischen Eigenschaften, soweit so Ausbildung gestattet. Die krystallographische Beschreibung Körpers erfolgt demgemäss am geeignetsten in nachstehender F

Krystallsystem.

Elemente.

Beobachtete Flächen und Habitus der Formen (diesen An perspectivische Abbildung beizufügen, zu deren Anfertigung im fo die Anleitung gegeben wird), eventuell mit Erwähnung der V (Lösungsmittel, Temperatur), unter denen eine oder die andere weise entsteht. Angabe der vorkommenden Zwillingsbildungen.

Tabelle der beobachteten und der, aus den mit * bezeichneten Fundamentalwerthen berechneten Winkel.

Cohäsionsverhältnisse, eventuell Aetzfiguren.

Farbe und Absorption.

Lage der optischen Axenebene und eventuell nähere optische Bestimmungen (Brechungsexponenten etc.).

Im Folgenden soll nun an einigen Beispielen der Gang einer solchen Untersuchung kurz skizzirt werden:

Beispiel I: Phosphorwolframsäure $= PW^{11}O^{43}H^{15} + 18$ O.

Anscheinend reguläre Oktaëder, farblos, durchsichtig. pol Lichte einfach brechend, also wirklich regulär. Keine lic keit zu erkennen. Die Untersuchung ist, und zwar ohne Winkelmessung, beendigt (eine Bestimmung der Brechungsindices war Falle unmöglich auszuführen, weil die Krystalle in der fre verwitterten).

Beispiel II: Kohlensaures Guanidin = $(CH^5N^3)^2H^2CO^3$.

Anscheinend reguläre Oktaëder mit kleinen Flächen des Würfels, durchsichtig, farblos. Im polarisirten Lichte erweisen sie sich jedoch als doppeltbrechend; durch zwei gegenüberliegende Flächen gesehen, ist stets eine Auslöschungsrichtung der einen der drei Umrisskanten parallel; darnach wären es tetragonale Pyramiden, und die erwähnte Kante jedesmal die Basiskante. Bei der Messung geben in der That diese letzteren Kanten einen etwas kleineren Winkel als die übrigen; die Differenz ist aber so gering, dass sie bei unvollkommeneren Flächen leicht hätte übersehen, und die Krystalle als reguläre bestimmt werden können. Die um etwa 10′ schwankenden Werthe geben im Mittel für den Polkantenwinkel 70° 47′, für den Basiskantenwinkel 70° 54′; aus ersterem folgt das Axenverhältniss nach S. 403 zu 1 : 0,9910, daraus der letztere zu 71° 1′ (Differenz 7′). Für die optische Untersuchung kommt der Umstand sehr zu statten, dass die Krystalle vollkommen nach der Basis spalten; im convergenten Lichte zeigt eine Spaltungsplatte nun zwar das Axenbild der einaxigen Krystalle in der richtigen Lage, aber die Mitte desselben farbig, also ist die Substanz circularpolarisirend und muss daher der trapezoëdrischen Hemiëdrie des tetragonalen Systems angehören (die Resultate der optischen Untersuchung sind S. 421 aufgeführt).

Beispiel III: Hydrochinon = $C^6H^6O^2$.

Kleine Krystalle, anscheinend reguläre Rhombendodekaëder. Im polarisirten Lichte jedoch doppeltbrechend; Auslöschungsrichtungen auf sechs in einer Zone liegenden Flächen parallel deren Zonenaxe, also müssen diese Flächen ein hexagonales Prisma, die andern sechs ein Rhomboëder bilden. Um die Richtigkeit hiervon streng zu beweisen (es könnte auch eine monosymmetrische Combination mit sehr geringer Schiefe der Schwingungsrichtungen vorliegen), wird sofort eine Platte senkrecht zu den ersteren Flächen geschliffen; diese lässt erkennen, dass die Substanz in der That einaxig und jene Zonenaxe die optische Axe sei. Folglich ist es die rhomboëdrisch-hemiëdrische Combination: $\varkappa\{10\bar{1}1\}$ R, $\{11\bar{2}0\}$ $\infty P2$, an welcher nichts weiter zu messen ist, als der Polkantenwinkel des Rhomboëders; dieser ist 62° 57′, daraus folgt nach S. 353 das Axenverhältniss $a : c = 1 : 0,6591$.

Beispiel IV: Schwefelsaures Kalium = K^2SO^4.

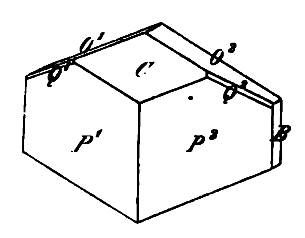
Anscheinend hexagonale Pyramiden mit der Basis. Durch letztere gesehen zeigen die Krystalle jedoch nicht das Interferenzbild der einaxigen, sondern das vielfach gestörte Bild zweier Axen. Es wird daher eine dünne Platte nach derselben Fläche geschliffen; diese wird im parallelen Lichte als nicht einfach erkannt, sondern als in sechs Sectoren getheilt, deren je zwei gegenüberliegende gleichzeitig, je zwei benachbarte nach einer Drehung von ca. 60°, dunkel werden; in letzteren bilden die optischen Axenebenen denselben Winkel; die Mittellinie ist aber bei allen senkrecht zur Platte und das Axenbild ganz symmetrisch, sobald das Licht durch einen Theil fällt, der nur einem einzigen Krystall angehört. Folglich sind die Krystalle

rhombisch und Drillingsverwachsungen nach einer prismatischen Fläche (s. über das Weitere S. 457).

Beispiel V: Benzylsulfid = $C^{14}H^{14}S$.

Anscheinend monosymmetrische Krystalle, Fig. 622, der Combination e Prisma $P^1 P^2$ mit einer Querfläche C (etwa als Basis zu nehmen), einer zweiten prismatischen Form $O^1 O^2$ (hintere Hemipyramide), einer dritten $Q^1 Q^2$ (Klinodoma) und der Symmetrieebene B. Durch C blickend, findet man die Auslöschungen parallel und normal zur vermeintlichen Symmetrieaxe, durch zwei parallele P-Flächen schief gegen die Prismenkanten, durch das andere Paar ebenso, mit ungefähr gleicher und entgegengesetzter Schiefe; dies widerspricht der obigen Annahme nicht; da keine Axen direct sichtbar, geht man zur Messung über. Die Flächen sind sehr uneben und gebrochen, die Werthe derselben Kante schwanken an verschiedenen Krystallen um 1—2 Grade; es wurde zunächst gemessen und gefunden der Winkel $P^1 : P^2 = 46^0\ 0'$, $O^1 : O^2 = 47^0\ 13'$; in Rücksicht auf die erwähnte Flächenbeschaffenheit entsteht die Frage, ob nicht etwa diese beiden Winkel gleich sein sollen; alsdann würde $P^1 P^2 O^1 O^2$ eine rhombische Pyramide, C eine Symmetrieebene derselben und $Q^1 Q^2$ eine prismatische Form sein. In diesem Falle müssten die Winkel $C : P^1 = C : O^1$ u. s. w., ferner Q^1 eine gerade Abstumpfung der Kante $O^1 : P^1$ sein u. s. f. Diese Annahmen werden durch die Messungen bestätigt; da aber die Uebereinstimmung wegen der mangelhaften Ausbildung nur eine unvollkommene ist, so kann der strenge Beweis, dass die Krystalle rhombisch seien, nur auf optischem Wege geführt werden. Da durch B und C keine Axen sichtbar sind, so wird das dritte Pinakoid rechtwinkelig zu jenen beiden angeschliffen; auch durch diese Fläche, nennen wir sie A, sind keine optischen Axen in Luft sichtbar. Nun wird die nach derselben geschliffene Platte in Oel im Axenwinkelapparat untersucht, und zwar einmal um die Kante $A : B$, das andere Mal um diejenige von $A : C$ gedreht; im zweiten Falle erscheinen die Axen ganz symmetrisch zur Normale der Platte und mit symmetrischer Dispersion; daraus geht hervor, dass die Fläche B die optische Axenebene und die Kante $B : C$ die erste Mittellinie ist. Durch Schleifen einer dünnen Platte nach C überzeugt man sich, dass auch hier, natürlich mit ihrem stumpfen Winkel, die Axen sichtbar sind. Die Krystalle sind also rhombisch und es kann nunmehr aus den Messungen $P^1 : P^2$ und $O^1 : O^2$ gemeinschaftlich das Mittel gezogen werden, ebenso aus $C : O^1$, $C : P^1$ u. s. w. Es sind somit, wenn auch $O^1 : P^1 = O^2 : P^2$ gemessen, alle Kantenwinkel der rhombischen Pyramide bekannt, und folglich nach S. 441 das Axenverhältniss aus zweien zu berechnen und daraus der dritte abzuleiten, welchen man dann mit der Beobachtung zu vergleichen hat.

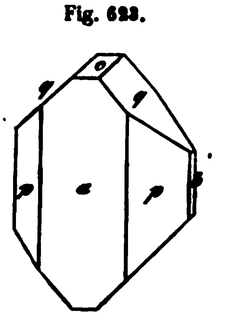
Fig. 622.



Beispiel VI: Schwefelsaures Amarin $= 2(C^{21}H^{18}N^2)^2 SO^4 + 7H^2O$.

Anscheinend monosymmetrische Krystalle, Fig. 623, gebildet von zwei prismatischen Formen pp und qq, zwei Querflächen a und c und der Symmetrieebene b. Durch das am meisten vorherrschende Flächenpaar a betrachtet, zeigen sich die Auslöschungen parallel den Kanten $a:p$ und $a:c$; nähert man das Objectiv des Polarisationsapparates, so erblickt man beide Axen, deren Verbindungslinie parallel der Kante $a:c$, deren Mittellinie genau in der Symmetrieebene, aber mit der Normalen zur Fläche a etwa 10° bildet. Dadurch ist das monosymmetrische System bewiesen. Die Messungen, welche wegen sehr guter Beschaffenheit der Flächen recht genau anzustellen sind, geben nun Resultate, welche, wenn keine optische Untersuchung vorgenommen worden wäre, die Krystalle unbedingt hätten als rhombisch bestimmen lassen. Es wird nämlich gefunden der Winkel $p:p$ vorn (an der Axe a) $= 80^\circ 34'$ bis $32'$ Mittel $80^\circ 34',5$), der Winkel $q:q$ oben (an c) $= 80^\circ 25'$ bis $33'$ (Mittel $80^\circ 29'$), d. h. beide innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler gleich; die monosymmetrische Combination $ppqq$ steht folglich in geometrischer Beziehung einer rhombischen Pyramide (zu welcher a und c das entsprechende Makrodoma und b das Brachypinakoid sein würde), so nahe, dass sie durch die Messung nicht von einer solchen unterschieden werden kann.

Fig. 623.



Wählen wir p zum primären verticalen Prisma, q zum primären Klinodoma, also a zum Orthopinakoid, c zur Basis, so ist die Berechnung des Axenverhältnisses dieser monosymmetrischen Combination eine besonders einfache dann, wenn wir zu Fundamentalwinkeln ausser den bereits erwähnten

$$p:p \text{ an } a = 80^\circ 34',5$$
$$q:q \text{ an } c = 80\ \ 29$$

noch wählen den Winkel.

$$a:c \text{ vorn} = 82^\circ 47',5,$$

weil letzterer gleich dem Supplement des Axenwinkels β ist, so dass von den Elementen nur noch die Axenlängen a und c ($b = 1$ gesetzt) nach S. 185 zu berechnen sind.

$$a:b:c = 0,8537 : 1 : 0,8534, \quad \beta = 82^\circ 47',5.$$

Von Winkeln, welche zur Controle zu messen und mit den aus den Elementen berechneten zu vergleichen wären, könnten nur in Betracht kommen $p:q$ vorn und der entsprechende hinten, sowie $q:a$. Die Berechnung derselben nach den in § 100 gegebenen Vorschriften ergiebt

$$q:a = (011):(100) = 84^\circ 30'$$
$$q:p = (011):(110) = 60\ \ 37$$
$$q:p' = (011):(\bar{1}10) = 69\ \ 54.$$

Beispiel VII: Diphenyltrichloräthylen = $C^2HCl^3(C^6$

Sehr flächenreiche Krystalle von anscheinend **rhombischer S**
gebildet von einem Prisma $a\underline{a}$ und dessen **Brachypinakoid** $c\underline{c}$,
welches in Fig. 624 auf die vermeintliche Basis **projicirt ersch**
zahl rhombischer Pyramiden, welche aber zum **Theil einspri**
besitzen, so dass die Krystalle sofort als **regelmässige Verw**
erkennen sind. Durch die vorherrschende Fläche $c\underline{c}$ **im po** **si**
betrachtet, sind die Schwingungsrichtungen genau **parallel den**
darnach sind die Krystalle also entweder **rhombisch oder m** **n**
In ersterem Falle müssten zwei benachbarte **Partien, z. B. die**
Hälfte, so verwachsen sein, dass die Zwillingsebene *c* **eine P**
also *x* die zweite zugehörige und *a* das **Brachypinakoid wäre; in**
Falle würde *a* unsymmetrisch gegen *c* und *x* **liegen, alle drei v** **n**
flächen und die Krystalle prismatisch **verlängert nach der Sym**

Fig. 624.

Um gleich von vorn **herein zwisc** **n**
beiden **Möglichkeiten zu entsche** **i,**
eine Platte **senkrecht zu der Zo**
schliffen; diese **erscheint im**
polarisirten **Lichte in vier Vie**
von denen je **zwei kr**
gleichzeitig **beim Dr** **dt** **el**
zwei solcher **Viertel ge**
Krystall an, das **Gan** **Du**
wachsungszwilling. Wäre dieser **rhombisch, so** **üsst**
löschungen parallel und normal zu den **Flächen *a* sein;** **s**
nicht der Fall, vielmehr stehen sie nahe **senkrecht und** **lel**
der Schlifffläche mit *c*; dass aber dies auch **nur annähern**
beweist das nicht gleichzeitige Dunkelwerden **beider Hälften.**
genten Licht zeigt dieselbe Platte, wenn man **nur durch einen Kr**
beide optischen Axen in der fast normal zu *c* **stehenden Ebene gl**
vom Mittelpunkt des Gesichtsfeldes mit **gekreuzter Dispersion;**

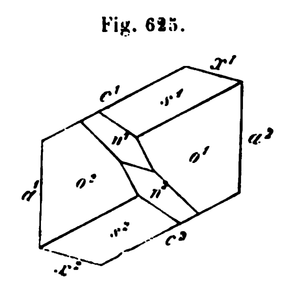


Fig. 625.

nun zugleich entschieden, **dass** **S**
nicht asymmetrisch (**bei geo** **Ae**
mit einer **monosymmetrischen** **sein**
ist also nunmehr **unzweifell** **cl**
der Krystall monosymmetris **u**
von *a*, *c*, *x* die **Symmetrieaxe (z** **ei** **te**
Mittellinie) sei. **Wählen wir nunm** **die**
a zum Orthopinakoid, *c* (**die Zwilli**
Basis, so **können wir uns den ei**
struiren, indem wir **uns zwei**
Viertel des Zwillings zusammengeschoben **denken; seine Proj**
Symmetrieebene würde das Ansehen von **Fig. 625 haben,**
dass die Endflächen drei hinteren **Hemipyramiden *o*, *s* u**

Wählen wir von diesen die erste zur primären ($o = \{\bar{1}11\}$), so sind durch diese und die Flächen $a = \{100\}$ und $c = \{001\}$ die Elemente des Krystalls vollständig bestimmbar. Seien z. B. gemessen die Winkel $a^1 : c^1$, d. i. der Axenwinkel $\beta = 60^0\ 14'$, $o^1 : c^1 = 79^0\ 43'$ und $o^1 : a^2 = 65^0\ 0'$, so findet man nach § 100:

$$a : b : c = 1{,}3367 : 1 : 1{,}7588, \ \beta = 60^0\ 14'.$$

Nunmehr handelt es sich um die Bestimmung des Zeichens der beiden andern Hemipyramiden. Von diesen liegt s in der Zone $o : c$, also hat sie das gleiche Verhältniss $a : b$, wie $o = \{\bar{1}11\}$, dagegen eine kleinere Verticalaxe. Um deren Länge zu berechnen, genügt demnach eine einzige Messung, etwa der Winkel $s^1 : c^1$, welcher deshalb der bequemste ist, weil er in derselben Justirung mit $o^1 : c^1$ gemessen werden kann. Dieser werde gefunden $= 66^0\ 20'$. Berechnet man hieraus die Länge der Verticalaxe von s, so findet man eine Grösse, welche fast genau $\frac{2}{3}$ von der für die Grundform berechneten ist; das Zeichen von s ist folglich $\{\bar{2}23\}$. Man nehme nun genau $\frac{2}{3}\, c$, berechne daraus rückwärts den Winkel $s^1 : c^1$, und vergleiche ihn mit dem direct beobachteten (die Messung war nur approximativ ausführbar, so dass sie wohl auf 20′ unsicher sein kann; bei Ausführung der Rechnung wird man sich überzeugen, dass die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung wirklich innerhalb dieser Fehlergrenze liegt). Die dritte Hemipyramide n liegt in keiner bekannten Zone, es müssen also zwei Messungen ausgeführt werden, um ihr Parameterverhältniss berechnen zu können. Es sei bestimmt worden der Winkel $n^1 : n^2 = 32^0\ 20'$ und $n^1 : c^1 = 78^0\ 1'$; aus dem ersteren folgt, dass der Winkel von n zur Symmetrieebene $= 16^0\ 10'$ ist. Die Berechnung des aus den Polen n, c und (010) gebildeten sphärischen Dreiecks liefert ein Axenverhältniss der Hemipyramide n, dessen a, wenn wir wieder $b = 1$ setzen, sehr nahe 4mal so gross ist, wie das a der primären Hemipyramide, und dessen c nahe das Doppelte ist; das gesuchte Zeichen der Form ist demnach $\{\bar{1}42\}$.

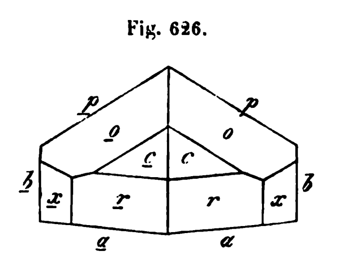
Endlich bleibt noch eine Krystallform zu bestimmen übrig, das hintere Hemidoma x. Da es in der Zone ca liegt, bedarf es nur einer Messung, etwa des Winkels $x^1 : c^1$, und dieser wird zu $40^0\ 14'$ gefunden. Bildet man jetzt ein ebenes Dreieck aus der Verticalaxe, der Klinodiagonale und der Durchschnittsrichtung von x mit der Symmetrieebene, so sind in demselben die Winkel bekannt, nämlich $\beta = 60^0\ 14'$, $x^1 : c^1 = 40^0\ 14'$, folglich der dritte, x^1 zur Verticale $= 79^0\ 32'$; daraus folgt das Verhältniss der beiden Seiten, welche von den Axen c und a gebildet werden, fast genau halb so gross, wie bei der Grundform, das Zeichen von x ist $\{\bar{1}02\}$.

Beispiel VIII: Phenylxanthogenamid $= C^9H^{11}SON$.

Prismatisch verlängerte, nur an einem Ende ausgebildete Krystalle; dieses eine Ende hat das Ansehen von Fig. 626 (vertical von oben gesehen). Die Zone, nach welcher dieselben vorherrschend ausgebildet sind, besteht aus einem Flächenpaar b, nach welchem die ganze Form symmetrisch zu sein scheint (was weiterhin durch die Messungen bestätigt wird), einem

vorderen halben Prisma $a\underline{a}$ mit sehr stumpfem Winkel und einem hinteren $p\underline{p}$ mit weit spitzerem. Dass die Combination einem einfachen monosymmetrischen (mit *b* als Symmetrieebene) Krystall angehöre, an welchen zufällig die vorderen beiden *p*-Flächen, wie die hinteren, zu $a\underline{a}$ zugehörigen, nicht ausgebildet seien, ist sehr unwahrscheinlich, da dieses Auftreten sich an allen Krystallen wiederholt. Dies deutet vielmehr auf eine Zwillingsbildung nach der Fläche *b* hin, wobei die unterstrichen bezeichneten Flächen dem einen, die übrigen dem zweiten Krystall angehören. Was das Krystallsystem der einfachen Krystalle betrifft, so sind zwei Fälle möglich: entweder ist es das monosymmetrische, dann wären *a*, *b* und *p* Querflächen, die Längsaxe der Prismen die Symmetrieaxe: *o*, *x*, *c* und *r* Flächen von Hemipyramiden, deren zugehörige wegen der Zwillingsverwachsung nicht ausgebildet sein können; — oder es ist das asymmetrische, d. h. zu *o*, *x*, *c* und *r* gehören keine symmetrisch liegenden Flächen am einfachen Krystall. Es wird versucht, durch etwaige Spaltungsrichtungen eine Entscheidung zwischen diesen beiden Annahmen zu treffen; es ergiebt sich eine sehr deutliche Spaltbarkeit nach *b*, keine nach einer andern Fläche, was sich mit jeder der beiden Annahmen verträgt. Ueber das Krystallsystem dieses Körpers kann nur durch optische Untersuchung entschieden werden. Ist derselbe monosymmetrisch, so muss eine Spaltungslamelle nach *b*, da dies eine Querfläche ist, Auslöschungen zeigen, welche normal und parallel der Kante *b* : *a* sind; ein Blick durch das Polarisationsinstrument zeigt, dass dies nicht der Fall; die Krystalle sind asymmetrisch. Betrachten wir von jetzt ab nur den einfachen Krystall, und zwar den in Fig. 626 rechts befindlichen, so haben wir zunächst drei Axenebenen zu wählen. Da *a* mit *b* fast rechte Winkel bildet, ebenso *b* mit *c* (indem $c\underline{c}$ wie eine sehr stumpfe Hemipyramide erscheint), endlich auch der Winkel *a* : *c* nicht sehr spitz ist, so dürfte es für die Rechnung bequem sein, die drei Flächen *a*, *b*, *c* zu nehmen; alsdann wird *p* als Abstumpfung der Kante *a* : *b* (wenn man sich den Krystall durch die Parallelflächen ergänzt denkt) zu einem Hemiprisma, und da schon nach dem Augenmaass *p* stumpfer gegen *a* als gegen *b* geneigt ist, wird, bei Belassung der Verticalstellung der Zone *abp*, $a = \{100\}$ Makropinakoid, $b = \{010\}$ Brachypinakoid, $c = \{001\}$ Basis. Da *cop* eine Zone bilden, so wird, wenn wir *o* zur primären hinteren rechten oberen Tetartopyramide wählen, $p = \{\bar{1}10\}$, ferner *r*, da es in der Zone *ca*, zu einem vorderen makrodiagonalen Hemidoma, *x* zu einer abgeleiteten Tetartopyramide. Zur Bestimmung der Elemente haben wir zuerst die drei Winkel *a* : *b*, *a* : *c* und *b* : *c* zu messen, und finden für dieselben die Werthe 86° 6′, 77° 25′ und 85° 5′; daraus ergeben sich die drei Axenwinkel:

Fig. 626.



$$\alpha = 94^0\ 10'$$
$$\beta = 102\ \ 18$$
$$\gamma = 92\ \ 54\,.$$

Damit wären drei von den fünf Elementen des Krystalls bestimmt, und es erübrigt nun die Berechnung des Parameterverhältnisses der Grundform *o*. Wir messen deren Neigung zu *b* und *c*, welche wir finden zu 55° 50′, resp. 63° 27′, und berechnen daraus ihr Axenverhältniss genau nach S. 197; wobei sich ergiebt:

$$a : b : c = 0{,}6027 : 1 : 0{,}6539.$$

Um das Zeichen des Hemidomas *r* zu bestimmen, genügt ein gemessener Winkel, z. B. *r* : *c*, welcher 40° 50′ gefunden wird; in dem von den Polen *c*, *b* und *r* gebildeten sphärischen Dreiecke, in welchem die Seiten *cr* und *cb* nebst dem zwischenliegenden Winkel bekannt sind, wird der Winkel an *b* berechnet, durch den der ebene Winkel der Flächen *c* und *r* auf *b* gegeben ist; daraus folgt, da β bekannt ist, das Längenverhältniss der Axen *a* und *c*, und zwar fast genau gleich demjenigen der Grundform, also ist $r = \{101\}$.

Endlich bleibt noch die Tetartopyramide *x* übrig; diese liegt in der Zone *b* : *r*, also muss sie die Axen *a* und *c* in demselben Verhältniss schneiden, wie das primäre vordere Hemidoma *r*, und es genügt demnach eine einzige Messung zur Feststellung ihres Zeichens. Es werde der Winkel *b* : *x* = 48° 32′ beobachtet, so resultirt dasselbe hieraus folgendermaassen: Im sphärischen Dreiecke *bcx* wird der Winkel an *c* berechnet, der Bogen *cx* bis zum Grundkreis verlängert; der hierdurch gefundene Punkt *y* ist der Pol des in der Zone [*cx*] liegenden Hemiprismas, dessen Zeichen sich aus der nunmehr möglichen Berechnung des Bogens *by* zu {120} ergiebt: hieraus folgt aber das Zeichen von $x = \{121\}$.

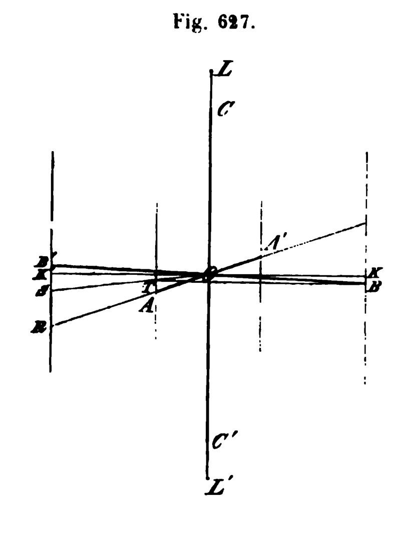
§. 128. **Zeichnung der Krystallformen.** Die perspectivischen Bilder, durch welche in der II. Abtheilung die Formen der Krystalle dargestellt wurden, sind Projectionen, bei denen das Auge in unendlicher Entfernung (weshalb alle am Krystall parallelen Kanten es auch in der Zeichnung bleiben) und ausserdem um eine bestimmte Grösse seitwärts von der nach vorn laufenden Axe und endlich wieder um einen gewissen Winkel erhoben über die horizontale Ebene gedacht wird, so dass die oberen Flächen, und zwar verkürzt, sichtbar werden.

Um eine solche Zeichnung anzufertigen, bedarf es zuerst der richtigen Projection der drei zu Axen gewählten Richtungen, und zwar wollen wir von derjenigen dreier, zu einander rechtwinkeliger, gleich langer Axen (Axensystem der regulären Krystalle) ausgehen. Die in der II. Abtheilung angewendete Projection erhält man auf folgende Art:

Man ziehe zwei, einander unter 90° schneidende Gerade *KK′* und *LL′*, Fig. 627, theile die erstere in sechs gleiche Theile und ziehe durch *K* und *K′*, sowie durch den zweiten und vierten Theilpunkt Parallelen zu *LL′*; dann trage man die Länge eines solchen Theiles von *K′* aus nach unten

auf, den so erhaltenen Punkt R verbinde man mit O und verlängere RO jenseits, so ist der zwischen den beiden mittleren Verticalen enthaltene Theil dieser Geraden, AA', die Projection der nach vorn laufenden horizontalen Axe. Durch A ziehe man $AS \parallel OK$ und verbinde S mit O, so erhält man in der zweiten Verticalen einen Schnittpunkt T; man ziehe ferner $TB \parallel OK$, verbinde B mit O und verlängere nach der andern Seite, so ist BB' die Projection der querlaufenden horizontalen Axe. Um endlich die richtige Länge der vertical bleibenden dritten Axe zu finden, mache man OC und $OC' = OR$, so sind C und C' die gesuchten Endpunkte der verticalen Axe.

Fig. 627.



Verbindet man A mit B, A mit C, B mit C u. s. f., so erhält man das Bild des Oktaëders, vergl. Fig. 138. Wie man dasjenige des Würfels und des Dodekaëders aus dem Axenkreuz construirt, geht unmittelbar aus Figg. 135, 136 und 137 hervor. Verdoppelt oder verdreifacht man die Längen OA, OB, OC, so kann man die Durchschnitte der Flächen von Ikositetraëdern u. s. w. mit den Axenebenen einzeichnen, und wie man daraus die ganzen Formen erhält, lässt sich aus den Figg. 127 bis 134 leicht erkennen.

Will man eine tetragonale Form zeichnen, so multiplicire man die Länge OC mit der Zahl c, welche das Verhältniss der Hauptaxe zu den Nebenaxen angiebt. und trage die neue Länge von O aus nach oben und unten auf der verticalen Axe auf; verbindet man die neuen Endpunkte dieser mit denen der Nebenaxen, A, A', B, B', so erhält man die Kanten der primären tetragonalen Pyramide (vergl. Fig. 382.)

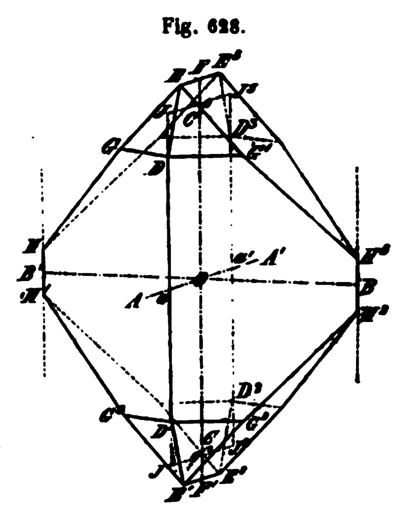
Hat man die Zeichnung einer rhombischen Combination auszuführen, so lässt man BB' unverändert, da wir diese, die Makrodiagonale, stets $= 1$ gesetzt haben, multiplicirt die Länge OA mit dem Werthe der Brachydiagonale a und OC mit dem der Verticale c, und erhält so das Axenkreuz dreier rechtwinkeliger Axen $a : 1 : c$, deren Endpunkte, mit einander verbunden (vergl. Fig. 446, die Kanten der entsprechenden primären rhombischen Pyramide liefern.

Wie nun die Zeichnung einer Combination mehrerer Formen weiterhin vorgenommen wird, soll an einem bestimmten Beispiel erläutert werden, und zwar wollen wir dazu einen rhombischen Krystall nehmen, da sich alsdann das Verfahren bei der Zeichnung eines tetragonalen oder regulären Krystalls von selbst ergiebt.

Es soll die Combination: $p = \{110\}$, $o = \{111\}$, $q = \{011\}$ des Quecksilberchlorids, Fig. 464 S. 452, abgebildet werden. Zuerst wird auf die

oben angegebene Art das reguläre Axenkreuz construirt; dieses sei in Fig. 628 dargestellt durch die Geraden AA', BB', CC'; das Axenverhältniss des Quecksilberchlorids ist nach S. 452: $a : b : c = 0,7254 : 1 : 1,0688$; wir müssen also die Länge OA mit 0,7254, die Länge OC mit 1,0688 multipliciren, um das Axenkreuz dieses Körpers zu erhalten; es ergeben sich die Projectionen der drei Axen aa', BB' (wie vorher), cc'. Ziehen wir nun durch die Punkte aa', BB' Verticalen, so sind dies offenbar die Kanten des Prismas für den hier anzunehmenden Fall, dass seine vier Flächen gleich gross ausgebildet seien. Trägt man nun von a aus auf der Prismenkante eine willkürlich gewählte Länge aD, ebenso nach unten aD^1, endlich auch von a' aus, $a'D^2$ und $a'D^3$ auf, und sollen von diesen Punkten D aus die stumpferen Polkanten der Pyramide o beginnen, so hat man nur $DE \parallel ac$, $D^1E^1 \parallel ac'$, $D^2E^2 \parallel a'c'$, $D^3E^3 \parallel a'c$ zu ziehen; nimmt man nun von O aus auf der Verticalaxe nach oben und unten eine gleich grosse willkürliche Länge $OF = OF'$ und legt durch diese Gerade, parallel der Axe aa', bis dieselben jene Polkanten der Pyramide schneiden, so stellen erstere die obere und untere Kante des Brachydomas $q = \{011\}$ dar. Von den Schnittpunkten E, E^1, E^2, E^3 aus hat man nun die Combinationskanten zwischen o und q zu construiren; diese sind aber parallel den schärferen Polkanten von o, da q diese abstumpft; also ziehe man $EG \parallel cB^1$, $EG' \parallel cB$, $E^1G^2 \parallel c'B$, $E^1G^3 \parallel c'B^1$ und ebenso dazu Parallele von E^2 und E^3 aus. Von D, D^1, D^2 und D^3 aus sind ferner zu ziehen die Combinationskanten zwischen $\{111\}$ und dem Prisma; da aber letzteres dasselbe $a : b$ hat, wie die Pyramide, so muss $DG^1 \parallel D^1G^2 \parallel aB$ und ebenso links, und die entsprechenden Kanten auf der punktirt ausgeführten Hinterseite des Krystalls; so werden als Durchschnittspunkte der Kanten $o : q$ und $o : p$ die Punkte G, G^1, G^2, G^3 und die entsprechenden vier der Rückseite erhalten. Von diesen ausgehend, hat man endlich die Kanten $q : p$, d. h. GH, G^1H^3 u. s. f. zu construiren. Die Richtung von GH findet man auf folgende Art: die linke obere Fläche $(0\bar{1}1)$ von q schneidet, wenn sie in den richtigen Abstand von der Mitte des Axenkreuzes gerückt wird, die Axenebene aOc in der Geraden JJ^3, die linke Prismenfläche $(1\bar{1}0)$ unter derselben Bedingung (durch die Zeichnung schon erfüllt) in JJ^1; der Punkt J, in welchem sich die Durchschnitte beider Flächen mit der erwähnten Axenebene schneiden, muss demnach ein Punkt ihrer Combinationskante sein. Die Axenebene $B'Oc$ wird von (110) in einer Verticalen durch B', von $(0\bar{1}1)$ in einer Geraden $B'c$ geschnitten; diese beiden Durchschnitte haben den Punkt B' gemein, also ist

Fig. 628.

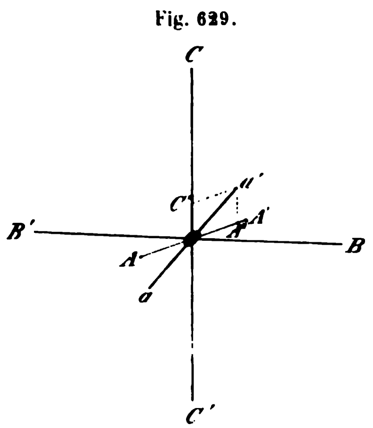


dieser ein zweiter Punkt der Combinationskante, die somit bekannt ist. Man hat also, ihrer Richtung $B'J$ parallel, die Gerade GH zu ziehen, bis sie die Kante des Prismas schneidet, ebenso $G^1H^3 \parallel JB$, $G^2H^2 \parallel J'B$ u. s. f. Die hinteren und vorderen Kanten $q : p$ müssen sich in Punkten schneiden, welche genau in den durch B und B' gehenden Verticalen liegen, durch welche Uebereinstimmung die Genauigkeit der Zeichnung controlirt wird.

Die soeben auseinandergesetzte Methode zur Bestimmung der Richtung einer Combinationskante wird nun allgemein für diesen Zweck angewandt; man denkt sich die Flächen stets in der richtigen Lage zum Axenkreuz, also z. B. eine Pyramide $\{221\} = (a : b : 2c)$ durch die Punkte gelegt, welche von der Mitte um a, b und $2c$ abstehen, — sucht dann die Durchschnitte der beiden zu combinirenden Flächen mit einer Axenebene und bestimmt den Schnittpunkt derselben, nimmt das Gleiche in einer zweiten Axenebene vor und verbindet beide Schnittpunkte durch eine Gerade, deren Richtung die gesuchte Combinationskante ist.

Um einen hexagonalen Krystall mit dem Axenverhältniss $1 : 1 : c$ zu zeichnen, entwirft man zuerst das Axenkreuz eines rhombischen, dessen Makrodiagonale $= 1$, dessen Brachydiagonale $= 1{,}732$ und dessen Verticale $= c$ des hexagonalen ist; nachdem man die Endpunkte der Axen a und b verbunden und so einen Rhombus von genau 120^0 Winkel (an der Seite erhalten hat, halbirt man die beiden Seiten der Axe a und zieht durch die Mittelpunkte Geraden parallel der Axe b, bis dieselben die Seiten des Rhombus schneiden; da sie diese ebenfalls unter 120^0 schneiden, so ist hierdurch ein Hexagon construirt, dessen Ecken, mit der Mitte verbunden, die drei Nebenaxen, in richtigem Längenverhältniss zur Hauptaxe c stehend, liefern. Die weitere Construction, nachdem einmal das Axenkreuz gegeben ist, bedarf keiner speciellen Erläuterung mehr; man hat einfach alle Kanten, welche nicht direct durch die Endpunkte und Richtungen der Axen bestimmt sind, auf die angeführte Art mittelst ihrer Durchschnitte mit zwei Axenebenen zu construiren.

Fig. 629.



Aus diesem Grunde ist auch für das mono- und asymmetrische System nur nöthig, die Construction ihres Axenkreuzes anzugeben, da alsdann alles Uebrige sich von selbst versteht.

Sei in Fig. 629 AA', BB', CC' das reguläre Axenkreuz und sei dasjenige eines monosymmetrischen Krystalls zu construiren, dessen Klinodiagonale nach vorn geneigt ist, und mit c den Winkel β einschliesst. Man trägt von der Mitte aus nach oben die Länge

$$OC'' = OC \cdot \cos\beta$$

und nach hinten diejenige

$$OA'' = OA' \cdot \sin \beta$$

auf, vollendet das Parallelogramm $OA''a'C''$ und macht $Oa = Oa'$, so ist aa' die Klinodiagonale des betreffenden Krystalls für den Fall, dass seine drei Axen gleiche Länge haben; man hat also nur nöthig, Oa mit dem wahren Werthe der Klinodiagonale, OC mit dem der Verticale zu multipliciren, um das Axenkreuz zu erhalten*).

Um nun endlich das Axenkreuz eines asymmetrischen Krystalls zu finden, dessen drei Axenwinkel α (Axe b : Axe c), β und γ sind, gehe man wieder von dem regulären Axenkreuz AA', BB', CC', Fig. 630, aus, trage auf OA die Länge

$$OA^2 = OA \cdot \cos C$$

und auf OB die Länge

$$OB^2 = OB \cdot \sin C$$

auf, wobei C den Winkel (100) : (0$\bar{1}$0) bedeutet, so ist, wenn man das Parallelogramm OA^2DB^2 gezogen hat, die Ebene COD das projicirte Makropinakoid, wenn das Brachypinakoid unverändert geblieben ist, und OD eine in derselben befindliche Horizontale von der Länge 1. Man nehme nun in OC die Längen

$$OC^3 = OC \cdot \cos \beta$$
$$OC^2 = OC \cdot \cos \alpha,$$

ferner in OA^1

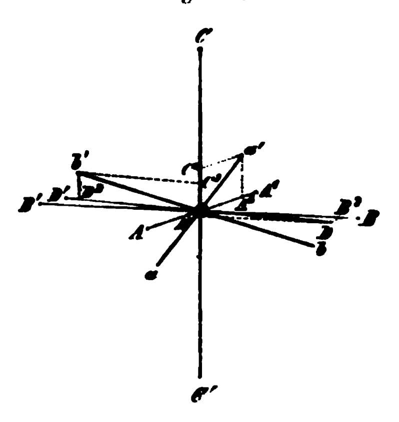
$$OA^3 = OA^1 \cdot \sin \beta$$

und in OD^1 (wenn der spitze Axenwinkel α links, andernfalls in OD)

$$OD^2 = OD^1 \cdot \sin \alpha,$$

vollende die Parallelogramme $OA^3a'C^3$ und $OD^2b'C^2$, ziehe deren Diagonalen und verlängere sie jenseits O um denselben Werth, so ist

Fig. 630.



aa' die Brachydiagonale,
bb' die Makrodiagonale,
CC' die Verticalaxe

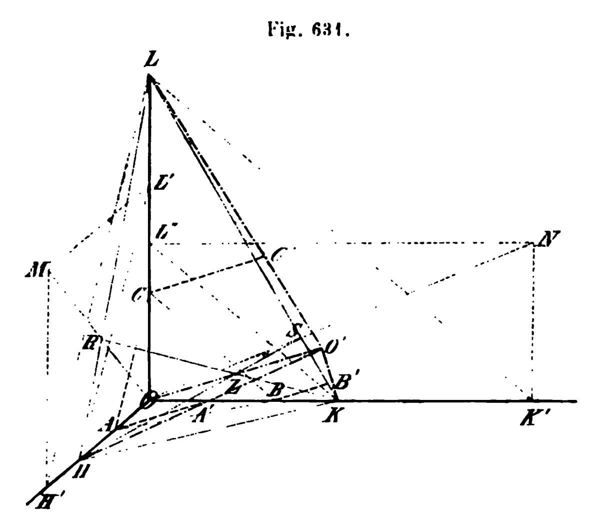
*) Bei Krystallen von der Ausbildung des Epidots (s. S. 508) erscheinen zuweilen bei der zur Construction der rechtwinkeligen Axen (Fig. 627) gewählten Drehung die Seitenflächen des Krystalls so verkürzt, dass die Zeichnung undeutlich wird. Dann wählt man zweckmässig eine stärkere Drehung des Krystalls gegen die Projectionsrichtung, wie man sie z. B. auf folgende Art erhält: Man theilt KK' (Fig. 627) in vier gleiche Theile und trägt einen solchen Theil von K aus nach unten ab; die Verbindung des Endpunktes dieser Länge mit O ist die gedrehte Axe b. Alsdann trägt man von O nach K' die Länge $\frac{1}{4} . OK'$ auf und vom Endpunkte dieser Strecke senkrecht nach abwärts die Hälfte jener Länge; der Endpunkt, mit O verbunden, giebt die gedrehte Axe a. Die so erhaltenen Richtungen sind die Projectionen dreier gleich langer, rechtwinkeliger Axen; die Drehung der Axe a in die Richtung der Klinodiagonale erfolgt dann ganz ebenso, wie oben für die gewöhnliche Projectionsmethode angegeben ist.

der asymmetrischen Krystallform, wenn $a : b : c = 1$; man hat also bb' unverändert zu lassen und aa' mit a, CC' mit c zu multipliciren, um das Axenkreuz des Krystalls mit dem Parameterverhältniss $a : b : c$ zu erhalten.

Zeichnung der Zwillingskrystalle: Um diese in derselben Weise zu projiciren, hat man erstens das Axenkreuz des einen Krystalls in der richtigen Stellung zu construiren, zweitens dasjenige des zweiten in einer Stellung, in welcher es gegen eine bestimmte Krystallfläche des ersten (die Zwillingsebene) symmetrisch liegt.

Sei in Fig. 631 OA, OB, OC das Axenkreuz des ersten Krystalls, seien OH, OK, OL die Parameter der Krystallfläche, welche die Zwillingsebene bildet, so suche man den Punkt Z, in welchem eine aus O auf die Ebene HKL gefällte Normale diese trifft. Diesen Punkt findet man folgendermaassen: ziehe HL' und $LH' \parallel AC$, KL'' und $LK' \parallel BC$, construire die Parallelogramme $OH'ML'$ und $OK'NL''$ und deren Diagonalen OM und ON; den Punkt R, wo OM und HL sich schneiden, verbinde man mit K, so ist KR eine Höhenlinie des Dreiecks HKL; den Punkt S, in welchem ON und KL sich schneiden, verbinde man mit H, so ist SH eine zweite Höhenlinie jenes Dreiecks; Z ist der Schnittpunkt dieser beiden Höhenlinien, also ist OZ die Projection der Normalen von O aus auf die Ebene HKL. Verlängert man OZ jenseits Z um seine eigene Länge, so erhält man einen Punkt O', welchen man durch Gerade mit H, K und L verbindet; alsdann sind $O'H$, $O'K$ und $O'L$ die Richtungen der drei Axen a, b, c des in Zwillingsstellung befindlichen zweiten Krystalls und ihre Längen gleich den Parametern der Zwillingsfläche HKL, welche dann für beide Krystalle identisch ist, nur dass diese umgekehrt gegen sie liegen. Will man nun das primäre Axenkreuz, d. h. die Parameterlängen der Grundform haben, so braucht man nur durch A, B und C Parallelen zu OZ zu legen, bis sie die Axen des zweiten Krystalls schneiden, so ist $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ die Projection des Axenkreuzes für den zweiten, in Bezug auf HKL gegen den ersten symmetrisch liegenden Krystall. Mit Hülfe dieses Axenkreuzes zeichnet man nun diesen nach derselben Methode wie den ersten, und verschiebt ihn, parallel sich selbst, so weit, wie es der natürlichen Ausbildung der Zwillingskrystalle entspricht.

Fig. 631.



Anhang I.

Vergleichungstabelle der krystallographischen Bezeichnungen

von

Naumann, Miller, Weiss und Levy.

Die beiden ersteren Bezeichnungsweisen der Krystallformen sind, bis auf eine beim hexagonalen System besprochene Abweichung, in der II. Abth. dieses Buches angewendet worden. Ueber die Bezeichnung von Weiss s. S. 199. Die Kenntniss der letzten Bezeichnungsweise ist deshalb für Jeden, der sich eingehender mit physikalischer Krystallographie beschäftigen will, wünschenswerth, weil sie zur Zeit noch in den Arbeiten der französischen Mineralogen angewendet wird; ohne auf das Princip der Levy'schen Bezeichnung einzugehen, sollen in der folgenden Tabelle nur die Mittel gegeben werden, die Symbole und Benennungen derselben auf die in diesem Buche gebrauchten zurückzuführen.

I. Reguläres Krystallsystem.

(Tesserales System, Système cubique.)

Naumann:	Miller:	Weiss:	Levy:
O	(111)	$(a : a : a)$	a^1
$\infty O \infty$	(100)	$(a : \infty a : \infty a)$	p
∞O	(110)	$(a : a : \infty a)$	b^1
$\infty O n$	$(h k 0)$	$(a : na : \infty a)$	$b^{\frac{h}{k}} = b^n$
$m O$	$(h h l)_{(h>l)}$	$(a : a : ma)$	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
$m O m$	$(h l l)_{(h>l)}$	$(a : ma : ma)$	$a^{\frac{h}{l}} = a^m$
$m O n$	$(h k l)$	$(a : na : ma)$	$\left(b^{\frac{1}{h}} b^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{mn}}\right)$

II. Hexagonales Krystallsystem.

(Sechsgliedriges System, rhomboëdrisches System, System hex.)

Naumann:	Bravais:	Weiss.	Levy:
oP	$\{0\,0\,0\,1\}$	$(\infty a : \infty a : \infty a : c)$	p
mP	$\{h\,0\,\bar{h}\,l\}$	$(a : a : \infty a : mc)$	$b^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{l}{h}}$
$mP2$	$\{k\,k\,\bar{h}\,l\}$	$(a : 2a : 2a : mc)$	$a^{\frac{2}{m}} = a^{\frac{l}{k}}$
mPn	$\{h\,i\,k\,l\}$	$(a : na : \frac{n}{n-1} a : mc)$	$\left(b^{1}\, b^{n-1}\, h^{\frac{m(n-1)}{n}}\right) = \left(b^{\frac{1}{i}}\, b^{\frac{1}{h}}\, h^{\frac{1}{l}}\right)$
∞P	$\{1\,0\,\bar{1}\,0\}$	$(a : a : \infty a : \infty c)$	m
$\infty P2$	$\{1\,1\,\bar{2}\,0\}$	$(a : 2a : 2a : \infty c)$	h^1
∞Pn	$\{h\,i\,k\,0\}$	$(a : na : \frac{n}{n-1} a : \infty c)$	$h^{\frac{1}{n-1}} = h^{\frac{h}{i}}$

Die rhomboëdrisch-hemiëdrischen Formen dieses Systems bezeichnet in der Weise (s. S. 351 f.), dass er die drei Polkanten des primären boëders zu Axen und die Basis zur Grundform nimmt. Alsdann r folgende Zeichen, verglichen mit denen von Naumann und Levy:

Naumann:	Miller:	Levy:
oR	$(1\,1\,1)$	a^1
mR $(m<1)$	$(h\,l\,l)_{(h>l)}$	$a^{\frac{h}{l}} = a^{\frac{2m+1}{1-m}}$
mR $(m>1)$	$(h\,\bar{l}\,\bar{l})_{(h>l)}$	$e^{\frac{h}{l}} = e^{\frac{2m+1}{1-m}}$
$-mR$ $(m<\frac{1}{2})$	$(h\,l\,l)_{(h<l)}$	$a^{\frac{h}{l}} = a^{\frac{1-2m}{1+m}}$
$-mR$ $(m>\frac{1}{2})$	$(\bar{h}\,l\,l)$	$e^{\frac{h}{l}} = e^{\frac{1-2m}{1+m}}$
mRn	$(h\,k\,l)$ $h = 2 + 3mn + m$ $k = 2(1-m)$ $l = 2 - 3mn + m$	$\left(b^{\frac{1}{h}}\, b^{\frac{1}{k}}\, b^{\frac{1}{l}}\right)$ wenn h, k, l positiv; $\left(d^{\frac{1}{h}}\, d^{\frac{1}{k}}\, b^{\frac{1}{l}}\right)$ wenn l negativ, } wird $b^{\frac{h}{k}}$, wenn $l = 0$,
$-mRn$	$(h\,k\,l)$ $h = 2 + 3mn - m$ $k = 2(1+m)$ $l = 2 - 3mn - m$	$\left(b^{\frac{1}{h}}\, d^{\frac{1}{k}}\, d^{\frac{1}{l}}\right)$ wenn k und l negativ. } wird $d^{\frac{h}{k}}$, wenn $l = 0$,
∞R	$(2\,\bar{1}\,\bar{1})$	e^2
$\infty P2$	$(1\,0\,\bar{1})$	d^1
∞Pn	$(h\,\bar{k}\,\bar{l})_{(h=k+l)}$ $h = n + 1$ $k = n - 2$ $l = 1 \;\; 2n$	$\left(b^{\frac{1}{h}}\, d^{\frac{1}{k}}\, d^{\frac{1}{l}}\right)$ $= \left(b^{\frac{1}{n+1}}\, d^{\frac{1}{n-2}}\, d^{\frac{1}{1-2n}}\right)$

III. Tetragonales Krystallsystem.

(Quadratisches System, viergliederiges System, pyramidales System, Système du prisme droit à base carrée.)

Naumann:	Miller:	Weiss:	Levy:
oP	(001)	$(\infty a : \infty a : c)$	p
P	(111)	$(a : a : c)$	$b^{\frac{1}{2}}$
mP	$(h\,h\,l)$	$(a : a : mc)$	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
mPn	$(h\,k\,l)$	$(a : na : mc)$	$\left(b^{\frac{1}{h-k}}\, b^{\frac{1}{h+k}}\, h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\, b^{\frac{1}{m(n+1)}}\, b^{\frac{1}{n}}\right)$
$P\infty$	(101)	$(a : \infty a : c)$	a^1
$mP\infty$	$(h\,0\,l)$	$(a : \infty a : mc)$	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
∞P	(110)	$(a : a : \infty c)$	m
$\infty P\infty$	(100)	$(a : \infty a : \infty c)$	h^1
∞Pn	$(h\,k\,0)$	$(a : na : \infty c)$	$h^{\frac{h+k}{h-k}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$

Das von den französischen Krystallographen angegebene Verhältniss $D : D : h$ ist unser $a : a : c$.

IV. Rhombisches Krystallsystem.

(Zweigliederiges System, prismatisches System, Système du prisme rhomboidal droit.)

Naumann:	Miller:	Weiss:	Levy:
oP	(001)	$(\infty a : \infty b : c)$	p
P	(111)	$(a : b : c)$	$b^{\frac{1}{2}}$
mP	$(h\,h\,l)$	$(a : b : mc)$	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
$m\breve{P}n$	$(h\,k\,l)\ (h > k)$	$(na : b : mc)$	$\left(b^{\frac{1}{h-k}}\, b^{\frac{1}{h+k}}\, g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\, b^{\frac{1}{m(n+1)}}\ {}^{\frac{1}{n}}\right)$
$m\bar{P}n$	$(h\,k\,l)\ (h < k)$	$(a : nb : mc)$	$\left(b^{\frac{1}{k-h}}\, b^{\frac{1}{k+h}}\, h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\, b^{\frac{1}{m(n+1)}}\, h^{\frac{1}{n}}\right)$
∞P	(110)	$(a : b : \infty c)$	m
$\infty\breve{P}n$	$(h\,k\,0)\ (h > k)$	$(na : b : \infty c)$	$g^{\frac{k+h}{k-h}} = g^{\frac{n+1}{n-1}}$

* Bei Miller ist die Makrodiagonale a, die Brachydiagonale b genannt, daher stets die Reihenfolge der beiden nicht verticalen Axen die umgekehrte, als in diesem Buche. Dasselbe gilt auch für die anderen Krystallsysteme, ausser für das monosymmetrische und asymmetrische. Unser Axenverhältniss: $a:b:c$ ist gleich $d : D : h$ der französischen Krystallographen.

Naumann:	Miller:	Weiss:	Levy:
$\infty\bar{P}n$	$(h\,k\,0)_{(h<k)}$	$(a : nb : \infty c)$	$h^{\frac{h+k}{h-k}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$
$m\breve{P}\infty$	$(h\,0\,l)\ \left(\frac{h}{l}=m\right)$	$(\infty a : b : mc)$	$e^{\frac{l}{h}} = e^{\frac{1}{m}}$
$m\bar{P}\infty$	$(0\,k\,l)\ \left(\frac{k}{l}=m\right)$	$(a : \infty b : mc)$	$a^{\frac{l}{k}} = a^{\frac{1}{m}}$
$\infty\breve{P}\infty$	$(1\,0\,0)$	$(\infty a : b : \infty c)$	g^1
$\infty\bar{P}\infty$	$0\,1\,0)$	$(a : \infty b : \infty c)$	h^1

V. Monosymmetrisches Krystallsystem.

(Monoklines System, zwei- und eingliedriges System, **schief p**
System, **klinorhombisches** System, Système **du prisme rhomboi**

Naumann:	Miller:	Weiss:	Levy:
oP	$\{0\,0\,1\}$	$(\infty a : \infty b : c)$	p
$+P$	$\{\bar{1}\,1\,1\}$	$(a' : b : c)$	$b^{\frac{1}{2}}$
$-P$	$\{1\,1\,1\}$	$(a : b : c)$	$d^{\frac{1}{2}}$
$+mP$	$\{\bar{h}\,h\,l\}$	$(a' : b : mc)$	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
$-mP$	$\{h\,h\,l\}$	$(a : b : mc)$	$d^{\frac{l}{2h}} = d^{\frac{1}{2m}}$
$+m₽n$	$\{\bar{h}\,k\,l\}_{(h<k)}$	$(na' : b : mc)$	$\left(b^{\frac{1}{k-h}}\,d^{\frac{1}{k+h}}\,g^{\frac{1}{l}}\right)$ $\left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\,d^{\frac{1}{m(n+1)}}\,g\right.$
$-m₽n$	$\{h\,k\,l\}_{(h<k)}$	$(na : b : mc)$	$\left(d^{\frac{1}{k-h}}\,b^{\frac{1}{k+h}}\,y^{\frac{1}{l}}\right)$ $\left(d^{\frac{1}{m(n-1)}}\,d^{\frac{1}{m(n+1)}}\,g\right.$
$+mⱣn$	$\{\bar{h}\,k\,l\}_{(h>k)}$	$(a' \cdot nb : mc)$	$\left(b^{\frac{1}{h-k}}\,b^{\frac{1}{h+k}}\,h^{\frac{1}{l}}\right) =$ $\left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\,b^{\frac{1}{m(n+1)}}\,h\right.$
$-mⱣn$	$\{h\,k\,l\}_{(h>k)}$	$(a : nb : mc)$	$\left(d^{\frac{1}{h-k}}\,d^{\frac{1}{h+k}}\,h^{\frac{1}{l}}\right) =$ $\left(d^{\frac{1}{m(n-1)}}\,d^{\frac{1}{m(n+1)}}\,h\right.$
∞P	$\{1\,1\,0\}$	$(a : b : \infty c)$	m
$\infty₽n$	$\{h\,k\,0\}_{(h<k)}$	$(na : b : \infty c)$	$g^{\frac{k+h}{k-h}} = g^{\frac{n+1}{n-1}}$
$\inftyⱣn$	$\{h\,k\,0\}_{(h>k)}$	$(a : nb : \infty c)$	$h^{\frac{h+k}{h-k}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$
$m₽\infty$	$\{0\,k\,l\}$	$(\infty a : b : mc)$	$e^{\frac{l}{k}} = e^{\frac{1}{m}}$
$+mⱣ\infty$	$\{\bar{h}\,0\,l\}$	$(a' : \infty b : mc)$	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
$-mⱣ\infty$	$\{h\,0\,l\}$	$(a : \infty b : mc)$	$o^{\frac{l}{h}} = o^{\frac{1}{m}}$
$\inftyⱣ\infty$	$\{1\,0\,0\}$	$(a : \infty b : \infty c)$	h^1
$\infty₽\infty$	$\{0\,1\,0\}$	$(\infty a : b : \infty c)$	g^1

VI. Asymmetrisches Krystallsystem.

(Triklinisches System, klinorhomboidisches System, eingliedriges System, Système du prisme doublement oblique ou anorthique.)

Naumann:	Miller:	Weiss:	Levy:
oP	$\{001\}$	$(\infty a : \infty b : c)$	p
P'	$\{111\}$	$(a : b : c)$	$f^{\frac{1}{2}}$
$'P$	$\{1\bar{1}1\}$	$(a : b' : c)$	$d^{\frac{1}{2}}$
$P_{,}$	$\{\bar{1}\bar{1}1\}$	$(a' : b' : c)$	$b^{\frac{1}{2}}$
$_{,}P$	$\{\bar{1}11\}$	$(a' : b : c')$	$c^{\frac{1}{2}}$
mP'	$\{h\,h\,l\}$	$(a : b : mc)$	$f^{\frac{l}{2h}} = f^{\frac{1}{2m}}$
$m'P$	$\{h\,\bar{h}\,l\}$	$(a : b' : mc)$	$d^{\frac{l}{2h}} = d^{\frac{1}{2m}}$
$mP_{,}$	$\{\bar{h}\,\bar{h}\,l\}$	$(a' : b' : mc)$	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
$m_{,}P$	$\{\bar{h}\,h\,l\}$	$(a' : b : mc)$	$c^{\frac{l}{2h}} = c^{\frac{1}{2m}}$
$\infty P_{,}'$	$\{110\}$	$(a : b : \infty c)$	t
$\infty'_{,}P$	$\{1\bar{1}0\}$	$(a : b' : \infty c)$	m
$m\bar{P}'n$	$\{h\,k\,l\}$	$(a : nb : mc)$	$\left(f^{\frac{1}{h-k}} d^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(f^{\frac{1}{m(n-1)}} d^{\frac{1}{m(n+1)}} h^{\frac{1}{n}}\right)$
$m'\bar{P}n$	$\{h\,\bar{k}\,l\}$	$(a : nb' : mc)$	$\left(d^{\frac{1}{h-k}} f^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(d^{\frac{1}{m(n-1)}} f^{\frac{1}{m(n+1)}} h^{\frac{1}{n}}\right)$
$m\bar{P}_{,}n$	$\{\bar{h}\,\bar{k}\,l\}$	$(a' : nb' : mc)$.	$\left(b^{\frac{1}{h-k}} c^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}} c^{\frac{1}{m(n+1)}} h^{\frac{1}{n}}\right)$
$m_{,}\bar{P}n$	$\{\bar{h}\,k\,l\}$	$(a' : nb : mc)$	$\left(c^{\frac{1}{h-k}} b^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(c^{\frac{1}{m(n-1)}} b^{\frac{1}{m(n+1)}} h^{\frac{1}{n}}\right)$
$m'\bar{P}'\infty$	$\{h\,0\,l\}$	$(a : \infty b : mc)$	$o^{\frac{l}{h}} = o^{\frac{1}{m}}$
$m_{,}\bar{P}_{,}\infty$	$\{\bar{h}\,0\,l\}$	$(a' : \infty b : mc)$	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
$m\breve{P}'\,n$	$\{h\,k\,l\}$	$(na : b : mc)$	$\left(f^{\frac{1}{k-h}} c^{\frac{1}{k+h}} g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(f^{\frac{1}{m(n-1)}} c^{\frac{1}{m(n+1)}} g^{\frac{1}{n}}\right)$
$m'\breve{P}n$	$\{h\,\bar{k}\,l\}$	$(na : b' : mc)$	$\left(d^{\frac{1}{k-h}} b^{\frac{1}{k+h}} g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(d^{\frac{1}{m(n-1)}} b^{\frac{1}{m(n+1)}} g^{\frac{1}{n}}\right)$

Naumann:	Miller:	Weiss:	Levy:
$m\breve{P},n$	$\{\bar{h}\,\bar{k}\,l\}$	$(na' : b' : mc)$	$\left(b^{\frac{1}{k-h}}\,d^{\frac{1}{k+h}}\,g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\,d^{\frac{1}{m(n+1)}}\,g^{\frac{1}{n}}\right)$
$m,\breve{P}n$	$\{\bar{h}\,k\,l\}$	$(na' : b : mc)$	$\left(c^{\frac{1}{k-h}}\,f^{\frac{1}{k+h}}\,g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(c^{\frac{1}{m(n-1)}}\,f^{\frac{1}{m(n+1)}}\,g^{\frac{1}{n}}\right)$
$m,\breve{P}'\infty$	$\{0\,k\,l\}$	$(\infty a : b : mc)$	$i^{\frac{l}{k}} = i^{\frac{1}{m}}$
$m'\breve{P},\infty$	$\{0\,\bar{k}\,l\}$	$(\infty a : b' : mc)$	$e^{\frac{l}{k}} = e^{\frac{1}{m}}$
$\infty\bar{P}'_{,}\,n$	$\{h\,k\,0\}$	$(a : nb : \infty c)$	$h^{\frac{h+k}{h-k}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$
$\infty'_{,}\bar{P}n$	$\{h\,\bar{k}\,0\}$	$(a : nb' : \infty c)$	${}^{\frac{h+k}{h-k}}h = {}^{\frac{n+1}{n-1}}h$
$\infty\breve{P}'_{,}n$	$\{h\,k\,0\}$	$(na : b : \infty c)$	$g^{\frac{k+h}{k-h}} = g^{\frac{n+1}{n-1}}$
$\infty'_{,}\breve{P}n$	$\{h\,\bar{k}\,0\}$	$(na : b' : \infty c)$	${}^{\frac{k+h}{k-h}}g = {}^{\frac{n+1}{n-1}}g$
$\infty\breve{P}\infty$	$\{0\,1\,0\}$	$(\infty a : b : \infty c)$	g^1
$\infty\bar{P}\infty$	$\{1\,0\,0\}$	$(a : \infty b : \infty c)$	h^1

Anhang II.

Preisverzeichnisse

der vom Verfasser empfohlenen Lieferanten von

pparaten, Modellen, Krystallen und Präparaten.

1. W. Apel,

Universitäts-Mechanikus in Göttingen.

alreflectometer nach F. Kohlrausch (s. S. 591 f.) mit Theilung auf 1°, Nonienablesung auf 3′, vernickeltem Krystallhalter mit doppeltem Kugelgelenk, Klammer und Spitzenplatte; Fernrohr mit Fadenkreuz, Glasmikrometer und Vorstecklupe; Spiegel zum Justiren, Centrirschneide, Schirm und Schirmhalter; Thermometer . . . . Mark 150

Dazu

Fester centrirter Objectträger (s. S. 593) geschwärzt. . . . . - 15

Drehbarer Objectträger nach Klein (s. S. 598), vernickelt . . . . - 36

Derselbe einfacher, nach W. Kohlrausch (s. S. 592), vernickelt. . . . - 18,50

rselbe Apparat mit der von Klein angegebenen Construction (s. S. 597) mit zwei Fernrohrträgern, Glasgefäss mit zwei gegenüberstehenden parallelen Glasplatten, Fernrohren, Thermometer, festem centrirten Objectträger und mit dem drehbaren Klein'schen Objectträger, Vorstecklupe, Flintglastrog (zur Bestimmung der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten), Justirspiegel, Schirm u. s. w.; zwei Nicol'schen Prismen in Fassung. . . . . - 320

Dazu

Ein Nicol'sches Prisma in Messingfassung, für das Fernrohr passend - 15

Anmerk. Durch Theilung des Limbus auf 0°,5, Ablösung mit Lupen auf 1′ und idade mit Klemmvorrichtung und Feinstellschraube erhöht sich der Preis der obigen parate um Mark 33.

2. Böhm und Wiedemann,

Chem.-physik. Utensilienhandl. u. mechan. Werkstätte, München, Kaufingerstr. 20.

Wellenflächen-Modelle in Messingdraht auf lackirten, gusseisernen Stativen. Diese h Angabe von Prof. P. Groth gefertigten und zur Demonstration in Vorlesungen stimmten Modelle besitzen einen Durchmesser ohne Stativ von c. 50 cm. Ausserdem rden dieselben in halber Grösse mit Holzstativ geliefert; die Preise der letzteren sind Folgenden in ( ) angegeben. Photographien der Modelle stehen auf Wunsch gegen stattung der Kosten (à 50 Pf.) zur Verfügung.

Wellenflächen der einaxig negativen Krystalle (s. S. 57). . . . . . . Mark 25 (12,50)

- - - positiven - (s. S. 60) . . . . - 25 (12,50)

- - zweiaxigen Krystalle (s. S. 98) . . . . - 70 (48)

- monosymmetrischer Krystalle für Roth, Gelb und Blau durch die Hauptschnittcurven dargestellt, zur Demonstration der geneigten Dispersion (s. S. 494) . . . . - 60 (45)

Desgl. zur Demonstration der horizontalen und der gekreuzten Dispersion (s. S. 596 f.) . . . . Mark 60 (45)

Axenkreuze der sechs Krystallsysteme, mit Durchbohrungen zum Einziehen farbiger Seidenfäden, auf Stativen gleich vorigen; diese Axenkreuze werden in denselben beiden Formaten geliefert, wie die Wellenflächen-Modelle; Preis zusammen . . . . - 70 (50

Anlegegoniometer mit halbem Kreis, in Etuis . . . . - 18

Reflexionsgoniometer mit verticalem Kreis (s. S. 554 f.) . . . . - 225

Nussbaumkasten hierzu . . . . - 12

Beleuchtungsbrenner hierzu (Flürschein's Patent, s. S. 558 Anmerk.) . - 7

Bunsen'scher Brenner (Flürschein's Patent) mit Kamin und Vorrichtung zur Färbung der Flamme nach Feussner, zur Anwendung am Totalreflectometer (s. S. 596) . . . . - 12

Derselbe ohne Selbstentzünder . . . . - 9

Derselbe ohne Selbstentzünder mit Linsenansatz am Kamin, zur Anwendung am Elasticitäts-Apparate (s. S. 662) . . . . - 12

Bunsen'scher Brenner mit breiter Oeffnung und Vorrichtung zur Färbung der Flamme nach Laspeyres (s. S. 626) . . . . - 32

Derselbe mit langem knieförmigen Arm zur Befestigung an der Wand (s. S. 626) . . . . - 33

Kleiner Leuchtbrenner mit Stativ zum Erwärmen, Kitten u. s. w. von Präparaten (s. S. 672) . . . . - 6

Gläser für Canadabalsam mit übergreifendem Glasstöpsel . . . . - 0,50

Belastungsvorrichtung zum **Elasticitäts-Apparat** (s. S. 665), complet mit den an der Wand zu befestigenden Bretern . . . . - 60

L. Brill,

Verlagshandlung mathematischer Modelle in Darmstadt.

Gypsmodelle:

Wellenfläche einaxig negativer Krystalle (Kalkspath), Durchm. 9—8 cm. Mark 4

Dieselbe für positive Doppelbrechung (Zinnober), Durchm. 9 cm. . . - 4

Fresnel'sche Wellenfläche zweiaxiger Krystalle, längs eines Hauptschnittes zerlegbar, Durchm. 12—8 cm. . . . . - 9

Das zu letzterer gehörige Elasticitäts-Ellipsoid, Durchm. 12—6 cm. . - 4

Cartonmodelle:

Dreiaxiges Ellipsoid, beweglich, so dass man das Verhältniss der drei Axen nach Belieben ändern kann, mit Stativ . . . . - 3,50

NB. Ausführlicher Katalog der mathemat. Modelle auf Verlangen.

R. Fuess,

Mechaniker, Berlin SW., alte Jakobstr. 108.

Anlegegoniometer mit abnehmbaren Stahlschenkeln (Fig. 565) . . . . Mark 24

do. " mit festen Stahlschenkeln . . . . - 30

Mikroskopgoniometer nach Hirschwald (s. S. 546) . . . . - 420

Fühlhebelgoniometer (s. S. 547) . . . . - 270

Leeson's Goniometer zum Aufsetzen auf den Mikroskoptubus . . . . - 50

Reflexionsgoniometer und **Refractometer** (Modell No. 2, s. S. 560 f.) Theilung des verdeckten silbernen Limbus auf 15′, der Nonien auf 30″; vier Oculare und vier Lichtsignale; Beleuchtungsrohr (s. S. 566) mit Nicol'schem Prisma . . . . - 660

Dasselbe Instrument (Mod. 2a) nach S. 567 vervollständigt . . . . . - 740

Dasselbe mit Nicol'schem Prisma zum Aufsetzen auf Ocular γ (s. S. 605) und einem Linseneinsatz zur Messung des Winkels der optischen Axen - 750

Reflexionsgoniometer Modell No. 3 (s. S. 567) . . . . - 330

Grosses Reflexionsgoniometer und **Refractometer** (s. S. 567 f.). Silberner Limbus auf 10′ getheilt, zwei Mikroskope mit Fadenmikrometer; zwei Nicol'sche Prismen mit Theilkreisen für die Fernröhre; drei Oculare und ebenso viele Signale; Beleuchtungsrohr mit Nicol . . . . - 1350

Erhitzungsapparat zur Messung der Krystallwinkel und Brechungsexponenten in höherer Temperatur (s. S. 570) . . . . - 450

Vorrichtung zum Messen zerfliesslicher Krystalle (s. S. 583) zu den Goniometern No. 2, 2a und 3 passend . . . . - 36

Totalreflectometer nach S. 603 zum Goniometer No. 2 gehörig, dessen Ocular γ alsdann mit Nicol versehen wird (s. oben) . . . . Mark 120
Dasselbe als besonderes Instrument (s. S. 607) . . . . - 270
Grosses Totalreflectometer (s. S. 608), zum Goniometer Mod. 1 passend . . - 270
Polarisationsinstrument nach Nörremberg (s. S. 613) für paralleles und convergentes Licht, mit drehbarem getheilten Tische, kleinem Axenwinkelgoniometer und Auszugsrohr zur stärkeren Vergrösserung der Interferenzbilder . . . . - 135
Dasselbe Instrument ohne Axenwinkelapparat und Auszugsrohr . . . - 105
Krystallographisch-optischer Universalapparat nach Groth (s. S. 614) bestehend aus:

1) Verticales Polarisationsinstrument für convergentes und paralleles Licht (Fig. 592) nebst Stauroskop mit Calderon'scher Doppelplatte (s. S. 618) . . . . - 285
Dazu Rohr mit empfindlicher Gypsplatte nach Klocke (s. S. 618) . - 20
2) Axenwinkelapparat (s. S. 626), zu dem die optischen Theile des verticalen Instrumentes benutzt werden, mit Oelgefässen und mit der Einrichtung zur Bestimmung der Circularpolarisation . . . . - 165
3) Erhitzungsapparat mit zwei Thermometern (s. S. 631) . . . . . . - 45
4) Zwei Fernröhre nebst Centrir- und Justirapparat zur Montirung des Instrumentes als Goniometer und Refractometer (§ 120) . . . . . . - 175
5) Quarzkeil und Viertelundulations-Glimmerplatte . . . . - 20

Zusammen Mark 690
Mit dem Klocke'schen Rohre - 710

Daraus einzeln:
Das verticale Polarisationsinstrument ohne Stauroskop . . . . - 240
Stauroskop nach Calderon . . . . - 220
Stauroskop nach Brezina . . . . - 210
Adams'scher Polarisations- und Axenwinkel-Apparat (§ 121) . . . . - 280
Grosser Axenwinkel-Apparat (§ 122) . . . . - 790
Mikroskop (Fig. 605) mit Hartnack'schen Polarisatoren und Linsensystemen, Quarz- und Kalkspathplatte, Bertrand-Lasaulx'schen Linsen und Erhitzungsapparat zu petrographischen Zwecken . . . . - 405
Ohne den letzteren . . . . - 378
Tubus mit Bertrand'scher Linse zur Vergrösserung der Interferenzbilder (s. S. 653) . . . . - 12
Calderon'sches Stauroskopocular (s. S. 654) . . . . - 24
Bertrand'sches Stauroskopocular (s. S. 655) . . . . - 30
Grosses Mikroskop (Fig. 609) mit allen Nebenapparaten . . . . - 650
Vereinfachtes kleineres Mikroskop mit Polarisatoren, den Objectiven 2, 4, 7 und zwei Ocularen . . . . - 270
Apparat zur Erzeugung der **Interferenz** des Lichtes (s. S. 38) . . . . - 9
Zwei Kalkspathrhomboëder in Fassung drehbar zur Demonstration der Doppelbrechung (s. S. 48 f.) . . . . - 54
Nicol'sche Prismen . . . . 10—100
Quarzkeil (s. S. 122) . . . . - 18
Empfindliche Gypsplatte (s. S. 124) . . . . - 10
Viertelundulations-Glimmerplatte (s. S. 125) . . . . - 4
Apparat zur Demonstration der **Doppelbrechung durch Biegung** . . . . . . - 10
Presse zur Demonstration der Doppelbrechung durch Druck (s. S. 136) . . - 15
Apparat zur Demonstration der Doppelbrechung durch Erhitzung (s. S. 136) - 15
Dicke Gläser zu den beiden letzteren Apparaten. Pro Dutzend . . . . . . - 9
Bücking'scher Druckapparat (s. S. 139) . . . . - 55
Dichroskop mit der Verbesserung von V. von Lang (s. S. 148) . . . . . - 45
Sénarmont'scher Apparat zur Demonstration der Wärmeleitung . . . . . . - 18
Kleine Schneidemaschine für Handbetrieb (Fig. 619) mit goniometrischer Vorrichtung zur Befestigung und Orientirung der Krystalle . . . . - 180
Schneide- und **Schleifmaschine** Fig. 626 mit Schwungrad und Fusstrittbewegung, mit Vorrichtung zum Befestigen und Orientiren des Materials - 270
Vorrichtung zum Planparallelschleifen (Fig. 621) . . . . - 18
Platte von Gusseisen, genau plan gehobelt . . . . - 12
Glasplatte in Holzrahmen, zum Schleifen . . . . - 12
Kasten mit **Schleifutensilien** verschiedene Sorten Schmirgel, Canadabalsam, Zinnasche, Kolophoniumkitt) . . . . - 24
Präparirapparat zum Kitten von Dünnschliffen (Fig. 619), mit regulirbarer Spirituslampe, Thermometer und Pincette . . . . - 18

Objectträger von gewöhnl. Glase . . . . pro 100 St. Mark 5
- von Spiegelglas . . . . - 100 - - 10
Deckgläser 22:28 mm. . . . . - 100 - - 5
- 16:16 mm. . . . . - 100 - - 3
Sammlungen von **Dünnschliffen** typischer Gesteine, s. Preisverzeichniss von R. Fuess, Berlin 1888.
Glaslineal zum Zeichnen, mit Millimetertheilung. . . . . - 12
Glasdreieck, rechtwinkelig (eine Kathete mit Millimetertheilung). . . . . . - 12
Glaskreis in 360° getheilt, als Transporteur zu gebrauchen. . . . . - 12

Ausführlichere Preisverzeichnisse mit Abbildungen werden auf Wunsch gratis versendet.

C. Goldbach,

Chemisches Laboratorium in Kork bei Kehl in Baden.

Krystalle chemischer Präparate. Ausführliches Verzeichniss gratis und franco.

Dr. A. Krantz,

Rheinisches Mineralien-Comptoir in Bonn.

empfiehlt sich zur Lieferung von Mineralien, Krystallmodellen, Gesteinen, Petrefacten u. s. w.

Kataloge gratis und franco.

Krystallmodelle in Birnbaumholz, rühmlichst bekannt durch Genauigkeit und Eleganz, einzeln und in folgenden Zusammenstellungen:

30 Stück (einfache Hauptformen, Durchschnittsgrösse 5 cm. . . . . Mark 20
Dasselbe, Durchschnittsgrösse 10 cm. . . . . - 55
132 Stück (sämmtliche einfachen Formen, auch alle hemiëdrischen und tetartoëdrischen, und die am häufigsten in der Natur vorkommenden Combinationen). Durchschnittsgrösse 5 cm. . . . . - 125
743 Stück (typische Modelle sämmtlicher krystallisirten Mineralien) zusammengestellt von Prof. P. Groth. Durchschnittsgrösse 5 cm . . . . . - 1200

Ferner befinden sich in Vorbereitung:

1) Sammlung von Modellen sämmtlicher in vorliegendem Werke erwähnten Combinationen.
2) Sammlung von Modellen aller wichtigsten, krystallographisch sicher bestimmten, in Laboratorien dargestellten chemischen Verbindungen, zusammengestellt von Prof. P. Groth.

F. Maier,

Mechaniker und Optiker, Strassburg i/E., Krämerg. 10.

Lehmann's Krystallisationsmikroskop (s. S. 658) . . . . Mark 450
Bestäuber zu Kundt's Methode der Untersuchung der Pyroëlektricität (s. S. 181) - 7

A. Nachet,

Optiker, Paris, Rue St. Severin 17.

Grosses Mikroskop (Fig. 612) mit allen Nebenapparaten, in Mahagonikasten Fr. 1200
Mittleres Mikroskop etwas vereinfachter Construction, mit 5 Objectiven und drei Ocularen . . . . - 750
Kleines Mikroskop; Stativ nicht zum Neigen; Analysator über dem Ocular; 3 Objective und 2 Oculare . . . . - 350

Ocularspectroskope, Mikrometer u. a. **mikroskopische Nebenapparate.**

Dr. Theodor Schuchardt,

Chem. Fabrik, Görlitz.

Krystalle chemischer Präparate (Verzeichniss auf Verlangen gratis und franco.)
α-Bromnaphtalin (s. S. 595), bei 277° siedend . . . . à Kilo Mark 70
Lösungen zur mechanischen Trennung von Gesteinsbestandtheilen:
Kaliumquecksilberjodid, spec. Gew. 3,17—3,20 . . . . à - - 30
Baryumquecksilberjodid, - - 3,57—3,60 . . . . à - - 44
Cadmiumborowolframat, - - 3,28—3,39 . . . . à - - 90
Mineralien, Reagentien u. s. w.

Dr. Steeg und Reuter,

Optisches Institut in Homburg v. d. Höhe.

Polarisations-Apparat nach Nörremberg mit grossem Gesichtsfeld und Auszugsrohr	Mark	110
Derselbe mit Goniometer zum Messen der Axenwinkel (s. S. 618)	-	140
Turmalinzangen	-	12—36
Einaxige Krystallplatten, senkrecht zur Axe:		
Apophyllit von verschiedenen Fundorten	-	3—10
Amethyst von Brasilien mit Dreitheilung	-	10—30
Magnesium-Platin-Cyanür	-	3—12
Quarz, Rechts und Links . . . per Paar	-	6— 8
Kalkspath 1/2 bis 3 mm dick	-	3— 5
Apatit 1/2 - 3 - -	-	3— 5
Turmalin in verschiedenen Farben	-	3—12
Zweiaxige Krystalle, senkrecht zur ersten Mittellinie:		
Sanidin, mit verschiedener Dispersion	-	3— 6
Adular von St. Gotthardt (horizontale Dispersion)	-	3— 6
Aragonit, dick und dünn . . . per Stück	-	2,5— 5
Borax (gekreuzte Dispersion)	-	2,5— 3,5
Brookit (Axenebenen gekreuzt)	-	6—30
Weinsaures Kali-Ammoniak Natron (desgl.)	-	3— 5
Doppeltchromsaures Kali (asymmetrisch)	-	2— 3,5
Gyps, 2 Platten, eine ungefasst zum Erwärmen (geneigte Dispersion)	-	5—12
Chrysoberyll, verschiedener Dispersion	-	8—20
Topas, mit kleinem und grossem Axenwinkel	-	4—15
Titanit (Sphen)	-	3—15
Pleochroitische Würfel und Platten zum Drehen gefasst:		
Pennin oder Ripidolith	-	4— 6
Cordierit	-	10—25
Turmalin	-	10—30
Topas	-	12—30
Epidot	-	6—12
Andalusitplatte senkrecht zu einer Axe (Büschel)	-	10—40
Epidotplatte, -	-	5—12
Arragonit, idiocyclophanisch	-	10—20
Quarzplatte, parallel der Axe ganz dünn	-	5—12
Quarzkeil	-	15
Quarz-Prisma, senkrecht oder parallel zur Axe	-	15—75
Kalkspath, - - - - - je nach Grösse und Reinheit	-	10—60
Alle Arten Polarisations-Prismen, nach Nicol, Hartnack, Foucault, Glan, Thomson, Glazebrook etc.		
Quarz-Platte, 3,75 mm dick, nach Klein	-	6
Dichroskopische Loupe	-	12
Farbige Gläser, roth und blau	-	2
Viertelundulations-Glimmerplatten	-	1,5— 4
Glimmer-Combinationen nach Reusch, einaxig, rechts und links drehend, . . . per Paar	-	25
Sortiment von 16 gekühlten Gläsern . . . per Stück	-	3—10
Taschen-Spectroskop	-	27
Krystallplatten mit Absorptions-Streifen	-	2—20
Krystallmodelle in weissem und farbigem Glase, in Sammlungen von 18 bis 60 Stück	-	25—80

Ausführliche Cataloge senden auf Verlangen gratis und franco Dr. Steeg und Reuter.

Namenregister.

Sachregister.

Corrigenda.

S. 35 Z. 14 l. »Minimalablenkung« statt »Maximalablenkung«.

S. 160 Z. 18 l. »Jannettaz« st. »Jannetaz«.

S. 430 Z. 15 l. 1,9039 st. 1,9037.

Corrigenda.

S. 35 Z. 14 l. »Minimalablenkung« statt »Maximalablenkung«.
S. 160 Z. 18 l. »Jannettaz« st. »Jannetaz«.
S. 430 Z. 15 l. 1,9039 st. 1,9037.

Erläuterung der Tafel.

Interferenzerscheinungen der Krystalle im polarisirten Lichte bei gekreuz Nicols:

Fig. 1. Kalkspath (einaxig):
Fig. 2. Quarz (do., circul. pol.);
Fig. 3, 4. Aragonit (rhombisch);
Fig. 5. Brookit (do., Axenebenen f. Blau u. Roth gekreuzt):
Fig. 6, 7. Gyps (geneigte Dispersion);
Fig. 8, 9. Feldspath (horizontale Dispersion);
Fig. 10, 11. Borax (gekreuzte Dispersion);
Fig. 12, 13. Zweifach chromsaures Kalium (asymmetrisch).

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Fig. 8.



Fig. 9.



Fig. 10.



Fig. 11.



Fig. 12.



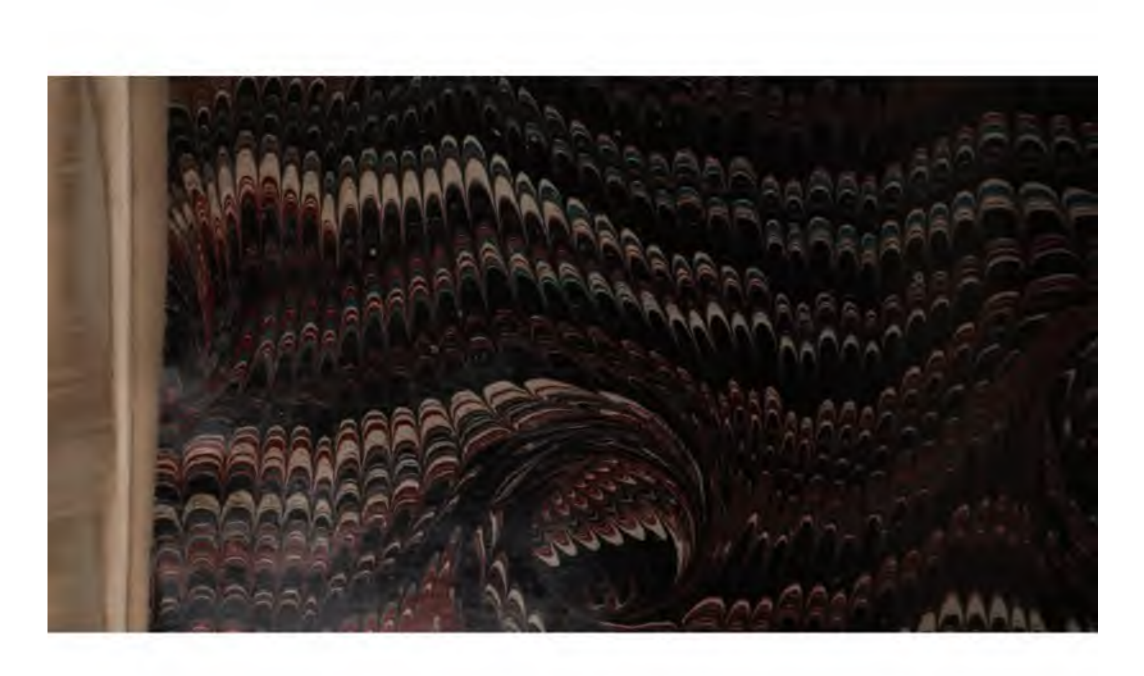
Fig. 13.



Buchdruckerei von G. Fischbach, in Strassburg.








DEC 12 1887
FEB 23 1891
MAR 29 1901
OCT 2 1901
MAR 16 19

